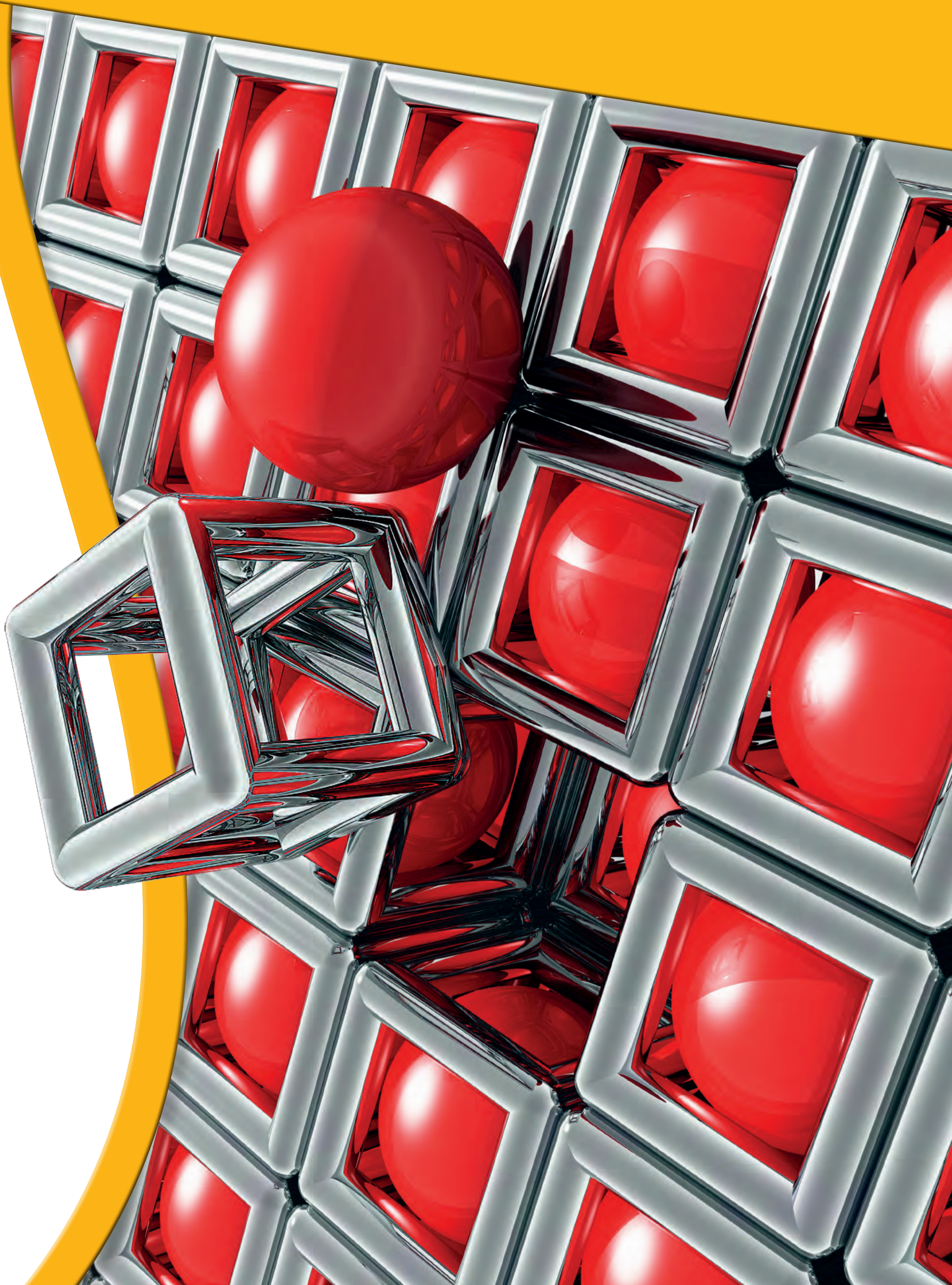
OFI

Matematika

11



ÚJGENERÁCIÓS
TANKÖNYV

A tankönyv megfelel az 51/2012. (XII. 21.) EMMI-rendelet:
3. sz. melléklet: Kerettanterv a gimnáziumok 9–12. évfolyama számára 3.2.04 Matematika
6. sz. melléklet: Kerettanterv a szakközépiskolák 9–12. évfolyama számára 6.2.03 Matematika
megnevezésű kerettantervek előírásainak.

Tananyagfejlesztők: BARCZA ISTVÁN, BASA ISTVÁN, TAMÁSNÉ KOLLÁR MAGDOLNA
KELEMENNÉ KISS ILONA, BÁLINT ZSUZSANNA

Alkotószerkesztő: TAMÁSNÉ KOLLÁR MAGDOLNA

Vezetőszerkesztő: TÓTHNÉ SZALONTAY ANNA

Tudományos szakmai szakértő: DR. VANCSÓ ÖDÖN

Pedagógiai szakértő: OROSZ GYULA

Olvasószerkesztő: CZOTTER LÍVIA, DARCSINÉ MOLNÁR EDINA

Fedélterv: KORDA ÁGNES terve alapján készítette: OROSZ ADÉL

Látvány- és tipográfiai terv: GADOS LÁSZLÓ, OROSZ ADÉL

Fotók: Wikipedia, Pixabay, kiadói archív és a projekt keretében készült fotók

Illusztráció: LÉTAI MÁRTON

Szakábra: SZALÓKI DEZSŐ

A tankönyv szerkesztői ezúton is köszönetet mondanak mindazoknak a tudós és tanár szerzőknek, akik az elmúlt évtizedek során olyan módszertani kultúrát teremtettek, amely az újgenerációs tankönyvek készítőinek is ösztönzést és példát adott. Ugyancsak köszönetet mondunk azoknak az íróknak, költőknek, képzőművészeknek, akiknek alkotásai tankönyveinket gazdagítják.

ISBN 978-963-436-139-8

Eszterházy Károly Egyetem • 3300 Eger, Eszterházy tér 1.
Tel.: (+36-1) 460-1873 • Fax: (+36-1) 460-1822 • Vevőszolgálat: vevoszolgalat@ofi.hu

A kiadásért felel: dr. Liptai Kálmán rektor
Raktári szám: FI-503011101/1
Műszakiiroda-vezető: Horváth Zoltán Ákos
Műszaki szerkesztő: Orosz Adél
Grafikai szerkesztő: Kováts Borbála, Márton Tünde
Nyomdai előkészítés: Gados László
Terjedelem: 31,93 (A/5) ív, tömeg: 624,47 gramm

A könyvben felhasználásra került a Matematika 10. Közel a mindennapokhoz című mű,
Konsept-H Könyvkiadó, Nemzeti Tankönyvkiadó Zrt., 2014, szerzők: Dömel András, dr. Korányi Erzsébet és
dr. Marosvári Péter. Alkotószerkesztő: Környei László. Felelős szerkesztő: Bognár Edit. Lektor: Somfai Zsuzsa.

1. kiadás, 2018

Az újgenerációs tankönyvek az Új Széchenyi Terv Társadalmi Megújulás Operatív Program 3.1.2-B/13-2013-0001 számú, „A Nemzeti alaptantervhez illeszkedő tankönyv, taneszköz és Nemzeti Köznevelési Portál fejlesztése" című projektje keretében készült. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértők:
Kónya István, Kempfner Zsófia

Engedélyszám: TKV/75-10/2018
2018. február 27-től 2023. augusztus 31-ig

Készült a Gyomai Kner Nyomda Zrt.-ben
Felelős vezető: Fazekas Péter vezérigazgató
Telefon: 66/887-400

SZÉCHENYI 2020

MAGYARORSZÁG KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális Alap

BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Előszó – a könyv témakörei

Sok szeretettel köszöntünk az új tanévben!

A 11.-es matematika tananyagban olyan kérdések kerülnek elő, amelyek közvetlen kapcsolatban állnak modern világunkkal. Többek között földmérők, varrónők, bádogosok, orvosok, informatikusok, szociológusok, brókerek, társasjáték-alkotók, statisztikusok, fizikusok, kémikusok, közgazdászok, építészek vehetik hasznát munkájukban az idén sorra kerülő matematikai fogalmaknak. Sok biológiai, fizikai, gazdasági és társadalmi folyamatot írnak le azok a függvények, amelyekkel idén megismerkedhetsz. Maradj te is nyitott és kíváncsi!

Az egyes leckékben a következő típusú részekkel találkozhatsz:

BEVEZETŐ: Sok esetben egyszerű és gyakorlati problémák vezetnek érdekes matematikai kérdésekhez. Ilyenekre találhatsz példát a lecke elején a BEVEZETŐ-ben.

KIDOLGOZOTT FELADAT: Ebben a részben részletes magyarázatokkal mutatjuk be egy konkrét feladat megoldását.

ELMÉLET: Itt rendszerezzük a matematikai tartalmakat. Megfogalmazzuk a pontos matematikai definíciókat és tételeket is.

FELADATOK: Igyekeztünk változatos feladatokat összeállítani egy-egy órára, a könnyebbekkel kezdve. A feladatokat nehézségük szerint szinteztük.

CSOPORTMUNKA vagy PÁRMUNKA: Néhány esetben ezt a munkaformát javasoljuk a feladatok megoldására.

HÁZI FELADATOK: 4-5 feladat az otthoni munkához.

RÁADÁS: Itt matematikai érdekességeket találsz, és megmutatjuk a tananyag néhány érdekes továbbgondolását és alkalmazását.

EMELT SZINT: Ezek a részek túlmutatnak a középszintű érettségi követelményeken. Az emelt szintű érettségi követelményeihez tartozó fogalmak, feladattípusok, illetve szép, precíz bizonyítások találhatók ezekben a részekben.

Ha tartós tankönyved van, amit vissza kell adnod az iskolának a tanév végén, akkor ne írj a tankönyvbe, dolgozz a füzetedben! (Táblázatok esetén segítségedre lehet egy öntapadós jegyzettömb: egy öntapadós lapot tegyél a táblázat mellé, s arra írhatod az eredményeket.)

1. SZÖGFÜGGVÉNYEK

- **Háromszögeljünk! Ismerd meg a GPS-rendszer alapjait!**
  Milyen távol van? Mekkora szögben illeszkedik? Mekkora területű?
- **Minden szögnek és számnak van szinusza**
  Új és mégis ismerős görbék. Hangok és hullámok

2. KOMBINATORIKA, VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

- **Ábrázoljuk gráfokkal!**
  Rajzoljuk a megoldást!
- **Állítsuk sorba! Válasszuk ki!**
  Fagyi, zenelejátszás, kártya, lottó, jelszavak… Variáljunk, kombináljunk!
- **Lehet, hogy lehetetlen, vagy biztos, hogy lehetséges? Mennyire valószínű?**
  Véletlen? Dobókockák, sorsolások, játékok, hibás és hibátlan termékek

3. HATVÁNY, GYÖK, LOGARITMUS

- **Negyedik gyök? Hányados a kitevőben? Mi az értelme?**
- **Exponenciális folyamatok**
  Osztódás, népesedés, vírusok, radioaktivitás
- **Mi áll a kitevőben?**
  Kamatozás, az információ mérése, pH-érték

4. KOORDINÁTAGEOMETRIA

- **Vektorokról régit és újat**
  A súlypont számítható. A munkavégzés a vektorokon múlik.
- **Körök és egyenesek a koordináta-rendszerben**
  A számítógép is érti a geometriát? ☺

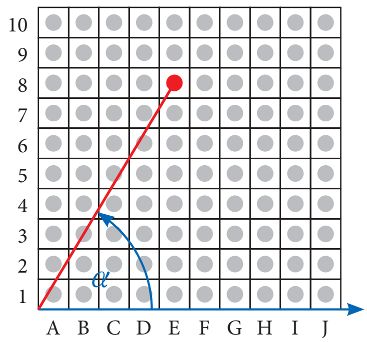
Tartalom

KOORDINÁTAGEOMETRIA

1 Ismételjünk!

BEVEZETŐ

Két fiú, András és Jocó torpedójátékot játszanak:



– E8.

– Talált, süllyedt. Kész, minden hajóm elsüllyedt, nyertél. Játsszunk még egyet!

– Jó, de ez így unalmas. Mi lenne, ha úgy csinálnánk, mint az igazi csatahajókon? Irányokkal és távolságokkal.

– Rendben van! Legyen az ágyú az ábra szerint a rács bal alsó sarkánál, és legyen a 0°-os irány a „keleti".

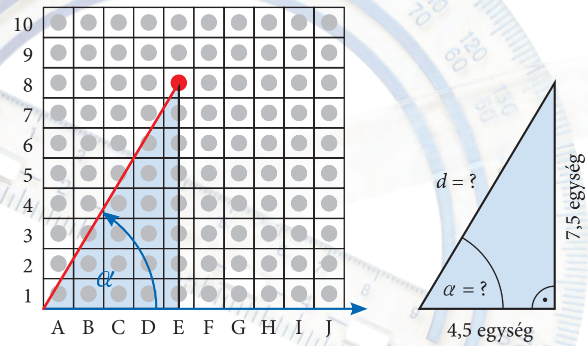
A fiúk a játékot négyzethálós füzetlapon játsszák, a négyzet oldalát használják hosszegységként. Így például az A1-es mező közepét a „$\frac{\sqrt{2}}{2}$ egység; 45° irány" találná el pontosan. Valójában ennél kevésbé pontos célzás is találatot jelenthet. Például a „0,7 egység; 45° irány" is beletalál az A1 mezőbe, a „13,4 egység; 45° irány" viszont már a J10 mezőbe talál.

a) Hány egység távolságra és mekkora α szögben kellene megcélozni az E8-as mező közepét?

b) Melyik mezőre céloz Jocó, amikor a „7 egység; 69°" irányban támad?

Megoldás

a) Az ágyútól az E8 mező közepéhez juthatunk el, ha „keleti" irányban 4,5 egységet, majd „északi" irányban újabb 7,5 egységet lépünk. E két távolságból meghatározhatjuk az α szög tangensét: tg $\alpha = \frac{7,5}{4,5} = \frac{5}{3}$.



Számológép segítségével ebből $\alpha = 59°$-ot kapunk. Az ágyú és az E8 mező közepének d távolságát kiszámíthatjuk például a Pitagorasz-tétellel:

$d = \sqrt{4,5^2 + 7,5^2} = \sqrt{76,5} \approx 8,7$ egység.

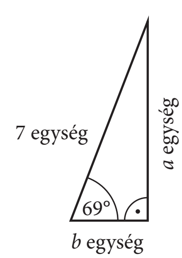
Ugyanezt a távolságot az $\alpha = 59°$ szög szinusza vagy koszinusza használatával is megkaphatjuk.

Például

$\sin 59° = \frac{7,5}{d}$, amiből $d = \frac{7,5}{\sin 59°} \approx 8,7$, vagy

$\cos 59° = \frac{4,5}{d}$, amiből $d = \frac{4,5}{\cos 59°} \approx 8,7$.

b) Használjunk ismét derékszögű háromszöget!



$\cos 69° = \frac{b}{7}$, innen $b = 7 \cdot \cos 69° \approx 2,5$ egység,

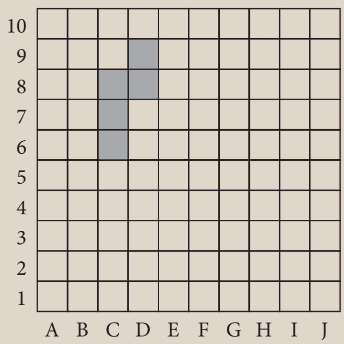
illetve

$\sin 69° = \frac{a}{7}$, amiből $a = 7 \cdot \sin 69° \approx 6,5$ egység.

A keresett mező tehát a C7.

FELADAT

1. **a)** András egy szerencsés lövéssorozattal kilőtte Jocó nagy csatahajóját, amely a C6, C7, C8, D8, D9 mezőkön terpeszkedett. Add meg az öt lövést távolságokkal és szögekkel!



b) Jocó két lövést adott le. Az első lövés a „11,4 egység; 23,2° irány”, a másik lövés a „11 egység; 30° irány” volt. Az egyikkel elsüllyesztette András „egyes” cirkálóját, de a másik lövést elhibázta. Melyik volt a hibás lövés, és melyik mezőn volt a cirkáló?

2. Egy derékszögű koordináta-rendszer origója az O pont, az $(1; 0)$ pontot A-val jelöljük, a P pont koordinátái egész számok. Mik a P pont koordinátái, ha $OP = 5$ egység, és az AOP szög közelítőleg

a) 36,87°-os; **b)** 143,13°-os?

3. Egy derékszögű koordináta-rendszer origója az O pont, az $(1; 0)$ pontot A-val jelöljük. Számítsd ki, hogy milyen messze van a P pont az origótól, ha

a) $P(6; 8)$; **c)** $P(4; 12)$;
b) $P(-6; 8)$; **d)** $P(-4; -12)$!

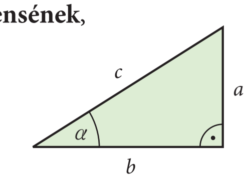
4. Folytasd az előző feladatot! Mekkora szöggel forgassuk el az OA félegyenest O körül az óramutató járásával ellentétes irányban, hogy átmenjen a P ponton?

ELMÉLET

Idézzük fel, amit 10. osztályban tanultunk a szögfüggvényekről!

Ha egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge α, akkor

– a vele szemben lévő befogó és a mellette lévő befogó hosszúságának a hányadosát az α **tangensének**,
– a mellette lévő befogó és a vele szemben lévő befogó hosszúságának a hányadosát az α **kotangensének**,
– a vele szemben lévő befogó és az átfogó hosszúságának a hányadosát az α **szinuszának**,
– a mellette lévő befogó és az átfogó hosszúságának a hányadosát az α **koszinuszának** nevezzük.



Az ábrának megfelelő jelöléssel: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$, $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.

HÁZI FELADAT

1. Használd a bevezető feladat ábráit! Mekkora a piros szakasz, és hány fokos az α, ha

a) Bence az A6, a G6 és a G9 mező közepébe;
b) Jocó a C10, a C5 és a H5 mező közepébe lő?

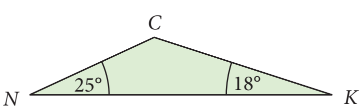
2. Használd a bevezető feladat ábráit! Melyik mezőben robban a torpedó, ha a piros szakasz hossza 3,9 egység, és

a) $\alpha = 10°$; **c)** $\alpha = 30°$; **e)** $\alpha = 70°$;
b) $\alpha = 20°$; **d)** $\alpha = 45°$; **f)** $\alpha = 80°$?

2 Feladatok háromszögekre

BEVEZETŐ

Sík vidéken álló domb tetejére két egyenes ösvény vezet fel, az egyik a keleti, a másik a nyugati oldalon. A nyugati domboldal meredekebb: az ösvény a vízszinteshez képest 25°-os szögben emelkedik, míg a lankásabb keleti oldalon ez a szög csak 18°.



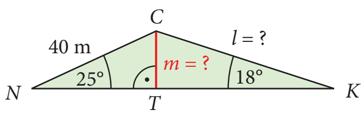
Megmértük a nyugati oldalon található ösvény hosszát a csúcsig: $NC = 40$ méter.

a) Milyen magasan van a dombtető a környező síkság felett, azaz mekkora a C pont távolsága az NK alaptól?

b) Milyen hosszú a keleti oldalon lévő CK lejtő?

Megoldás

A keresett m magasság a domb háromszögét két derékszögű háromszögre bontja.



a) Az NTC derékszögű háromszögről leolvashatjuk, hogy $\sin 25° = \frac{m}{40}$, amiből $m = 40 \cdot \sin 25° \approx 16{,}9$ (méter).
A dombtető tehát kb. 17 méterrel van a környező síkság felett.

b) Hasonló módon, a KTC derékszögű háromszög jelöléseinek megfelelően $\sin 18° = \frac{m}{l}$, ahonnan $l = \frac{m}{\sin 18°} = \frac{16{,}9}{\sin 18°} \approx 54{,}7$ (méter). A keleti lejtőn lévő ösvény tehát közelítőleg 55 méter hosszú.

FELADAT

1. Számítsd ki a bevezető feladatban szereplő NK szakasz hosszát (azaz a domb alapjának szélességét) többféleképpen!

a) Az NT és TK szakaszokat a Pitagorasz-tétellel számíthatod ki, ha már tudod, mekkora az m magasság és az l hosszúság.

b) Az NT és TK szakaszokat tg 25° és tg 18° segítségével számíthatod ki, ha csak az m magasságot ismered.

c) Az NT és TK szakaszokat cos 25° és cos 18° segítségével számíthatod ki, ha ismered a két ösvény hosszát.

2. Egy tengelyesen szimmetrikus trapéz oldalainak hossza 2,4 cm, 3,6 cm, 5,2 cm és 3,6 cm.
Rajzold le ezt a trapézt, majd bontsd fel egy téglalapra és két egybevágó derékszögű háromszögre!

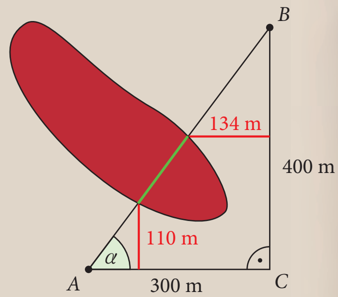
a) Mekkorák egy ilyen háromszög szögei?

b) Mekkorák a trapéz szögei?

c) Mekkorák a trapéz átlói?

d) Mekkora a trapéz területe?

3. Az A és B helyen áthaladó autópálya építésekor alagutat kell fúrni a két hely között fekvő dombba. Megmérték az ábra szerinti távolságokat:
$AC = 300$ méter, $BC = 400$ méter.



Az alagút A-hoz közelebbi vége a tervek szerint az AC egyenestől 110 méternyire, az alagút B-hez közelebbi vége a BC egyenestől 134 méternyire lesz.

a) Mekkora az AB távolság, és mekkora az α szög?

b) Az A-tól mekkora távolságra kell elkezdeni az alagút fúrását?

c) A B-től mekkora távolságra lesz az alagút másik vége?

d) Milyen hosszú lesz az alagút?

(Vedd észre: távolságokat számolhatsz hasonló háromszögekből is!)

HÁZI FELADAT

1. Egy téglalap oldalainak hosszúsága 5,32 dm és 3,81 dm. Rajzold meg a téglalapot, és rajzold be a két átlóját! Határozd meg a keletkezett szögek nagyságát!

2. Egy rombusz átlóinak hossza 5,91 cm, illetve 8,34 cm.

a) Mekkorák a szögei?

b) Mekkorák az oldalai?

c) Mekkora a területe?

3. Egy 22 méter magas házban tűz keletkezett, a lakók egy része a lapos tetőre menekült. A tűzoltók egy 23 m, egy 25 m, egy 28 m és egy 30 m hosszú létrát támasztanak a falhoz úgy, hogy a létrák vége éppen a háztetőig ér, ezeken mentik a bajbajutottakat.

a) Melyik létra áll a legmeredekebben?

b) Melyik létra mekkora szöget alkot a talajjal?

c) Melyik létra mekkora szöget alkot a ház falával?

4. Készítsd el az alábbi táblázatot a füzetedben, és töltsd ki az üres helyeit! A szögeket egész fokra kerekítve, a többi számot két tizedesjegyre kerekítve add meg, ha a pontos értéket nem ismered!

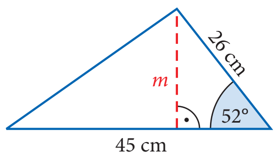
α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
24°				
44°				
44°				
84°				
	0,32			
		0,5		
			2,54	
				1,33

3 A háromszög területe; a tompaszög és a derékszög szinusza

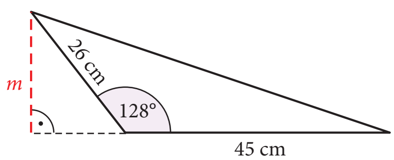
BEVEZETŐ

Mekkora annak a háromszögnek a területe, amelynek két oldala 26 cm, illetve 45 cm, az általuk közbezárt szög pedig

a) 52°;



b) 128°?



Megoldás

a) A 45 cm-es oldalhoz tartozó magasság hossza $m = 26 \cdot \sin 52°$, ezért a háromszög területe:

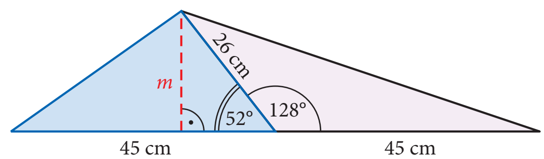
$$T_a = \frac{45 \cdot 26 \cdot \sin 52°}{2} \approx 461 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

b) A tompaszögű háromszögben a 45 cm-es oldalhoz tartozó magasság hossza a háromszöghöz toldott derékszögű háromszögről olvasható le. Itt a magassággal szemben fekvő hegyesszög a 128°-os szög mellékszöge. Ennek a nagysága $180° - 128° = 52°$. Tehát a tompaszögű háromszögnek ez a magassága ugyanakkora, mint az a) feladatbeli háromszögé: $m = 26 \cdot \sin 52°$.
Ezért ennek a tompaszögű háromszögnek a területe ugyanakkora, mint az a) feladatban szereplő hegyesszögű háromszög területe:

$$T_b = T_a = \frac{45 \cdot 26 \cdot \sin 52°}{2} \approx 461 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Megjegyzés

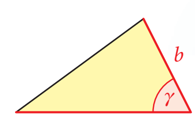
A fenti két háromszög az ábra szerint is elhelyezhető egymás mellett.



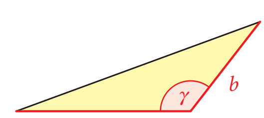
Ebben az elrendezésben sokkal szemléletesebb a két háromszög közötti kapcsolat.

ELMÉLET

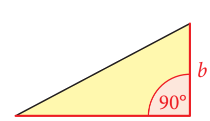
A 10. osztályos tankönyvben megfogalmaztuk:
Ha egy háromszögnek két oldala a, illetve b hosszúságú, és az általuk közrefogott *hegyesszög* γ, akkor e háromszög T területe kiszámítható a $T = \frac{ab \sin \gamma}{2}$ képlettel.



A bevezető feladat meggondolásai alapján most ehhez hozzátehetjük:
Ha egy háromszögnek két oldala a, illetve b hosszúságú, és az általuk közrefogott *tompaszög* γ, akkor e háromszög T területe kiszámítható a $T = \frac{ab \sin(180° - \gamma)}{2}$ képlettel.



Nézzük meg most a derékszögű háromszögeket!
Ha egy háromszögben az a és a b hosszúságú oldal merőleges egymásra, akkor a háromszög területét a $T = \frac{ab}{2}$ képlettel számíthatjuk ki.



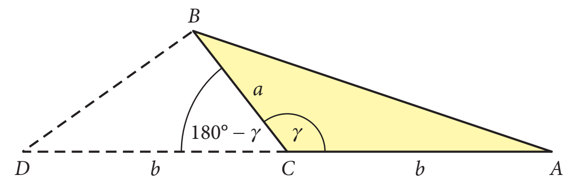
Ezek szerint különböző szögű háromszögekre más-más területképlet vonatkozik?

Emlékezzünk vissza, hogy tizedik osztályban a **hegyesszögek** szinuszát két szakasz hosszának hányadosával értelmeztük.
Értelmezzük úgy a tompaszögek és a derékszög szinuszát, hogy a háromszögeknek – szögeik típusától függetlenül – ugyanolyan területképletük legyen!

Definíció: Egy tompaszög szinusza legyen egyenlő a kiegészítő szögének a szinuszával.
Vagyis ha γ *tompaszög,* akkor $\sin\gamma = \sin(180° - \gamma)$.
A derékszög szinusza legyen 1, vagyis $\sin 90° = 1$.

Ezzel a definícióval elértük, hogy a $T = \frac{ab\sin\gamma}{2}$ képlet minden olyan háromszögre alkalmazható, amelynek két oldala a, illetve b hosszúságegység, és e két oldal által közrefogott szög a γ.

Eszerint az ábránkon látható ABC tompaszögű háromszög területe ugyanakkora, mint a DBC hegyesszögű háromszögé.



KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Melyik hegyesszög szinuszával egyenlő a 100°-os, a 117°-os és a 172°-os szög szinusza? Mennyi sin 100°, sin 117°, sin 172° értéke?

Megoldás
$\sin 100° = \sin 80° \approx 0{,}9848$;
$\sin 117° = \sin 63° \approx 0{,}8910$;
$\sin 172° = \sin 8° \approx 0{,}1392$.

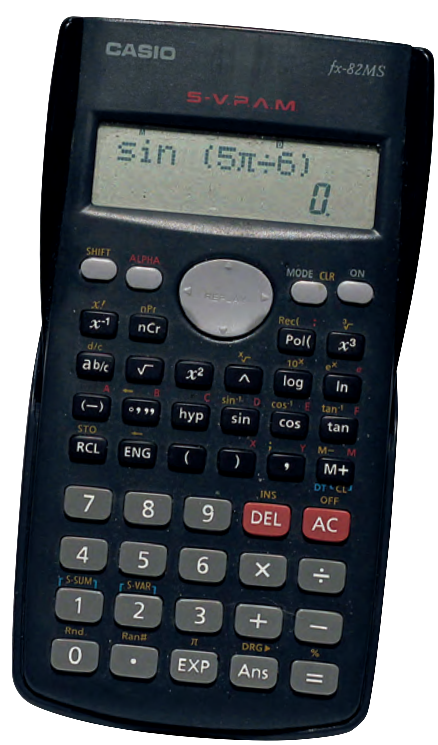
Megjegyzések
– A tompaszögek szinuszát hegyesszögre való visszavezetés nélkül is, közvetlenül megkaphatjuk zsebszámológép segítségével:
$\sin 100° \approx 0{,}9848$; $\sin 117° \approx 0{,}8910$;
$\sin 172° \approx 0{,}1392$.
– A zsebszámológép akkor is „kiad” valamilyen számot, ha 180°-nál nagyobb szöget ütünk be a sin gomb megnyomása után.
Hamarosan szót ejtünk ennek az értelméről is.

2. Melyik hegyesszög szinuszával egyenlő az $\frac{5\pi}{6}$ radián szinusza, és mennyi ez az érték?

Megoldás
Ez a szög tompaszög, mert nagyobb a derékszögnél $\left(\frac{\pi}{2}\text{-nél}\right)$ és kisebb az egyenesszögnél (π-nél). Ezért

$$\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Megjegyzés
A RAD-állásban a zsebszámológépek közvetlenül megadják a $\sin\frac{5\pi}{6}$-ot.



FELADAT

1. **a)** Igaz-e, hogy $\sin 37° = \sin(180° - 37°)$?

b) Legyen α **hegyesszög**! Igaz-e, hogy $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$?

c) Tudjuk, hogy α is és β is nagyobb 0°-nál, és $\alpha + \beta = 180°$. Igaz-e, hogy ekkor $\sin\alpha = \sin\beta$? Indokolj!

2. Készítsd el az alábbi táblázatot a füzetedben, és töltsd ki az üres helyeit!

	1. háromszög	2. háromszög	3. háromszög	4. háromszög	5. háromszög
a	38 cm	19 cm		49 mm	
b	29 cm		17 km	54 mm	8 m
γ	142°	150°	30°		90°
T		80,75 cm^2	80,75 km^2	1323 mm^2	48 m^2

3. Dóri figyelmetlenül válaszolta meg az előző (2.) feladatban a 4. háromszögre vonatkozó kérdést. A megadott oldalhossz ($a = 49$ mm) helyett $a = 94$ mm-rel számolt, és így a következő eredményre jutott:

$$\sin\gamma = \frac{2 \cdot 1323}{94 \cdot 54} \approx 0{,}5213.$$

A számológépe segítségével azt kapta, hogy $\gamma \approx 31{,}4°$. Hiánytalanul oldotta-e meg Dóri a feladatot a megváltoztatott adatokkal? Indokolj!

4. Mekkora a paralelogramma területe, ha

a) oldalainak a hosszúsága 36 mm, illetve 54 mm, a két oldal által bezárt szög pedig 145°;

b) átlóinak a hosszúsága 36 mm, illetve 54 mm, az átlók által bezárt szög pedig 35°?

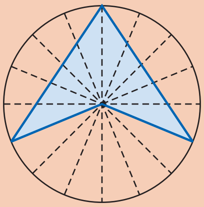
HÁZI FELADAT

1. Egy vitorlás hajó egyik vitorlájának alakja olyan háromszög, amelynek egyik oldala 9 m, egy másik oldala 4,4 méter hosszú, az általuk bezárt szög pedig 93°-os. A vitorla azonban nem lapos, hanem enyhén domború, ezért a vitorlakészítő mester a sík háromszöghöz képest 12%-kal több anyagot használt fel. Hány m^2 anyagra volt szükség a vitorla elkészítéséhez?

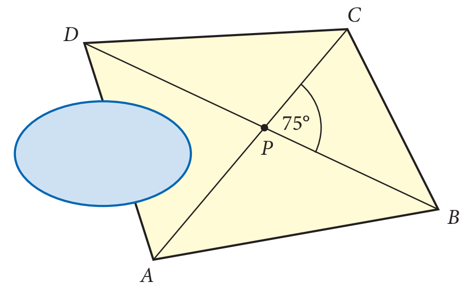
2. **a)** Egy hegyesszögű háromszög két oldala 10 cm, illetve 12 cm, az általuk közrezárt szög 37°. Számítsd ki a háromszög területét!

b) Egy háromszög két oldala 10 cm, illetve 12 cm, a területe 36,1 cm^2. Lehet-e ez a háromszög tompaszögű? Ha igen, számítsd ki egy lehetséges tompaszögének nagyságát!

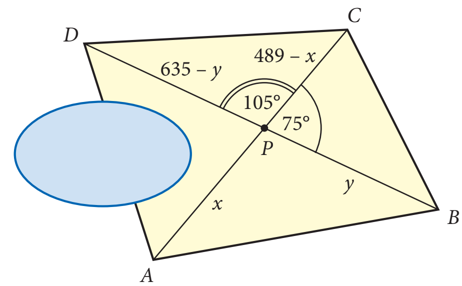
3. Az ábrán látható „nyílhegyet” úgy rajzoltuk meg, hogy egy 4 cm sugarú kört 16 egyenlő részre osztottunk, és néhány osztópontot összekötöttünk egymással, illetve a kör középpontjával. Mekkora a nyílhegy kerülete és területe?



RÁADÁS



Egy négyszög alakú mezőgazdasági területbe egy halastó is „belenyúlik”, ezért nem lehet a négyszög mindegyik oldalát megmérni. A terepviszonyok miatt legkönnyebben a két átló hossza mérhető: $AC = 489$ m, $BD = 635$ m. Könnyen mérhető a két átló szöge is: 75°.
Kiszámítható-e ezekből a mérési adatokból az $ABCD$ négyszög területe?



Megoldás
Minden távolságot méterben mérünk, a területet pedig m^2-ben.
Legyen $AP = x$ és $BP = y$. Ekkor $PC = 489 - x$ és $PD = 635 - y$.

Az APB háromszög területe: $\dfrac{xy\sin 105^\circ}{2} = \dfrac{xy\sin 75^\circ}{2}$,

a BPC háromszög területe: $\dfrac{y(489-x)\sin 75^\circ}{2}$,

a CPD háromszög területe:
$$\frac{(489-x)(635-y)\sin 105^\circ}{2} = \frac{(489-x)(635-y)\sin 75^\circ}{2},$$

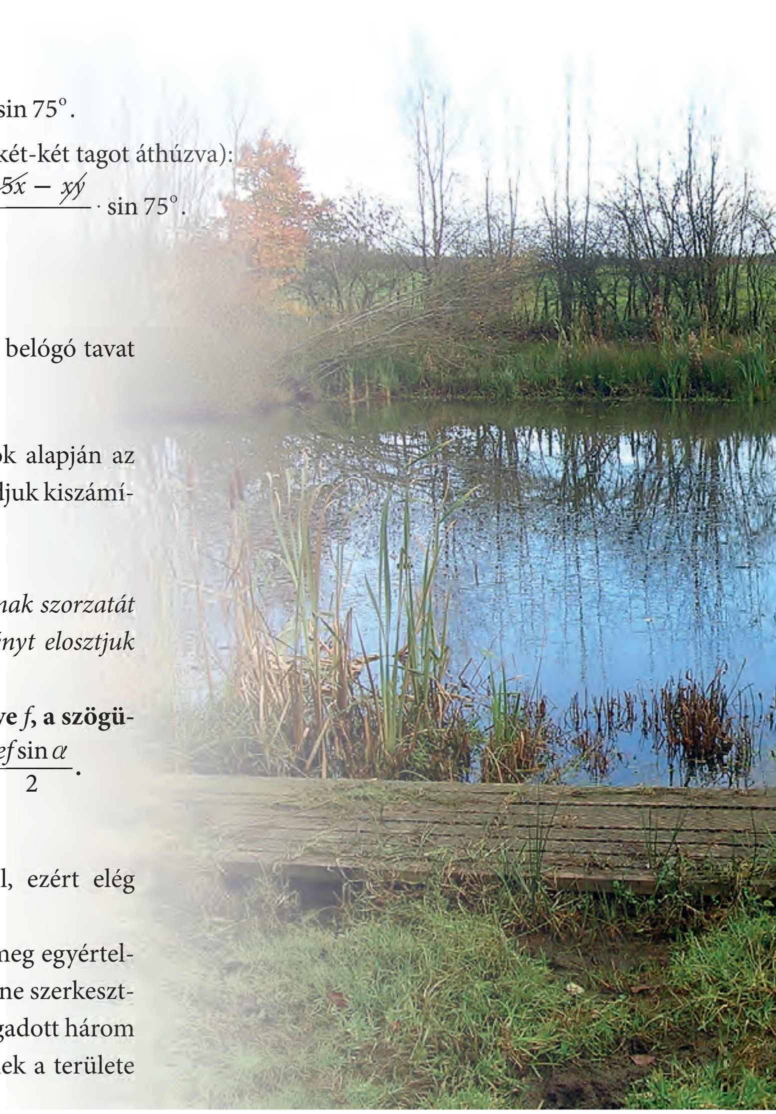
az APD háromszög területe: $\dfrac{(635-y)x\sin 75^\circ}{2}$.

A négyszög területe a négy háromszög területének összege:
$$T = \frac{xy + y(489-x) + (489-x)(635-y) + (635-y)x}{2}\cdot \sin 75^\circ.$$

A tört számlálójában felbontva a zárójeleket (és a 0 összegű két-két tagot áthúzva):
$$T = \frac{\cancel{xy} + \cancel{489y} - \cancel{xy} + 489\cdot 635 - \cancel{635x} - \cancel{489y} + \cancel{xy} + \cancel{635x} - \cancel{xy}}{2}\cdot \sin 75^\circ.$$

Az összevonások után kapjuk:
$$T = \frac{489\cdot 635}{2}\cdot \sin 75^\circ \approx 150\,000\ (m^2).$$

Tehát a mezőgazdasági terület mintegy 15 hektáros lehet (a belógó tavat is számítva).



A feladat megoldásából jól látható, hogy a megmért adatok alapján az átlók által meghatározott négy háromszög egyikének sem tudjuk kiszámítani a területét, de a négyszög területe mégis kiszámítható!
Eredményünk minden konvex négyszögre alkalmazható:
A konvex négyszög területét megkapjuk, ha a két átló hosszának szorzatát megszorozzuk a két átló szögének szinuszával, és az eredményt elosztjuk 2-vel.

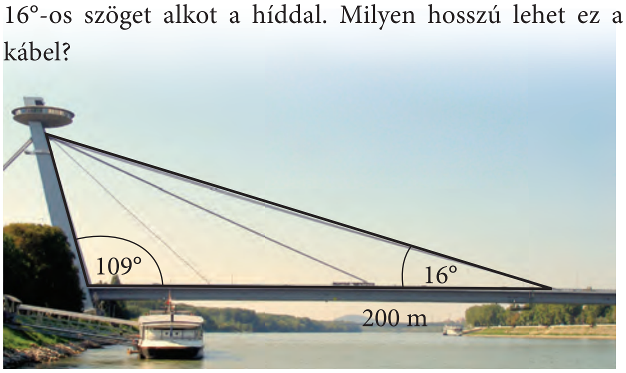
Tétel: Ha egy konvex négyszögben az átlók hosszát e, illetve f, a szögüket pedig α jelöli, akkor a konvex négyszög területe: $T = \dfrac{ef\sin\alpha}{2}$.

Megjegyzések
- Feltűnő a hasonlatosság a háromszög területképletével, ezért elég könnyen megjegyezhető ez az összefüggés.
- Két átlójának és ezek szögének ismerete nem határozza meg egyértelműen a négyszöget, végtelen sok különböző négyszög lenne szerkeszthető ebből a három adatból. Érdekes azonban, hogy a megadott három adat alapján akárhány négyszöget is szerkesztünk, ezeknek a területe kivétel nélkül mind ugyanakkora lesz!

4 A szinusztétel

BEVEZETŐ

Pozsony egyik nevezetessége az Új Híd (Nový Most), amely a világ egyik legnagyobb egypilléres kábelhídja. A pillér kb. 109°-os szögben dől hátra, hogy megtartsa a híd pályatestét. A pillér lábától kb. 200 méterre van a leghosszabb tartókábel rögzítési helye. A kábel kb. 16°-os szöget alkot a híddal. Milyen hosszú lehet ez a kábel?

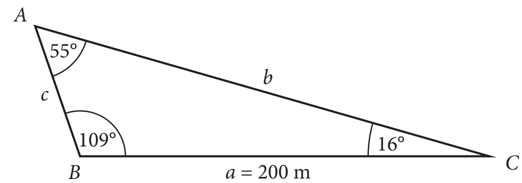


Megoldás

Ismerjük egy háromszög egyik oldalának hosszát (200 m) és a háromszög szögeit (109°, 16° és 55°). Keressük (a jobb felső ábra jelölésével) a b oldal hosszát.

A háromszög területét kétféleképpen is felírjuk:

$T = \dfrac{200 \cdot c \cdot \sin 109^\circ}{2}$, illetve $T = \dfrac{b \cdot c \cdot \sin 55^\circ}{2}$.



Ebből a $\dfrac{b \cdot c \cdot \sin 55^\circ}{2} = \dfrac{200 \cdot c \cdot \sin 109^\circ}{2}$ kétismeretlenes egyenlethez jutunk.

Ha mindkét oldalt megszorozzuk 2-vel, és elosztjuk a pozitív c számmal, akkor már csak egy ismeretlen marad: $b \cdot \sin 55^\circ = 200 \cdot \sin 109^\circ$.

Mindkét oldalt elosztva sin 55°-kal megkapjuk, hogy $b = \dfrac{200 \cdot \sin 109^\circ}{\sin 55^\circ} \approx 231$ (m).

A tartókötél hossza kb. 230 méter lehet.

Megjegyzés

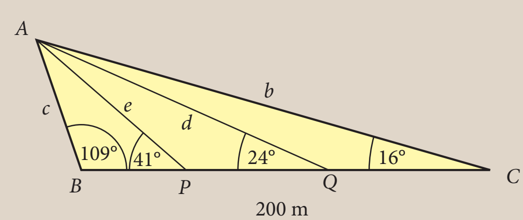
A $b \cdot \sin 55^\circ = 200 \cdot \sin 109^\circ$ egyenletet rendezve a $\dfrac{b}{200} = \dfrac{\sin 109^\circ}{\sin 55^\circ}$ összefüggéshez jutunk.

Azt tapasztaljuk, hogy a háromszög két oldalának hányadosa (aránya) egyenlő a velük szemközti szögek szinuszának hányadosával (arányával).

FELADAT

1. Számítsd ki, milyen hosszú lehet a bevezető feladatban említett Új Híd pillérén a feladat megoldásában c-vel jelölt szakasz!

2. Számítsd ki a bevezető feladatban említett Új Híd másik két tartókötelének (e, d) hosszát, továbbá a BP, PQ és QC távolságokat is!



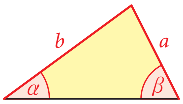
ELMÉLET

Bebizonyítható, hogy a bevezető feladatban tapasztalt összefüggés minden háromszög esetében *igaz*:

Tétel: A háromszög két oldalának az aránya egyenlő a velük szemben lévő szögek szinuszainak az arányával.

Ezt az állítást ***szinusztételnek*** nevezzük.

Az ábra jelöléseivel: $\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$.



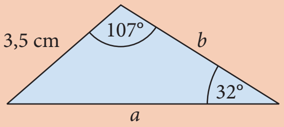
A szinusztételt általában akkor használjuk, ha

– ismerjük egy háromszög két szögét és egy oldalhosszúságát, és egy másik oldal hosszúságát keressük;
– ismerjük egy háromszög két oldalának a hosszúságát és az egyik oldallal szemközti szöget, és a másik oldallal szemközti szöget keressük.

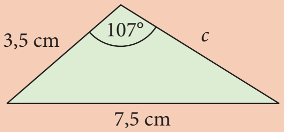
HÁZI FELADAT

1. Számítsd ki a háromszög ismeretlen oldalhosszúságait és szögeit!

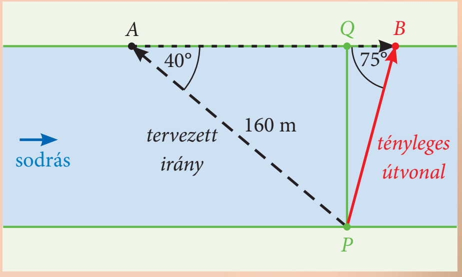
a)



b)

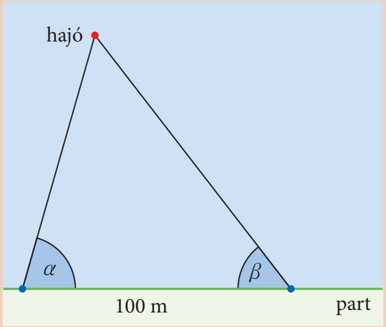


2. Pista evezős csónakkal a folyó melletti P pontból a túlsó partra, a vele szemben lévő Q pontba akart átjutni. Tudta, hogy a víz sodrása miatt nem pont a partra merőlegesen kell eveznie, ezért irányzéknak kinézett egy magas nyárfát a túlsó parton, kissé feljebb (a rajzon a fát az A pont jelöli). A sodrás azonban a vártnál erősebbnek bizonyult, így végül sokkal lejjebb, a B pontban tudott csak kikötni.



a) Mekkora utat tett meg a csónak?
b) Milyen széles a folyó?

3. A 10. osztályos tankönyvben kicsinyítéssel, szerkesztéssel és méréssel oldottuk meg a következő feladatot:



Egy hajó bent áll a tengeren. Három osztálytárs ki akarja számítani, hány méterre van a hajó a parttól. Kijelölnek a parton egy 100 méteres szakaszt. Mérésük szerint $\alpha \approx 74°$ és $\beta \approx 52°$. Mekkora a hajó és a part távolsága?

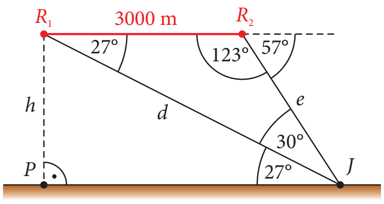
Most oldd meg ezt a feladatot számításokkal!

a) Mekkora a háromszög harmadik szöge?
b) Mekkora a háromszögnek az α-val szemközti oldala?
c) Mekkora a hajó és a part távolsága?

5 Alkalmazások

BEVEZETŐ

Egy repülőgép vízszintes sík terep felett repül állandó magasságban. A gép a repülőtér közelében telepített földi jeladó műszert egy adott pillanatban 27°-os depressziószög (lehajlási szög) alatt „látja”, újabb 3000 m repülés után pedig 57°-os depressziószög alatt. A két észlelés között a gép nem repült át a jeladó felett, továbbá a repülőgép és a jeladó mindvégig ugyanabban a függőleges síkban volt.



a) Mekkora távolságra volt a repülőgép a jeladó toronytól az első, illetve a második alkalommal?

b) Mekkora magasságban repült a gép?

A repülőgép modern fedélzeti műszerei a távolságokat és szögeket igen pontosan mérik, ezért a távolságokat tíz méterre kerekítve adjuk meg!

Megoldás

Használjuk a bal oldali ábra jelöléseit!

a) Az R_1R_2J háromszögben szinusztétellel dolgozhatunk.

$\frac{d}{3000} = \frac{\sin 123°}{\sin 30°}$, amiből

$d = 3000 \cdot \frac{\sin 123°}{\sin 30°} \approx 5030$ (m).

$\frac{e}{3000} = \frac{\sin 27°}{\sin 30°}$, amiből

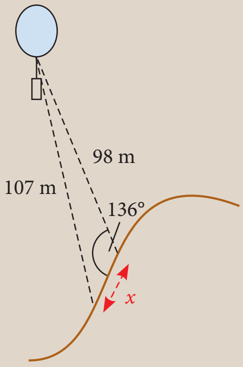
$e = 3000 \cdot \frac{\sin 27°}{\sin 30°} \approx 2720$ (m).

b) A h repülési magasságot az R_1PJ derékszögű háromszögből célszerű kiszámítani, felhasználva, hogy a J-nél fekvő hegyesszög 27°-os (váltószöge az R_1-nél fekvő 27°-os szögnek).

$h = d \cdot \sin 27° \approx 5030 \cdot \sin 27° \approx 2280$ (m).

FELADAT

1. Az ábrán látható meteorológiai léggömböt egy 98 és egy 107 méteres drótkötél rögzíti a domboldalhoz. A rövidebbik kábel a domboldallal 136°-os szöget zár be. Mekkora a két rögzítési pont között mért x távolság?



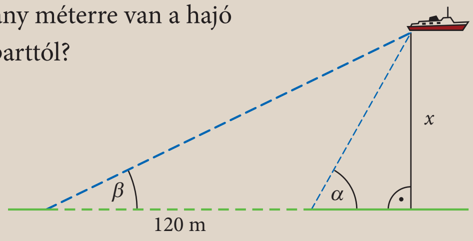
2. Tizedik osztályban derékszögű háromszögek segítségével oldottuk meg a következő feladatot:

Egy hajó bent áll a tengeren. Jocó a barátaival komoly mérésre készül: ki akarják számítani, hány méterre van a hajó a parttól (x).

A parton kimért 120 m-es távolság két végén megmérik az α és a β szöget. Azt kapják, hogy $\alpha \approx 73°$ és $\beta \approx 52°$.

a) Számítsd ki a szaggatottan rajzolt háromszög két ismeretlen oldalát!

b) Hány méterre van a hajó a parttól?



KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy háromszögben a szokásos jelölésekkel $a = 4{,}5$ cm, $b = 6$ cm és az a oldallal szemben lévő szög: $\alpha = 45°$.
Lehetséges-e, hogy ez a háromszög

a) hegyesszögű?

b) tompaszögű?

Ha a válasz igen, akkor adjuk meg a háromszög szögeit!

Megoldás

Azt tudjuk, hogy ha van megfelelő háromszög, akkor abban a 6 cm-es oldallal szemben lévő szögnek 45°-nál nagyobbnak kell lennie. Az azonban egyáltalán nem biztos, hogy van a megadott adatokhoz megfelelő háromszög.

a) Ha van megfelelő háromszög, akkor abban a b oldallal szemben fekvő β szögre a szinusztétel miatt fennáll, hogy $\frac{\sin\beta}{\sin 45°} = \frac{6}{4{,}5}$.

Ebből $\sin\beta = \frac{6 \cdot \sin 45°}{4{,}5} \approx 0{,}9428$.

Van olyan hegyesszög, amelynek ennyi a szinusza. Ez a szög közelítőleg 70,53°-os.
Ha $\beta \approx 70{,}53°$, akkor a háromszög harmadik szöge:

$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) \approx 64{,}47°$.

Tehát van megfelelő hegyesszögű háromszög.

b) Ha van megfelelő háromszög, akkor a szinusztétel szerint mindenképpen igaz, hogy $\sin\beta \approx 0{,}9428$, ám ebből nem következik, hogy a β szög csak hegyesszög lehet. A 22. leckében tanultuk, hogy ha β tompaszög, akkor a szinusza megegyezik a $180° - \beta$ hegyesszög szinuszával. Az a) részben láttuk, hogy ez a hegyesszög közelítőleg 70,53°-os, ezért $180° - \beta \approx 70{,}53°$, amiből azt kapjuk, hogy

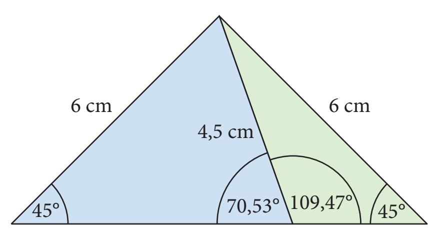
$\beta \approx 180° - 70{,}53° = 109{,}47°$.

Ha $\beta = 109{,}47°$, akkor a háromszög harmadik szöge: $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) \approx 25{,}53°$.

Tehát van megfelelő tompaszögű háromszög is.

Megfigyelés

Két lényegesen különböző (nem egybevágó) háromszög is van, amelynek oldalai 4,5 cm, illetve 6 cm, és a kisebb oldallal szemben lévő szög 45°-os. Az ábrán egymás mellé illesztettük ezt a két háromszöget.



FELADAT

3. Van-e olyan háromszög, amelyben a szokásos jelölésekkel

a) $a = 6$ cm, $b = 4{,}5$ cm és $\alpha = 45°$;

b) $a = 5$ cm, $b = 10$ cm és $\alpha = 30°$;

c) $a = 6$ cm, $b = 7{,}5$ cm és $\alpha = 65°$;

d) $a = 6$ cm, $b = 7{,}5$ cm és $\alpha = 30°$?

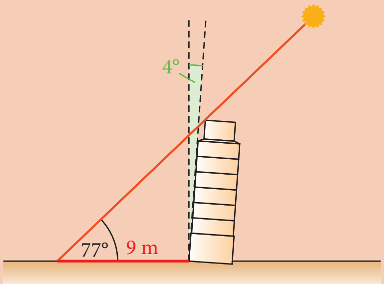
Ha van megfelelő háromszög, akkor hány ilyen háromszög van, és mekkorák a szögei?

HÁZI FELADAT

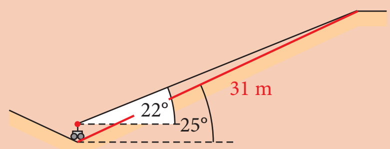
1. A következő táblázat három háromszög oldalaira és szögeire vonatkozik. Készítsd el az alábbi táblázatot a füzetedben, és töltsd ki az üres helyeit! Vedd figyelembe az összes lehetséges háromszöget!

	a	b	c	α	β	γ
1. háromszög	11 cm			59°	37°	
2. háromszög	6 cm	13 cm			48°	
3. háromszög		15 cm	9 cm			26°

2. A 2001-ben befejeződött stabilizációs program óta a pisai ferde torony a függőlegeshez képest közelítőleg 4°-kal dől, majdnem pontosan déli irányba. Milyen magas lenne „kiegyenesítve" a torony? Amint az ábra is mutatja, a torony dél felől tűző, 77°-os emelkedési szögű napsugarak esetén 9 méter hosszú árnyékot vet.



3. Hajni egy álhírrel „ugratta" Bencét: „A *Kuksi–1*, az első magyar Mars-szonda véletlenül éppen egy kráter fenekén landolt. A szonda radarjának mérései alapján a kráter lejtője 31 méter hosszú, és a marsbeli vízszinteshez képest 25°-os szögben emelkedik. A szonda ezután felemelte a radart, hogy újra bemérje a kráter peremét. A radarsugár vízszintessel bezárt szöge ezúttal már csak 22° volt. Milyen távolságra volt ekkor a radar a kráter aljától?"

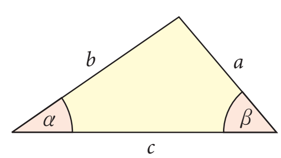


Oldd meg te is Hajni feladatát!

EMELT SZINT

I. Bizonyítsuk be a szinusztételt!

A szinusztétel egy háromszög két oldala és a velük szemközti szögek szinusza közötti kapcsolatot mutatja be.

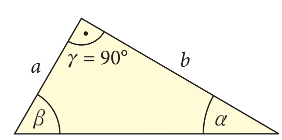


Használjuk az ábra jelöléseit! Írjuk fel kétféleképpen a vizsgált háromszög területét:
$\frac{ac\sin\beta}{2} = \frac{bc\sin\alpha}{2}$.

Ha az egyenlet mindkét oldalán lévő kifejezést megszorozzuk 2-vel, utána pedig elosztjuk $(bc\sin\beta)$-val, akkor azt kapjuk, hogy $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

A felhasznált területképlet hegyesszög, derékszög és tompaszög esetén is fennáll, ezért a szinusztétel igaz, ha a szereplő két szög hegyesszög, de akkor is, ha egyikük derékszög vagy tompaszög.

Derékszögű háromszög esetén nem célszerű a szinusztétel használata. Miért?



Figyeljünk meg néhány esetet az ábra jelöléseit használva!

1. eset: $\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin 90^\circ}$. Tudjuk, hogy $\sin 90° = 1$, ezért $\frac{a}{c} = \sin\alpha$. Ez igaz, de ezt már korábban is tudtuk és használtuk is!

2. eset: $\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin 90^\circ}$. Tudjuk, hogy $\sin 90° = 1$, ezért $\frac{b}{c} = \sin\beta$. Ezt is tudtuk már.

3. eset: $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin(90^\circ - \alpha)}$. Tanultuk, hogy $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$, tehát $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$, amit szintén ismertünk már a derékszögű háromszögek esetén.

II. Háromszögek szerkeszthetősége és a szinusztétel

Legyen adott – a szokásos jelölésekkel – a háromszög a oldala, b oldala, valamint a β szög ($0° < \beta < 180°$).

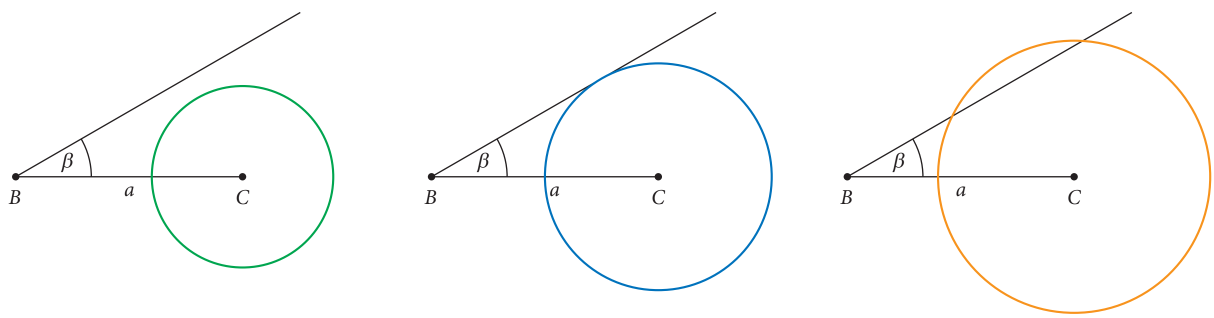
a) Vizsgáljuk meg, hogy milyen adatok mellett van olyan ABC háromszög, amely ezekből az adatokból szerkeszthető!

Legyen az 1. esetben $a = 10$ cm; $\beta = 30°$ és $b_1 = 4$ cm;
a 2. esetben $a = 10$ cm; $\beta = 30°$ és $b_2 = 5$ cm;
a 3. esetben $a = 10$ cm; $\beta = 30°$ és $b_3 = 6$ cm.

A szerkesztés menete:

– Vegyük fel az a szakaszt, melynek végpontjai B, illetve C pontok!
– Szerkesszük meg a B csúcsban a β szöget, melynek egyik szögszára BC!
– Szerkesszük meg a C középpontú, b sugarú kört!
– Határozzuk meg a kapott körív, valamint a β szög BC szárától különböző szárának metszéspontját!

A b_1 esetén nem jön létre metszéspont, azaz nincs a feltételeknek megfelelő háromszög.
A b_2 esetén egy metszéspont adódik, azaz egyetlen olyan háromszög létezik, mely az adatokkal megszerkeszthető (ez a háromszög derékszögű, mivel egyik oldalegyenese egy kör érintője, másik oldalegyenese az érintési pontba húzott sugár).
A b_3 esetén két metszéspont jön létre, azaz az adatok két, nem egybevágó háromszöget határoznak meg.



b) Határozzuk meg számítással a fenti adatok mellett a háromszög ismeretlen szögeinek, illetve oldalainak hosszát!
Az 1. esetben $a = 10$ cm; $\beta = 30°$ és $b_1 = 4$ cm.
A 2. esetben $a = 10$ cm; $\beta = 30°$ és $b_2 = 5$ cm.
A 3. esetben $a = 10$ cm; $\beta = 30°$ és $b_3 = 6$ cm.

A szinusztétel értelmében

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = \frac{a}{b_1}, \qquad \frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2} = \frac{a}{b_2}, \qquad \frac{\sin\alpha_3}{\sin\beta_3} = \frac{a}{b_3},$$

melyekből átrendezéssel következik, hogy

$$\sin\alpha_1 = \frac{a\sin\beta_1}{b_1}, \qquad \sin\alpha_2 = \frac{a\sin\beta_2}{b_2}, \qquad \sin\alpha_3 = \frac{a\sin\beta_3}{b_3}.$$

Az adatok helyettesítésével arra jutunk, hogy

$$\sin\alpha_1 = \frac{5}{4}, \qquad \sin\alpha_2 = 1, \qquad \sin\alpha_3 = \frac{5}{6}.$$

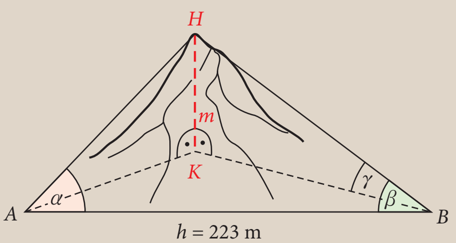
Ezekből következik, hogy
– nem létezik ilyen α_1 szög, azaz nincs az 1. esetbelinek megfelelő háromszög;
– $\alpha_2 = 90°$, azaz a 2. esetbeli adatokkal egy háromszög rendelkezik;
– a harmadik esetben $\alpha_3 \approx 56{,}44°$ vagy $\alpha_3 \approx 123{,}56°$, azaz ilyen adatokkal két egymástól különböző háromszög is létrejön.

A háromszögek további ismeretlen szögei, oldalai kiszámíthatók a szinusztétellel.

6 Milyen magas a hegy és a torony?

FELADAT

1. A tizenegyedikesek osztálykirándulásra mennek. Az osztályfőnökük tanítja a matematikát, ezért a kirándulást terepmérésekre is felhasználják. Egy nagy (vízszintes, sík) rétre érkeznek, ahonnan már nincs messze a hegycsúcs, amelyet meg akarnak „hódítani”. A tanulóknak mérésekkel kell megállapítaniuk, hogy még mekkora szintkülönbséget kell legyőzniük.



Több mérés átlagolásával azt kapják, hogy az AB szakasz h hosszúsága 223 méter, az ABH háromszög két szöge: $\alpha = 74°$, illetve $\beta = 51°$, a BKH háromszög B-nél lévő szöge: $\gamma = 11°$.
A szintkülönbséget m-mel jelölik.

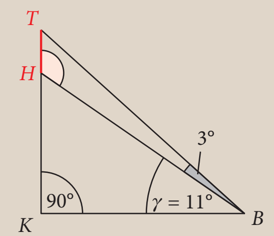
a) Karcsi szerint ha a BH hosszát kiszámítják, akkor a BKH háromszögből már az m is kiszámítható. Igaza van-e Karcsinak? Ha igaza van, melyik szög melyik szögfüggvényét kell alkalmazni a számolásban? Ha nincs igaza, miért nincs?

b) Tünde azt mondja, hogy mivel most a szinusztételt tanulják, biztosan ezzel lehet meghatározni a BH hosszúságot, mégpedig az ABH háromszögből, amelynek ismerik a 223 méteres oldalát. Ha Tünde jól számol, mit kap eredményül a BH szakasz hosszára?

c) Milyen magasan van a hegycsúcs a rét felett?

2. Mekkora szögben látszik a hegy az A pontból? (Készíts gondolatmenetet a megoldáshoz!)

3. Milyen magas a hegy tetején álló kilátó?
Az ábrán TH jelöli a kilátó magasságát. Karcsi szerint a válaszhoz elég a TBH szöget megmérni. Szerinte ugyanis „nyilvánvaló”, hogy a TBH háromszög tompaszöge $(90° + \gamma)$-val egyenlő, és ezekből az adatokból a szinusztétellel meghatározható a torony magassága.



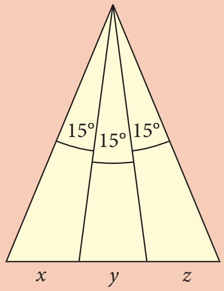
a) Indokold, hogy ez a tompaszög $(90° + \gamma)$-val egyenlő!

b) Készíts gondolatmenetet arról, hogy milyen lépésekre van szükség a torony magasságának kiszámításához! Gondolatmeneted alapján számítsd ki a torony magasságát, ha a TBH szög 3°-os!

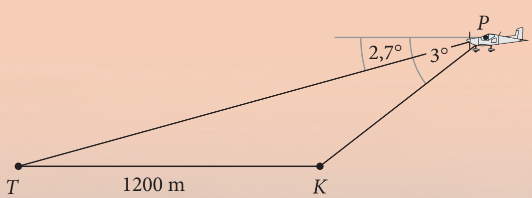
c) Tündének nem volt kedve a szinusztétellel számolni. Egyszerűen a TBK és a HBK derékszögű háromszöggel számolt, a tangens szögfüggvényt alkalmazta. Számolj utána, melyik módszerrel lehet kevesebb lépésben megkapni a torony magasságát!

HÁZI FELADAT

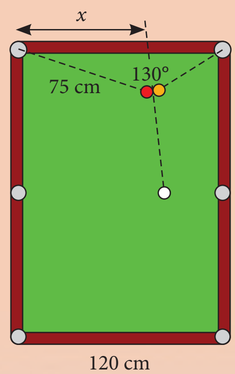
1. Tizedik osztályban szerepelt a következő házi feladat: Egy egyenlő szárú háromszög szárszögét 3 darab 15°-os szögre bontjuk. A szögszárak x, y és z részre osztják a 120 m-es alapot. Mekkora az x, az y és a z hosszúságú szakasz? Oldd meg ezt a feladatot derékszögű háromszögekkel is, és a szinusztétel felhasználásával is! Melyik módszer egyszerűbb?



2. Egy leszálláshoz készülődő sportrepülőgép pilótája már beállt a leszállópálya irányába. Az 1200 méter hosszú pálya közelebbi végét 3°-os depressziószög alatt látja, a távolabbit 2,7°-os szög alatt. Milyen magasan repül ez a repülőgép?



3. Egy biliárdasztal egyik sarokzsebétől 75 cm távolságra egymás mellett áll két egyforma golyó. Úgy szeretnénk meglökni őket egy harmadikkal, hogy a két golyó 130°-os szögben szétszaladva pontosan a 120 cm-es oldalú asztal két szomszédos sarokzsebébe guruljon. Tudjuk, hogy ilyen lökéshez a harmadik golyót a 130°-os szög felezőjének irányában kell megcélozni. Mekkora legyen a rajzon x-szel jelölt távolság, hogy sikerüljön a mutatvány?



7 A tompaszög és a derékszög koszinusza

BEVEZETŐ

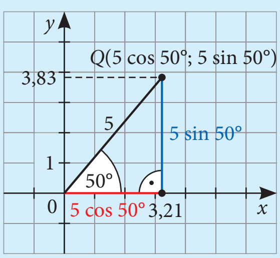
A hegyesszögek mindegyikének van szinusza és koszinusza is, és már értelmeztük a derékszög és a tompaszög szinuszát is. A következőkben megmutatjuk, hogy **a tompaszög és a derékszög koszinusza is értelmezhető** úgy, hogy illeszkedjen az eddig tanultak sorába.

Módosítsuk az 1. leckében bemutatott torpedójátékot úgy, hogy az „ágyú" a koordináta-rendszer origójában legyen, és az irányzásnál lehessen hegyesszögeket, derékszöget és tompaszöget is megadni. Az ágyúval ezúttal a koordináta-rendszer síkjának pontjaira „célzunk". Melyik pontot vettük célba, ha a távolság 5 egység, az irányszög pedig

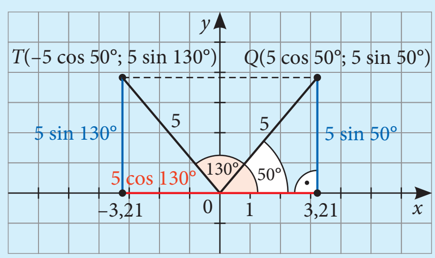
a) 50°; **b)** 130°; **c)** 90°?

Megoldás

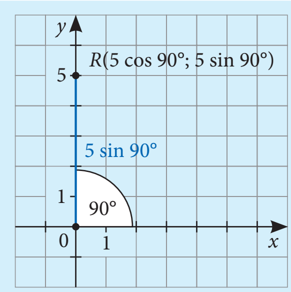
a) A $Q(5 \cdot \cos 50°; 5 \cdot \sin 50°)$ pontot céloztuk meg. A koordináták közelítő értékével: $Q(3{,}214; 3{,}830)$.



b) A megcélzott T pont a Q pontnak az y tengelyre vonatkozó tükörképe, ezért $T(-5 \cdot \cos 50°; 5 \cdot \sin 50°)$.
Mivel $\sin 130° = \sin 50°$, ezért ezt is írhatjuk:
$T(-5 \cdot \cos 50°; 5 \cdot \sin 130°)$.



c) Az $R(0; 5)$ pontot vettük célba. Az 5 helyett írhatjuk, hogy $5 \cdot \sin 90°$, hiszen $\sin 90° = 1$ és a $\cos 90° = 0$. Tehát $R(5 \cdot 0; 5 \cdot \sin 90°) = R(0; 5)$.



Megfigyelések

- A Q pont esetében az α hegyesszög volt. A pont koordinátáit így tudtuk felírni: $(5 \cdot \cos \alpha; 5 \cdot \sin \alpha)$.
- A T pont esetében az α tompaszög volt. E pont koordinátáit így tudtuk felírni: $\left(-5 \cdot \cos (180° - 130°); 5 \cdot \sin 130°\right)$.
- Az R pont esetén derékszög szerepel. Az R pont koordinátáit így tudtuk felírni: $(5 \cdot 0; 5 \cdot \sin 90°)$.
- Vegyük észre, hogy ha $\cos 150° = -\cos 30°$, $\cos 130° = -\cos 50°$ és $\cos 90° = 0$, akkor a torpedójáték „ágyúja" által megcélzott pontokat így adhatjuk meg: $T(5 \cdot \cos 130°; 5 \cdot \sin 130°)$, $R(5 \cdot \cos 90°; 5 \cdot \sin 90°)$.
- Vegyük észre, hogy ha minden α tompaszög esetén $\cos \alpha = -\cos (180° - \alpha)$ és $\cos 90° = 0$, akkor minden esetben így írhatjuk fel az origótól 5 egység távolságban lévő, megcélzott pont koordinátáit: $(5 \cdot \cos \alpha; 5 \cdot \sin \alpha)$.

ELMÉLET

Értelmezzük a tompaszögek és a derékszög koszinuszát!

Definíció: Ha α tompaszög, akkor legyen $\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$, a derékszög koszinusza pedig legyen 0, azaz $\cos 90° = 0$.

Következmények

1. Minden hegyesszög koszinusza pozitív, a derékszög koszinusza 0, minden tompaszög koszinusza negatív.
2. Ha α egy háromszög egyik szöge, akkor $-1 < \cos\alpha < 1$ és $0 < \sin\alpha \leq 1$.
3. Ha α egy háromszög egyik szöge, akkor $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (függetlenül attól, hogy α hegyesszög, derékszög vagy tompaszög).

FELADAT

1. **a)** Készítsd el az alábbi táblázatot a füzetedben, és töltsd ki az üres helyeit a számológéped segítségével!

α	92°	102°	112°	122°	132°	142°	152°	162°	172°
$\sin\alpha$									
$\cos\alpha$									

b) Számold ki néhány esetben, hogy mennyi a $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ összeg értéke!

2. **a)** Egy háromszög két szögének koszinusza 0,5 és 0. Mekkora a harmadik szögének a koszinusza és a szinusza?

b) Egy háromszög két szögének koszinusza $\frac{\sqrt{3}}{2}$ és $-0{,}5$. Mekkora a harmadik szögének a koszinusza és a szinusza?

3. Mennyi lehet $\cos\alpha$, ha $\sin\alpha$ értéke

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **b)** 0,7355?

4. **a)** Igaz-e, hogy $\cos 32° = -\cos(180° - 32°)$?

b) Igaz-e, hogy minden α hegyesszög esetén $\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$? Indokolj!

c) Igaz-e, hogy ha α egy háromszög egyik szöge, akkor $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$? Indokolj!

HÁZI FELADAT

1. A számológép szerint hány fokos szög az α, ha a koszinusza

a) 0,7924; **b)** –0,5; **c)** 0,5; **d)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; **e)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$?

2. Egy paralelogramma egyik szögének a koszinusza –0,591. Mekkora a többi szögének a szinusza és a koszinusza?

3. Egy egyenlő szárú háromszögben

a) az egyik szög koszinusza –0,777;

b) az egyik szög koszinusza 0,726;

c) az egyik szög szinusza 0,428.

Mekkora lehet a többi szög szinusza és koszinusza?

4. Mennyi lehet $\cos\alpha$, ha $\sin\alpha$ értéke

a) 0,5; **b)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$; **c)** 0,472?

8 Tájékozódás a koordináta-rendszerben

BEVEZETŐ

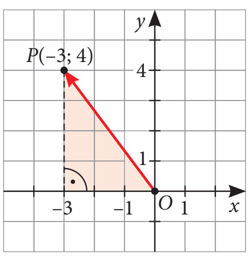
Mekkora annak a vektornak a hossza, amely az origóból indul, és a végpontja

a) $P(-3; 4)$; **b)** $Q(6\cos 60°; 8\cos 120°)$?

Megoldás

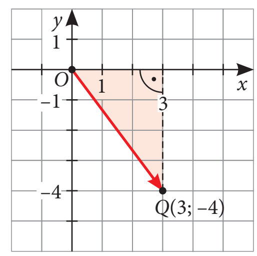
Mindkét esetben számolhatunk Pitagorasz-tétellel.

a) A rózsaszín derékszögű háromszögről leolvassuk, hogy
$OP = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$,
vagyis az $\overrightarrow{OP}$ hossza 5 egység.



Észrevehetjük, hogy az OP szakasz hossza a P két koordinátájával is kifejezhető:
$OP = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$.

b) Mivel $\cos 60° = 0{,}5$ és $\cos 120° = -\cos 60° = -0{,}5$, ezért $Q(3; -4)$.



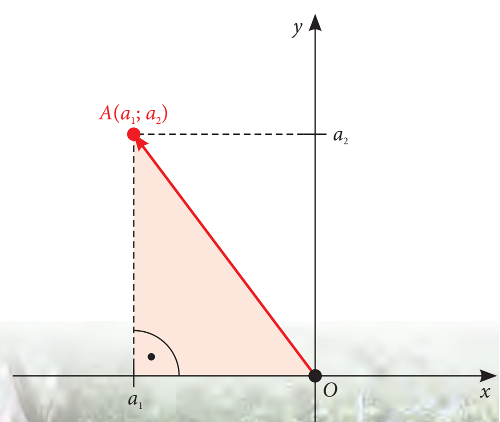
Az ábra derékszögű háromszögéről leolvassuk, hogy $OQ = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, vagyis az $\overrightarrow{OQ}$ hossza 5 egység.
Észrevehetjük, hogy az OQ szakasz hossza a Q két koordinátájával is kifejezhető:
$OQ = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$.

ELMÉLET

Általánosan is igaz, amit a bevezető feladatban megfigyeltünk:
Ha O egy koordináta-rendszer kezdőpontja, $A(a_1; a_2)$ pedig a sík egy pontja, akkor az OA szakasz hossza így is kiszámítható:
$OA = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}$.

(Felhasználtuk, hogy $(|a_1|)^2 = a_1^2$.)

Ez a szám természetesen megadja az $\overrightarrow{OA}$ hosszát is.
Az ábránkon A a II. síknegyedben van, de a számítási módszer a sík bármely pontjára érvényes.



KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Milyen hosszú az $\overrightarrow{OR}$, ha O a koordináta-rendszer kezdőpontja és $R(5\cos 118°;\ 5\sin 118°)$?

Megoldás

Használjuk fel a most szerzett elméleti ismeretünket!

$OR = \sqrt{(5\cos 118°)^2 + (5\sin 118°)^2}$.

Megtehetnénk, hogy kiszámítjuk az R pont két koordinátájának a közelítő értékét, de erre most nincs szükség. Ugyanis $(5\cos 118°)^2 + (5\sin 118°)^2 =$
$= 25 \cdot (\cos^2 118° + \sin^2 118°) = 25$,
mert $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, ha α hegyes-, derék- vagy tompaszög (lásd 26. lecke). Tehát

$OR = \sqrt{(5\cos 118°)^2 + (5\sin 118°)^2} = \sqrt{25} = 5$.

Tehát az $\overrightarrow{OR}$ hossza 5 egység.

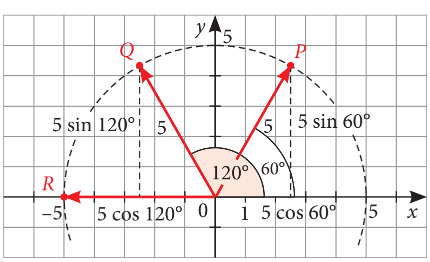
2. Melyik pontba mutat az az origó kezdőpontú vektor, amelynek hossza 5 egység, és amely az origóból az x tengely (5; 0) pontjába mutató vektornak pozitív irányú

a) 60°-os; **b)** 120°-os; **c)** 180°-os

elforgatottja?

Megoldás

A három vektor végpontja egy origó középpontú, 5 egység sugarú körön van, tehát ennek a körnek három pontjáról van szó. Az ábra alapján válaszolhatunk:



a) $P(5 \cdot \cos 60°;\ 5 \cdot \sin 60°) = P\left(\frac{5}{2};\ \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$;

b) A Q pont a P tükörképe az y tengelyre nézve. Vegyük figyelembe, hogy $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, illetve $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, ezért
$Q(-5 \cdot \cos 60°;\ 5 \cdot \sin 60°) =$
$= Q(5 \cdot \cos 120°;\ 5 \cdot \sin 120°) = Q\left(-\frac{5}{2};\ \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$;

c) $R(-5;\ 0)$.

Megjegyzés

Azt is szoktuk mondani, hogy az $\overrightarrow{OP}$ *irányszöge* 60°, az $\overrightarrow{OQ}$ *irányszöge* 120°, az $\overrightarrow{OR}$ *irányszöge* 180°. Az $\overrightarrow{OP}$ és az $\overrightarrow{OQ}$ vektor végpontjának koordinátáiban a vektor *irányszögének* koszinusza és szinusza szerepel.

3. Végezzünk 1 : 5 arányú kicsinyítést a 2. kidolgozott feladat ábráján! Jelöljük a P képét P'-vel és a Q képét Q'-vel. Mik a P' és a Q' koordinátái?

Megoldás

A P' koordinátái ötödakkorák, mint a P koordinátái: cos 60° és sin 60°, vagyis $P'\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. A Q' koordinátái ötödakkorák, mint a Q koordinátái: cos 120° és sin 120°, vagyis $Q'\left(-\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Következtetés

Számításunk azt mutatja, hogy az origóból a P' és a Q' pontba mutató egységvektorok első, illetve második koordinátája éppen a vektorok irányszögének a koszinusza, illetve szinusza. Másképp fogalmazva: ha a koordináta-rendszer x tengelyének (1; 0) pontját 60°-kal elforgatjuk az origó körül pozitív irányba, akkor a (cos 60°; sin 60°) pontot kapjuk, ha pedig 120° az elforgatás szöge, akkor a (cos 120°; sin 120°) pontba jutunk.

FELADAT

1. Melyik síknegyedben és az origótól mekkora távolságra vannak a megadott pontok?

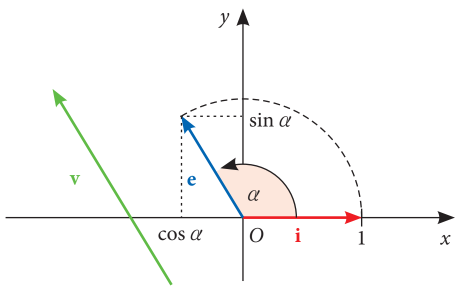
a) $P(-3\cos 40°;\ 3\sin 40°)$

b) $Q(-3\cos 40°;\ -3\sin 40°)$

c) $R(-3\cos 140°;\ -3\sin 140°)$

d) $S(\cos 140°;\ \sin 140°)$

ELMÉLET



Jelöljük **i**-vel egy koordináta-rendszerben az origóból az (1; 0) pontba mutató egységvektort, továbbá legyen adott egy **e** egységvektor.

– Ha az **i**-t α szöggel elforgatva az adott **e** egységvektort kapjuk, akkor azt mondjuk, hogy α *irányszöge* az **e** egységvektornak.
– Tetszőleges **v** irányszögének nevezzük a vele egyirányú **e** egységvektor irányszögeit.

A 3. kidolgozott feladat következtetése így általánosítható: ha α hegyesszög, derékszög vagy tompaszög, és a koordináta-rendszer x tengelyének (1; 0) pontját α szöggel elforgatjuk az origó körül pozitív irányba, akkor a ($\cos\alpha$, $\sin\alpha$) pontot kapjuk.

Megjegyzések

– Az **i**-nek irányszöge a 0°, de irányszöge a 360°, a 720° vagy éppen a −720° is.
– Minden vektornak végtelen sok irányszöge van, a nullvektornak minden szög irányszöge.
– Ha α irányszöge a **v**-nek, akkor az $\alpha + k \cdot 360°$ is irányszöge a **v**-nek, bármelyik egész számot jelölje is a k. Ha $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, akkor a **v**-nek ezeken kívül más irányszöge nincs.

FELADAT

2. Add meg az $\overrightarrow{OP}$ két irányszögét, ha O a koordináta-rendszer kezdőpontja és

a) $P(-6; 0)$; **c)** $P(1; 1)$;
b) $P(0; -3)$; **d)** $P(-1; -1)$!

3. Melyik pontba mutat az az origó kezdőpontú egységvektor, amelynek az egyik irányszöge

a) 30°-os; **b)** 150°-os; **c)** 135°-os;
d) 210°-os; **e)** 300°-os?

(Az egységvektor hossza 1 egység.)

4. **a)** Milyen messze van a koordináta-rendszer kezdőpontjától a $P(\cos 45°; \sin 45°)$ pont?

b) Tükrözd az $\overrightarrow{OP}$-t mindkét koordinátatengelyre és az origóra is! Számítsd ki az így kapott vektorok végpontjainak koordinátáit!

c) Add meg a b)-ben kapott vektorok egy-egy irányszögét!

HÁZI FELADAT

1. Számológép használata nélkül válaszolj! Melyik igaz és melyik hamis az alábbi kijelentések közül?

a) $\sin^2 147° + \cos^2 147° = 1$
b) $\cos 147° = -\cos 33°$
c) $\sin 147° = -\sin 33°$
d) $\sin 90° + \cos 90° = 1$
e) $\cos 60° \cdot \cos 120° = -\frac{1}{4}$
f) $\sin 150° = -\cos 120°$

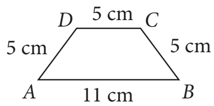
2. Melyik pontba mutat az az origó kezdőpontú egységvektor, amelynek az egyik irányszöge

a) 45°-os; **c)** 150°-os;
b) 90°-os; **d)** 240°-os?

3. Az O pont egy koordináta-rendszer kezdőpontja. Az $\overrightarrow{OC}$ hossza 4,6 egység, egy irányszöge 243°. Mik a C pont koordinátái?

RÁADÁS

1. Egy négyoldalú gúla alaplapja egy olyan szimmetrikus trapéz, amilyet az ábra is mutat.



Az *A*-ból és a *B*-ből induló oldalél 12 cm, a másik kettő 13 cm hosszúságú.

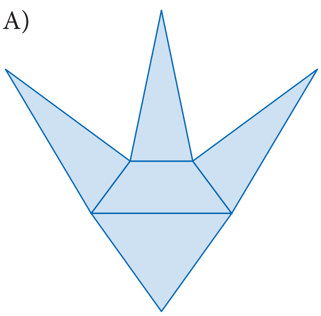
a) Készíts vázlatrajzot erről a gúláról!

b) Igaz-e, hogy a gúla két oldallapja derékszögű háromszög?

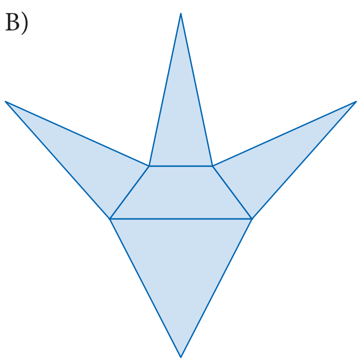
c) Válaszd ki a gúla hálózatát a megadottak közül!

d) Mekkora a gúla felszíne, vagyis a gúlát határoló lapok területének összege?

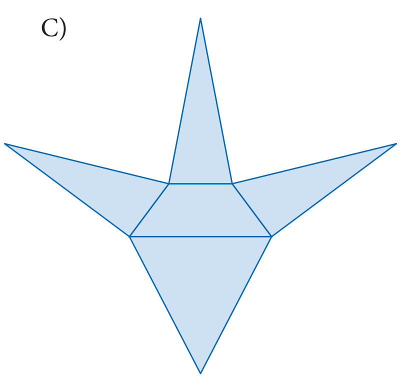
A)



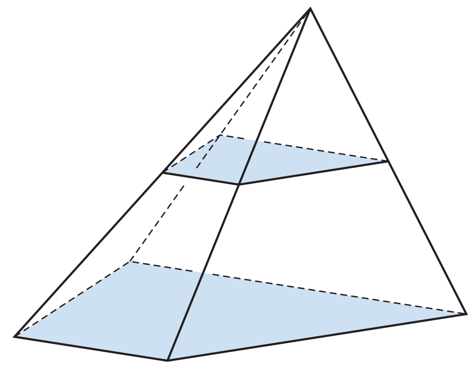
B)



C)



2. Az 1. feladatban szereplő gúlát kettévágjuk egy olyan síkkal, amely felezi a gúla magasságát, és párhuzamos az alaplappal. Így egy kisebb gúla és egy csonka gúla keletkezik. (A kis gúla középpontosan hasonló az eredetihez.)



a) Mekkorák a kis gúla élei?

b) Mekkora a kis gúla alapterülete? Hányadrésze ez az eredeti gúla alapterületének?

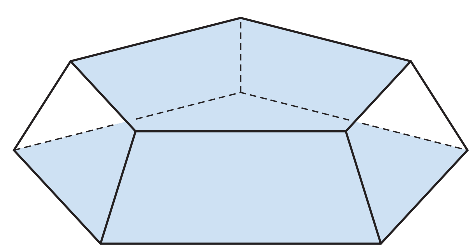
c) Mekkora a kis gúla felszíne? Hányadrésze ez az eredeti gúla felszínének?

d) Mekkorák a csonka gúla élei?

e) Rajzold le a csonka gúla hálózatát!

f) Mekkora a csonka gúla felszíne?

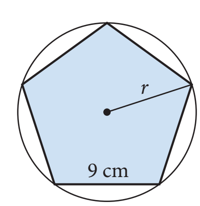
3. Egy szabályos csonka gúla alaplapja 12 cm-es oldalú ötszög, fedőélei 9 cm-esek, a csonka gúla magassága 4 cm.



a) Mennyi a hasonlóság aránya a két ötszög között?

b) Számítsd ki a fedőlap köré írható kör területét!

c) Számítsd ki az alaplap és a fedőlap területét!



4. Mennyi a 3. feladatban szereplő csonka gúla térfogata?

9 A koszinusztétel

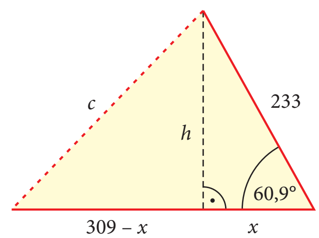
BEVEZETŐ

Két kisrepülőgép Budapestről felszállva egyenesen Bécs, illetve Zágráb felé indul. Budapest és Bécs között a fel- és leszállóhely távolsága légvonalban 233 km, a Budapest–Zágráb-vonalon ez a távolság 309 km. A pilóták az iránytűről azt is leolvasták, hogy a két gép útiránya között 60,9° az eltérés.

Állapítsd meg ezekből az adatokból, hogy mekkora a Bécs–Zágráb-távolság (ugyancsak légvonalban)!

Megoldás

Bontsuk fel a térképre rajzolt háromszöget az egyik magassága segítségével két derékszögű háromszögre!



A bal oldali derékszögű háromszögben

$c^2 = h^2 + (309 - x)^2 = h^2 + x^2 + 309^2 - 2 \cdot 309 \cdot x.$

Ha felhasználjuk, hogy

$h^2 + x^2 = 233^2$ és

$x = 233 \cdot \cos 60{,}9°$,

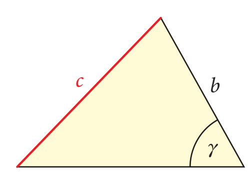
akkor azt kapjuk, hogy

$c^2 = 233^2 + 309^2 - 2 \cdot 309 \cdot 233 \cdot \cos 60{,}9°.$

$c \approx 282$ km.

Ez az összefüggés azt mutatja meg, hogyan számíthatjuk ki közvetlenül az adatokból a keresett oldal hosszúságának a négyzetét.

ELMÉLET



A bevezető feladat megoldása során kapott eredményt általánosítva az alábbi összefüggést kapjuk a háromszög három oldalára és egyik szögére vonatkozóan:

Tétel: Ha a, b és c egy háromszög oldalainak hossza, γ pedig a c oldallal szemközti szög, akkor $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Ezt az összefüggést *koszinusztételnek* nevezzük.

A koszinusztétel igaz minden háromszögre, függetlenül attól, hogy a γ hegyesszög, derékszög vagy tompaszög.

Megjegyzések

– Ha a γ derékszög, akkor $\cos\gamma = 0$, ezért ebben az esetben a koszinusztétel nem más, mint a Pitagorasz-tétel: $c^2 = a^2 + b^2$.
– A koszinusztételt akkor célszerű használni, ha egy háromszögnek
  – ismerjük két oldalát és az általuk közbezárt szöget, és a harmadik oldalt keressük; vagy ha
  – ismerjük mindhárom oldalát, és a háromszög szögeit keressük; ebben az esetben célszerű a leghosszabb oldallal szemközti szöget koszinusztétellel kiszámítani, egy további hegyesszöget pedig szinusztétellel érdemes meghatározni.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Folytassuk a bevezető feladatot! Mekkora szöget zárna be a repülőgépek útiránya, ha mindkettő Bécsből szállna fel Budapest, illetve Zágráb felé?

Megoldás

Alkalmazzuk a koszinusztételt:

$309^2 = 282^2 + 233^2 - 2 \cdot 282 \cdot 233 \cdot \cos \alpha$. Ebből:

$$\cos \alpha = \frac{282^2 + 233^2 - 309^2}{2 \cdot 282 \cdot 233} \approx 0{,}292, \text{ amiből } \alpha \approx 73°.$$

Megjegyzés

Figyeld meg a földgömbön, hogy sokkal nagyobb földrajzi távolságok esetén miért lesz pontatlan ez a számolás! Vajon milyen irányban van a „legközelebb” a Föld felszínén pl. Budapest és San Francisco?

FELADAT

1. Egy háromszög két oldalának hosszúsága 53 mm, illetve 71 mm. Mekkora a harmadik oldala, ha a két adott oldal által bezárt szög

a) 60°; **b)** 147°?

2. Egy háromszög oldalainak hossza

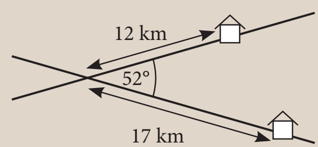
a) 5 cm, 6 cm, 7 cm;

b) 27,2 mm, 51,0 mm, 57,8 mm;

c) 13,2 m, 14,1 m, 24,5 m.

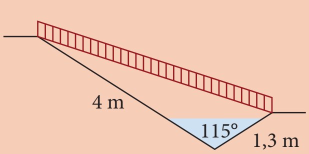
Számítsd ki a háromszög legnagyobb szögének nagyságát!

3. Két vasúti sínpár 52°-os szögben keresztezi egymást. A kereszteződéshez legközelebb fekvő megállók helyzetét az ábra mutatja. Milyen messze esik egymástól légvonalban ez a két megálló?



HÁZI FELADAT

1. Egy kis patak két partja nem azonos magasságú. A magasabbik oldalon a patakpart lejtője 4 méteres, míg az alacsonyabbik oldalon csak 1,3 m. A két part a patakmederben 115°-os szögben találkozik. Milyen hosszú legyen a két partot összekötő fahíd?



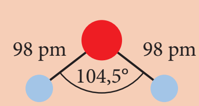
2. Egy háromszög oldalainak hossza

a) 4,1 cm; 5,3 cm; 9,9 cm;

b) 14 m; 33,6 m; 36,4 m.

Számítsd ki a háromszög szögeinek nagyságát!

3. Egy vízmolekulában a két oxigén–hidrogén-kötés által bezárt szög 104,5°, a távolság az oxigén- és a hidrogénatommagok között 98 pm (pm = pikométer, 1 pm = 10^{-12} m).



Hány pm távolságra van egymástól a két hidrogénatommag?

4. Egy paralelogramma oldalainak hosszúsága 24 cm és 32 cm, a hosszabbik átlója 42 cm-es.

a) Mekkorák a paralelogramma szögei?

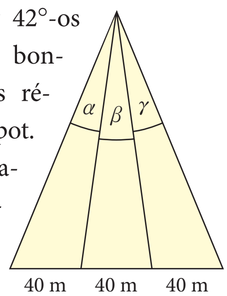
b) Mekkora a rövidebbik átlója?

10 Alkalmazások

CSOPORTMUNKA

Először szakértői csoportokban dolgozzatok, majd a szakértők a saját csoportjukban tanítsák meg az általuk megoldott feladatot!

1. Egy egyenlő szárú háromszög 42°-os szárszögét α, β és γ szögekre bontottuk. A szögszárak 40 m-es részekre osztják a 120 m-es alapot.

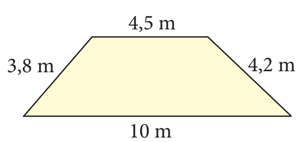


a) Mekkorák a háromszög alapon fekvő szögei, és mekkorák a szárai?

b) Igazold, hogy $\alpha = \gamma$!

c) Mekkora α és β?

2. Egy vasúti töltés keresztmetszete trapéz alakú. A korona szélessége 4,5 m, a rézsű 3,8 m, illetve 4,2 m hosszú, a töltés alapja 10 m széles.

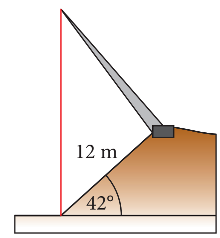


a) Mekkora a rézsű emelkedési szöge a meredekebb, illetve a lankásabb oldalon?

b) Milyen magas a töltés?

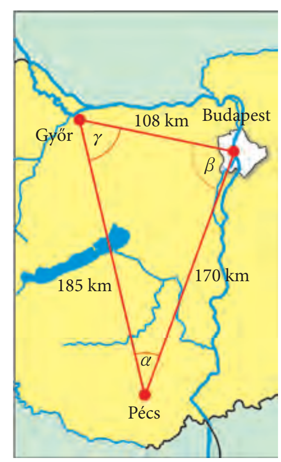
(*Útmutatás:* egy lehetséges megoldási módszer, ha a trapézt felbontjuk egy paralelogrammára és egy háromszögre.)

3. Az ábrán egy kavicsbánya daruja látható. A daru karja 15 m hosszú. A domb lejtője 12 m, és 42°-os emelkedési szöget zár be a vízszintessel. Milyen hosszú legyen a daruról függőlegesen lefelé lógó drótkötél, ha le kell érnie a domb aljáig?



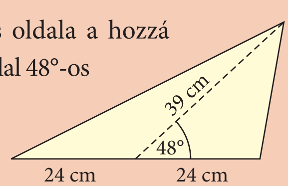
4. **a)** Számítsd ki a Pécs–Budapest–Győr „háromszög" szögeinek nagyságát!

b) Számítsd ki az a)-beli háromszög területét, és azt is, hogy hány százaléka ez a terület Magyarország területének! (Magyarország területe 93 030 km^2.)



HÁZI FELADAT

1. Egy háromszög 48 cm-es oldala a hozzá tartozó 39 cm-es súlyvonallal 48°-os szöget alkot.



a) Mekkora a háromszög területe?

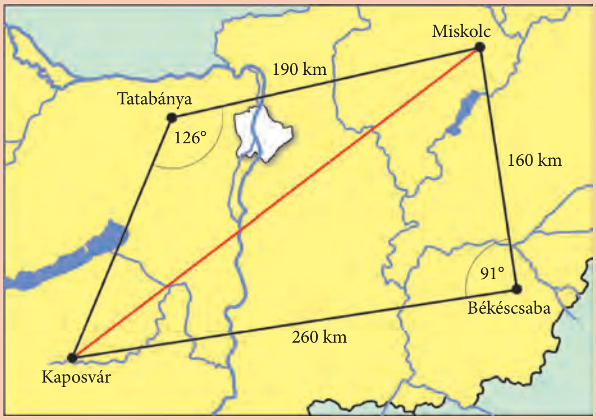
b) Mekkora a háromszög másik két oldala és a legnagyobb szöge?

2. Egy háromszög területe 60 cm^2, két oldalának hosszúsága 15 cm, illetve 16 cm.

a) Mekkorák a szögei? (Két eset van!)

b) Mekkora a harmadik oldala?

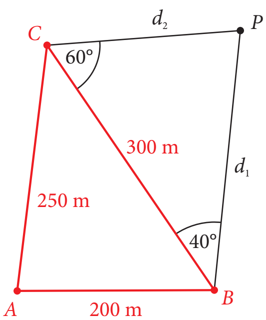
3. **a)** Számítsd ki a térkép adatainak felhasználásával, hogy mekkora a Kaposvár–Miskolc-távolság légvonalban! Egész kilométerre vagy inkább 10 kilométerre kerekítve célszerű megadni ezt a távolságot?
b) Mekkora a Kaposvár–Tatabánya-távolság légvonalban?
c) Számold ki a földrajzi atlaszban található térkép segítségével is (a térkép méretarányának felhasználásával) az a) és a b) feladatban kérdezett távolságokat! Hasonlítsd össze a kétféle úton kapott eredményeket!



RÁADÁS

A szinusztétel és a koszinusztétel alapvető jelentőségű a helymeghatározásban. Ez a két tétel adja a geodéziai mérések és számítások, a térképkészítés elméletének egyik alapját (háromszögelés), és (az időméréssel kiegészítve) gyakorlatilag ezen a két tételen alapul a jelenleg legmodernebb helymeghatározó rendszer, a GPS működése is.
A helymeghatározás lényegét egy egyszerű példával is megvilágíthatjuk.

Sík terepen vegyünk fel három alappontot, amelyeknek ismerjük a páronkénti távolságát, legyen például $AB = 200$ m, $BC = 300$ m, $AC = 250$ m. Az alapháromszög szögei: 82,8°, 55,8° és 41,4°.



Ha a BC szakasz két végpontjából szögmérés útján meghatározzuk a P tereptárgy helyzetét (ez az ún. *előremetszés*), akkor számolással meghatározható a P pontnak az alappontoktól való távolsága:

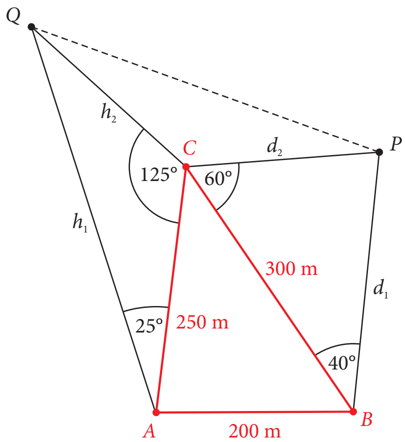
$$d_1 = 300 \cdot \frac{\sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 264 \text{ (m)},$$

$$d_2 = 300 \cdot \frac{\sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 196 \text{ (m)} \quad (\text{és } AP \approx 347 \text{ m}).$$

Megjegyzések

– A CBP háromszög területe kb. 2,544 ha.
– A P helyzetét meghatározhatnánk úgy is, hogy megmérjük, mekkora szögben láthatók P-ből az alapháromszög oldalai, majd ebből számolással adnánk meg a P-nek az alappontoktól való távolságát. Ez az ún. *hátrametszéssel* történő helymeghatározás, amely matematikai szempontból jóval nehezebb, mint az *előremetszéssel* történő meghatározás.

Határozzuk meg szögmérésekkel a Q tereptárgy helyzetét is ($CAQ\sphericalangle = 25°$ és $ACQ\sphericalangle = 125°$)!



Az ACQ háromszögből szinusztétellel kiszámítható h_1 és h_2 is: $h_1 \approx 410$ m és $h_2 \approx 211$ m.
Ezután már nem kell újabb méréseket végezni a PQ távolság meghatározásához, hiszen a QPC háromszög C-nél fekvő szöge $360^\circ - (125^\circ + 41{,}4^\circ + 60^\circ) = 133{,}6^\circ$, így a koszinusztétellel:
$PQ \approx \sqrt{196^2 + 211^2 - 2 \cdot 196 \cdot 211 \cdot \cos 133{,}6^\circ} \approx 374 \text{ (m)}$.
Némi számolással megkaphatjuk a QPC háromszög másik két szögét is: $CPQ\sphericalangle = 24{,}1°$, $CQP\sphericalangle = 22{,}3°$.
Ha a P és a Q pontot is hozzávesszük az A, B, C alappontokhoz, akkor most már 5 alappontunk van (és 4 alapháromszögünk), amelyek segítségével további tereptárgyak helyzetét határozhatjuk meg. Ezzel a módszerrel pontos térképet készíthetünk egy meghatározott területről.

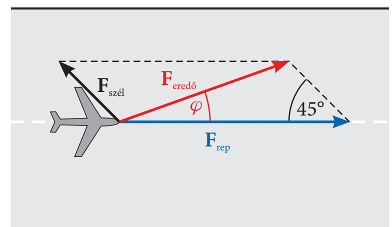
Vektorok és szögek a fizikában

KIDOLGOZOTT FELADAT

A leszálláshoz készülődő repülőgépre ható „vonóerő” $F_{rep} = 10\,000$ N nagyságú és a leszállópálya középvonalával párhuzamos irányú. A leszállópálya nyugat–keleti tájolású, a gép kelet felé repül. Az egyik leszállásnál vízszintes irányú délkeleti szél fúj, amely a repülőre $F_{szél} = 2000$ N nagyságú (északnyugati irányú) erővel hat. Számítsuk ki, hogy mekkora és milyen irányú ennek a két erőnek az eredője!

Megoldás

Készítsünk ábrát a feladathoz!



A két megadott erővektor eredőjét a paralelogramma-módszerrel szerkesztettük meg: $\mathbf{F}_{eredő} = \mathbf{F}_{rep} + \mathbf{F}_{szél}$.

Az eredő erő nagyságát koszinusztétellel számíthatjuk ki:

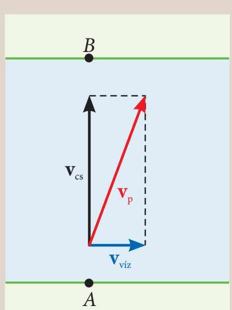
$F_{eredő} = \sqrt{F_{rep}^2 + F_{szél}^2 - 2 \cdot F_{rep} \cdot F_{szél} \cdot \cos 45^\circ}$.

$F_{eredő} = \sqrt{10\,000^2 + 2000^2 - 2 \cdot 10\,000 \cdot 2000 \cdot \cos 45^\circ} \approx 8700$ (N).

Az eredő erőnek a leszállópályával alkotott szögét (φ) szinusztétellel célszerű kiszámítani: $\frac{\sin\varphi}{\sin 45^\circ} = \frac{F_{szél}}{F_{eredő}} \approx \frac{2000}{8700}$. Ebből $\sin\varphi \approx \sin 45^\circ \cdot \frac{2000}{8700} \approx 0{,}1626$, $\varphi \approx 9{,}4^\circ$.

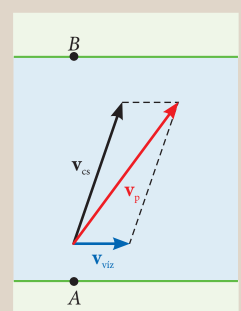
FELADAT

1. A 250 m széles folyó egyik partján van az A hely, vele pontosan szemközt, a túlsó parton pedig a B hely. A víz sebessége $v_{víz} = 3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ nagyságú, a parttal párhuzamos irányú. Egy motorcsónak az A helyről indul, a vízhez viszonyított sebessége $v_{cs} = 8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ nagyságú. Az alább megadott esetekben számítással határozd meg a motorcsónak parthoz viszonyított $\mathbf{v}_p$ sebességének nagyságát, a folyóvíz sebességének irányával bezárt szögét és azt is, hogy a B helytől mekkora távolságban ér partot a motorcsónak! (Tudjuk, hogy $\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_{cs} + \mathbf{v}_{víz}$.)

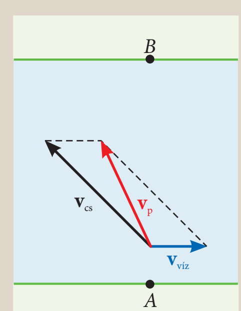


a) $\mathbf{v}_{víz} \perp \mathbf{v}_{cs}$

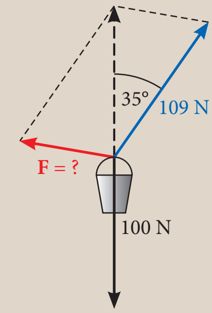
b) $\mathbf{v}_{víz}$ és $\mathbf{v}_{cs}$ szöge 71°



c) $\mathbf{v}_{víz}$ és $\mathbf{v}_{cs}$ szöge 135°

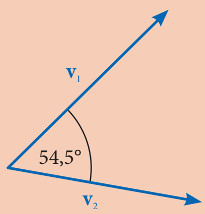


2. Egy apa és a fia együtt cipelnek egy vízzel teli vödröt. A vödörre ható gravitációs erő 100 N nagyságú, az apa által kifejtett erő 109 N nagyságú, és az apa karja (az erő iránya) a függőlegessel 35°-os szöget zár be. Mekkora F erővel tartja a fia a vödröt, és mekkora szöget zár be a fiú karja (az erő iránya) a függőlegessel, ha a vödröt így kiegyensúlyozva tudják vinni?



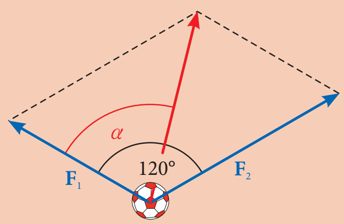
HÁZI FELADAT

1. Egy test sebességvektora $\mathbf{v}_1$-ről $\mathbf{v}_2$-re változott. Számítsd ki a sebességváltozás vektorának ($\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$-nek) a nagyságát és azt a szöget, amelyet a $\mathbf{v}_1$-gyel bezár! A sebességek nagysága: $v_1 = 2{,}9\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $v_2 = 3{,}2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, a két sebességvektor szöge 54,5°.



2. Számold ki, mennyi ideig tart a motorcsónak átkelése a folyó túlsó partjára a lecke 1. feladatában megadott esetekben!

3. Egy futball-labdába két játékos ugyanabban a pillanatban rúgott bele az ábra szerinti erőkkel: $F_1 = 1500$ N és $F_2 = 2000$ N.



Mekkora és milyen irányú a labdára ható két erő eredője? Az irányt az ábrán jelölt α szög kiszámításával add meg!

RÁADÁS

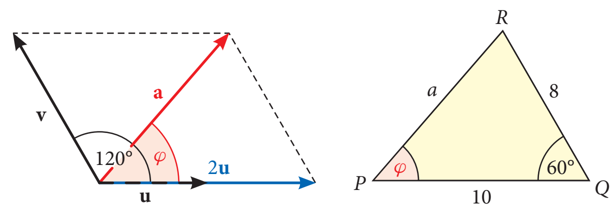
Bázisrendszert alkot a sík két, egymással nem párhuzamos vektora. Ezekkel a sík bármely vektora előállítható.

Egy bázisrendszer két bázisvektora **u** és **v**. A bázisvektorok hossza: $u = |\mathbf{u}| = 5$, $v = |\mathbf{v}| = 8$, a két vektor szöge 120°, az **u**-t pozitív irányú 120°-os elforgatás viszi át a **v**-vel azonos irányú vektorba. Adjuk meg ebben a bázisrendszerben az $\mathbf{a}(2;\,1)$ hosszát és azt a szöget, amelyet a bázisvektorokkal bezár!

Megoldás

Az **a**-t felírhatjuk így is: $\mathbf{a} = 2\mathbf{u} + 1\mathbf{v}$, és ennek ismeretében (például a paralelogramma-módszerrel) meg is szerkeszthetjük, ahogyan az az ábrán is látható.

A feladat kérdései megválaszolhatók a PQR háromszög segítségével.



Koszinusztétellel:

$$a = \sqrt{10^2 + 8^2 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{84},$$

vagyis az **a** hossza $a = |\mathbf{a}| \approx 9{,}17$.

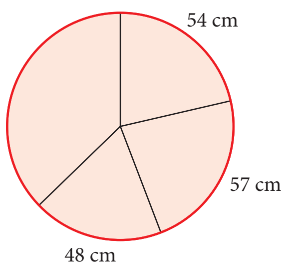
Szinusztétellel:

$$\sin \varphi = \frac{8}{\sqrt{84}} \cdot \sin 60^\circ \approx 0{,}7559.$$

Mivel φ csak hegyesszög lehet (mert $8 < 10$), ezért $\varphi \approx 49{,}1^\circ$. Ekkora az **a**-nak az **u** bázisvektorral bezárt szöge, míg a **v**-vel $(120^\circ - \varphi) \approx 70{,}9^\circ$-os szöget zár be.

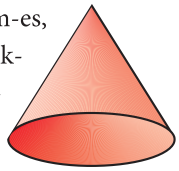
11 A kör részei

BEVEZETŐ



Hajni és testvérei szilveszterre varázslósüveget készítenek maguknak. Van egy óriási piros kartonlapjuk, abból vágnak ki egy 40 cm sugarú kört. Hajni megmérte a fejük kerületét:

Csilla	Bence	Hajni
47 cm	56 cm	53 cm

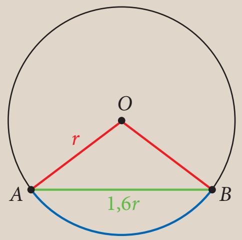


A körlapból három olyan körcikket vágnak ki, amelyekhez 48 cm-es, 57 cm-es, illetve 54 cm-es körív tartozik (1-1 cm-t ráhagytak a ragasztás miatt). A körcikkekből süveget formálnak, majd összeragasztják. Mindegyik varázslósüveg olyan, mint egy forgáskúp palástja. A forgáskúpok alkotója 40 cm hosszú, a három alapkör kerülete pedig 47 cm, 56 cm, illetve 53 cm. Mennyi maradt a piros körlapból?

A kör kerülete $80\pi \approx 251$ centiméter, ebből felhasználtak $48 + 57 + 54 = 159$ centimétert. Tehát olyan körcikk maradt, amelynek az ívhossza $251 - 159 = 92$ centiméter. Hajni kiszámította a maradék körcikk területét, mégpedig így: *az ívhosszat megszorozta a sugárral, és ezt a szorzatot elosztotta 2-vel:* $92 \cdot 40 : 2 = 1840$ négyzetcentiméter. Tehát a körből 1840 cm^2, vagyis 18,4 dm^2 maradt.

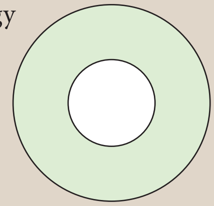
FELADAT

1. Egy 8,4 cm sugarú körben az *AB* húr 1,6-szer akkora, mint a sugár.

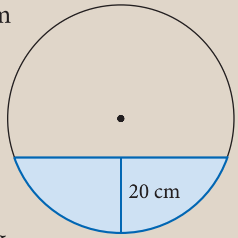


a) Mekkora az *AOB* szög?
b) Mekkora az *AOB* háromszög területe?
c) Mekkora a keletkezett kisebbik körív hossza?
d) Mekkora a keletkezett nagyobbik körív hossza?
e) Mekkora területű körcikkekre vágja a kört a két piros sugár?
f) Mekkora az *AB* húr által létrehozott két körszelet területe?

2. Egy síkban egy 34 mm és egy 15 mm sugarú kör középpontja ugyanaz a pont. Mekkora a két körvonal által határolt körgyűrű területe?



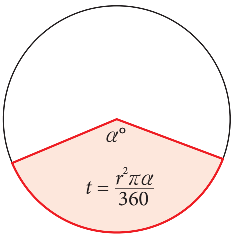
3. Egy 60 cm átmérőjű, 2,6 m hosszúságú, vízszintes helyzetű csőszakaszban 20 cm magasan áll a víz. Az ábra a cső keresztmetszetét mutatja.



a) Mekkora középponti szög tartozik a vízfelszínt jelölő húrhoz?
b) Mekkora a kék körszelet területe?
c) Mennyi víz van ebben a csőszakaszban?
d) A cső térfogatának hány százalékát foglalja el a víz?

ELMÉLET

I. 10. osztályban tanultuk:
Egy körben a középponti szögek nagysága, a hozzájuk tartozó körívek hosszúsága és a megfelelő körcikkek területe egyenesen arányos.

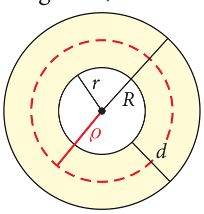


Ha egy r cm sugarú körben egy középponti szög $\alpha°$, akkor a hozzá tartozó *körív hossza* a körkerület 360-ad részének az α-szorosa. Ha ennek a cm-ben mért hosszúságát i-vel jelöljük, akkor $i = \frac{2r\pi}{360} \cdot \alpha = \frac{r\pi\alpha}{180}$.

Ugyanebben a körben egy $\alpha°$-os középponti szöghöz tartozó *körcikk területe* a körterület 360-ad részének az α-szorosa. Ha ennek a cm^2-ben mért nagyságát t-vel jelöljük, akkor $t = \frac{r^2\pi}{360} \cdot \alpha = \frac{r^2\pi\alpha}{360}$.

A körcikk területe kiszámolható a körív hosszából és a kör sugarából is: $t = \frac{ir}{2}$.

II. Egy síkban két azonos középpontú (koncentrikus) kör egy körgyűrűt határoz meg. Ha a külső kör sugara R, a belsőé pedig r, akkor az általuk határolt körgyűrű területe $T = R^2\pi - r^2\pi = \pi(R^2 - r^2)$.
Ez a terület másképp is kiszámítható: *a középkör kerületét megszorozzuk a körgyűrű szélességével.*
A középkör sugara (amit ρ-val jelölünk) R és r számtani közepe: $\rho = \frac{R + r}{2}$,
a szélesség pedig (jele: d) a két sugár különbsége: $d = R - r$.
Ezekkel az adatokkal a körgyűrű területe: $T = 2\rho\pi \cdot d$.



HÁZI FELADAT

1. Egy kör A pontjából két húr indul. Hosszúságuk 58 mm és 74 mm, az általuk bezárt szög pedig 43°-os.
a) Készíts rajzot!
b) Mekkora távolságra van egymástól a húrok másik végpontja?

2. Egy 5,7 cm sugarú kör A pontjából két húr indul. Hosszúságuk 6,5 cm és 8,3 cm.
a) Készíts rajzot!
b) Mekkora területű részekre oszthatja a körlemezt ez a két húr?

3. Tóth nagypapa rézcsöveket rendelt, és arra kérte a családját, hogy vegyék át a csomagot. Két doboz rézcsövet rendelt, mindegyik doboz egy tucatot tartalmaz. A csövek hossza 28 cm, külső átmérőjük 6 cm, belső átmérőjük 5 cm. A gimnazista fiú, Péter vállalkozott rá, hogy kerékpáron elviszi a két dobozt, de édesapja nem engedte, mert ez túl nehéz csomag lenne. Így ő vitte el a csöveket autóval. Számítsd ki, hány kg volt a két doboz cső, ha a réz sűrűsége $8{,}96\ \frac{g}{cm^3}$!

4. Az afrikai kontinens az Egyenlítő mentén Gabon nyugati partjától (keleti hosszúság 9,3°) Szomália keleti partjáig (keleti hosszúság 42,9°) terjed. Számítsd ki a kontinens szélességét az Egyenlítő mentén!

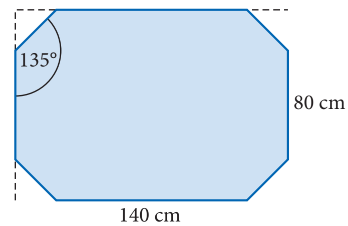
12 Gyakorlás

BEVEZETŐ

140 cm széles bársonyból 2 méter hosszú, nyolcszög alakú terítőt készítünk. A 2 méter hosszú, 140 cm széles, téglalap alakú szövet sarkairól 30 cm-es befogójú, egyenlő szárú derékszögű háromszögeket vágunk le.

a) Mekkorák a terítő oldalai és szögei?
b) Mekkora a terítő területe?
c) Milyen szimmetriatulajdonságai vannak ennek a nyolcszögnek?
d) Szabályos-e ez a nyolcszög?

Megoldás



a) A jobb oldali ábra mutatja a terítő vázlatát.
A rajzról könnyű leolvasni, hogy a 2 méteres hosszúságból 140 cm-es oldal keletkezik, a 140 cm-esből pedig 80 cm-es. A „ferde” oldalak hossza $30 \cdot \sqrt{2} \approx 42$ centiméter.
A szögek mind 135°-osak, mert mindegyik egyenesszöget alkot az egyik egyenlő szárú derékszögű háromszög 45°-os szögével.

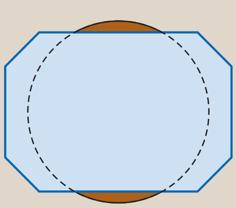
b) A 2 méter hosszú bársony területe $2 \cdot 1{,}4 = 2{,}8$ négyzetméter. A levágott 4 háromszögből két 30 cm-es oldalú négyzetet rakhatunk össze. Ezek együttes területe $2 \cdot 30^2 = 1800$ négyzetcentiméter, vagyis 0,18 négyzetméter. Tehát a terítő területe $2{,}8 - 0{,}18 = 2{,}62$ négyzetméter.

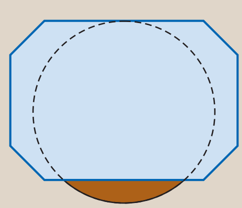
c) Tengelyesen szimmetrikus és középpontosan szimmetrikus. Két szimmetriatengelye van, amelyek az eredeti téglalapnak is szimmetriatengelyei. Szimmetria-középpontja az eredeti téglalap középpontja.

d) Nem, mert nem egyenlő hosszúak az oldalai.

FELADAT

1. A bevezető feladatban szereplő terítőt egy olyan kerek asztalra tettük, amelynek az átmérője 160 centiméter.



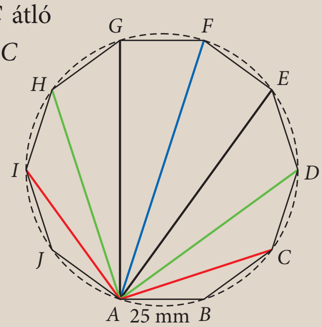


a) Az asztallapnak mekkora része marad fedetlen, ha a terítő és az asztallap szimmetria-középpontja azonos?
b) Mekkora a fedetlen rész területe, ha a jobb oldali ábra szerint teszik rá az asztalra a terítőt?

2. Egy szabályos tízszög oldalai 25 mm hosszúságúak. Rajzold meg az A csúcsból kiinduló összes átlót!

a) Számítsd ki az AC átló hosszát és a BAC szöget az ABC háromszög adatai alapján!

b) Mekkora az ACD szög?



c) Számítsd ki az AD átló hosszát és a CAD szöget az ACD háromszög adatai alapján!

d) Mekkora az ADE szög?

e) Számítsd ki az AE átló hosszát és a DAE szöget az ADE háromszög adatai alapján!

f) Mekkora az AEF szög?

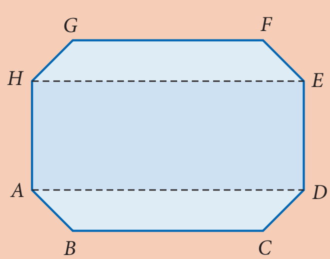
g) Számítsd ki az AF átló hosszát és az EAF szöget az AEF háromszög adatai alapján!

h) Mekkora az AG, az AH és az AI átló?

i) Hány háromszögre bontották ezek az átlók a tízszöget? Közülük hány hegyesszögű, hány derékszögű és hány tompaszögű?

HÁZI FELADAT

1. Figyeld meg a bevezető feladatban szereplő nyolcszöget! Rajzold be a nyolcszögbe az AD és a HE átlót!



a) Milyen négyszögekre vágják ezek a nyolcszöget?

b) Mekkorák ezeknek a négyszögeknek az oldalai és a szögei?

c) Mekkorák ezeknek a négyszögeknek az átlói?

d) Mekkora részekre osztja a nyolcszög H-nál lévő szögét a H-ból induló öt átló?

e) Mekkorák a nyolcszög H-ból induló átlói?

2. Egy szabályos ötszög alakú terítő csúcsai 70 cm-re vannak az ötszög középpontjától.

a) Mekkora átmérőjű kör alakú asztallap fedhető le ezzel a terítővel?

b) A terítő szélein díszzsinórt akarnak végigvezetni. Mekkora hosszúságú zsinórra van szükség?

c) Mekkora az ötszög átlóinak hossza?

RÁADÁS

A lecke 2. feladatában és az 1. házi feladatban azt figyelhettük meg, hogy ha a szabályos sokszög egy csúcsából induló átlókat tekintjük, akkor ezek egyenlő részekre osztják a sokszög belső szögét.

A szabályos tízszög esetében ezek a szögek 18°-osak, mert $144 : 8 = 18$; a szabályos négyszög (négyzet) esetén 45°-osak, a szabályos hatszögnél 30°-osak, a szabályos nyolcszögnél pedig 22,5°-osak.

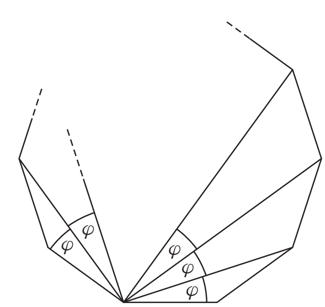
Ez a tulajdonság minden szabályos sokszögre fennáll. (Aki ismeri a kerületi szögek tételét, az ezt az állítást könnyen igazolhatja.)

Az n oldalú szabályos sokszög egy belső szöge $\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$ nagyságú, az egy csúcsból húzható $n-3$ számú átló $n-2$ egyenlő részre vágja szét ezt a szöget.

Tehát az átlók a csúcsnál fekvő szöget

$$\varphi = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n\cdot(n-2)} = \frac{180^\circ}{n}$$

nagyságú szögekre vágják szét.



13 A szabályos sokszögek

KIDOLGOZOTT FELADAT

Gyakran látni az autók kerekein olyan dísztárcsákat, amelyeknek a korábban jellemző 6 helyett 7, 9, 10, 11, 13 küllője van. Ha képzeletben összekötjük a küllők szomszédos „csúcspontjait", szabályos sokszögeket kapunk.
Az ábrán látható, szabályos kilencszöget formáló dísztárcsa OA sugara 17,5 cm.

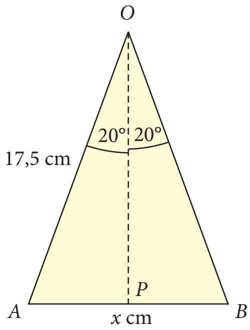
a) Mekkora az ábrán jelölt AOB középponti szög?
b) Mekkorák ennek a szabályos kilencszögnek az oldalai?
c) Mekkora a szabályos kilencszög területe?

Megoldás

a) $360° : 9 = 40°$.

b) *Első módszer*
Használjuk a koszinusztételt: ha a kilencszög AB oldala x cm, akkor
$x^2 = 17{,}5^2 + 17{,}5^2 - 2 \cdot 17{,}5 \cdot 17{,}5 \cdot \cos 40°$.
$x \approx 12$ (cm).

Második módszer
Az APO derékszögű háromszögből:
$x = AB = 2 \cdot AP =$
$= 2 \cdot (17{,}5 \cdot \sin 20°) \approx$
≈ 12 (cm).



c) Az AOB háromszög területe:
$T = \frac{1}{2} \cdot 17{,}5^2 \cdot \sin 40° \approx$
$\approx 98{,}4$ (cm^2).

A kilencszög területe ennek a 9-szerese, vagyis közelítőleg 886 cm^2.

Megjegyzés
Az AOB háromszög területe így is kiszámítható:
$T = AP \cdot OP = (17{,}5 \cdot \sin 20°) \cdot (17{,}5 \cdot \cos 20°) =$
$= 17{,}5^2 \cdot (\sin 20° \cdot \cos 20°) \approx 98{,}4$ (cm^2).

FELADAT

1. Az Angliában használatos 50 pennys érme olyan egyenes hasábnak tekinthető, amelynek az alaplapja szabályos hétszög. (Valójában az élei nagyon enyhén domborúak, hogy ne akadjon meg az automatákban.) Számítsd ki, hogy körülbelül hány gramm fémötvözet szükséges egy ilyen érme elkészítéséhez, ha a hétszög köré írható kör átmérője 27,3 mm, vastagsága 1,8 mm, és az elkészítéséhez használt nikkel-réz ötvözet sűrűsége 8,7 $\frac{g}{cm^3}$!

2. Bence Erdélyben járt osztálykiránduláson. Különösen felkeltette érdeklődését a nagyváradi vár. Lefényképezte, és megtudta, hogy a belső vár területe az épületekkel együtt közelítőleg 11 300 m^2. Elhatározta, hogy hazaérve épít egy erre emlékeztető makettet, de az egyszerűség kedvéért a makettet szabályos ötszögnek tervezi. Úgy gondolta, hogy ha 1 : 200 arányú kicsinyítést alkalmaz, akkor a makett elfér majd dédmama vitrinjében.

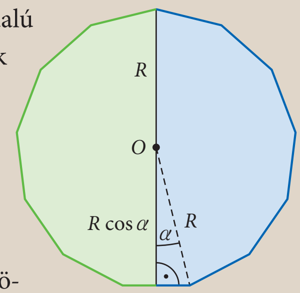
a) Határozd meg a tervezett makett ötszöge köré írható kör sugarát!

b) Milyen hosszúak lesznek a maketten az ötszög oldalai?

c) Bence megállapította, hogy a makett nem fér be a vitrinbe, mert annak 80 cm × 45 cm méretűek a polcai. Legalább milyen hosszú és milyen széles téglalap alapú polcra van szükség a makett elhelyezéséhez?

d) Mekkora kicsinyítést alkalmazzon Bence, hogy a makett beférjen a vitrinbe?

3. Egy szabályos 13 oldalú sokszöget kettévágunk az egyik szimmetriatengelye mentén. A keletkezett sokszögek leghosszabb oldala 18 cm.



a) Hány oldalú sokszögek keletkeztek?

b) Mekkora a 13 szög köré írt kör sugara?

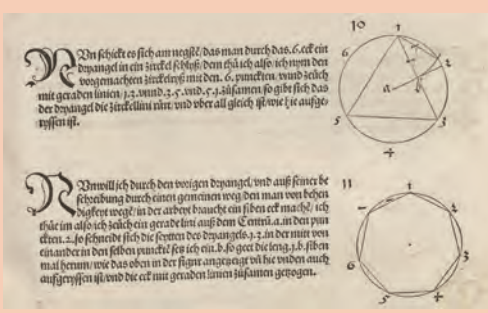
c) Mekkorák a 13 szög oldalai?

d) Mekkora egy-egy rész területe?

HÁZI FELADAT

1. Válaszolj a bevezető feladat kérdéseire, ha a dísztárcsának nem 9, hanem 11 küllője van!

2. Albrecht Dürer, a XV–XVI. sz. fordulóján élt német reneszánsz mester oltárképei és vallásos témájú festményei mellett elsősorban rézkarcairól és fametszeteiről ismert. Emellett behatóan foglalkozott matematikával is. A szabályos hétszög oldalhosszúságát például az ugyanakkora körülírt körbe rajzolható szabályos háromszög oldalának feleként adja meg.
Számítsd ki egy 1 m sugarú körbe írt szabályos hétszög oldalhosszúságát, illetve az ugyanabba a körbe írt szabályos háromszög oldalának felét! Mekkora az eltérés?



3. A képen látható pavilon alaprajza szabályos 12 szög, amelynek területe 75 m^2.

a) Számítsd ki a 12 szög körülírható körének sugarát!

b) Számítsd ki a pavilon egy oldalának hosszát!

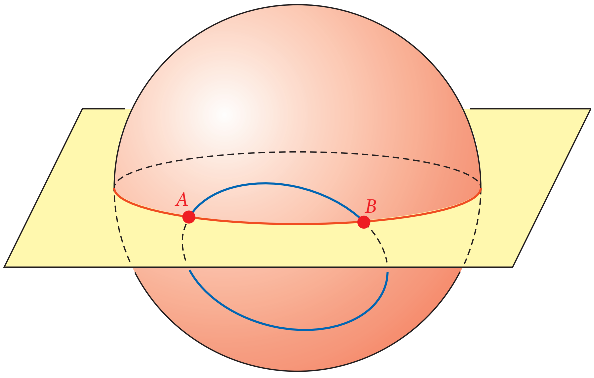
Ráadás Becslések, számítások

BEVEZETŐ

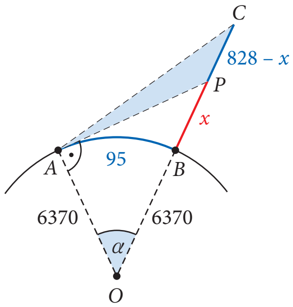
Ezen az órán célszerű földgömböt (esetleg földrajzi atlaszt) is használni!

Részlet egy újságcikkből: „A világ legmagasabb épületének átadása nem csak lenyűgöző, tűzijátékos ünnepségével lepte meg a világot, és nem is csak azzal, hogy a torony egyáltalán elkészült. A hétfői megnyitón Dubaj vezetője a hivatalos magasság – 828 méter – mellett még bejelentette: a torony új nevet kap: Burdzs Kalifának nevezték el. A 95 kilométerről látható monstrumot 75 ezer munkás öt év és három hónap alatt építette fel. A város 1,5 milliárd dollárt fektetett bele új szimbólumába. 12 ezer ember élhet a 160 emeletes felhőkarcolóban."
Mekkora magasságú rész látható 95 km távolságból a 828 méter magas toronyból, ha a Földet egy 6370 km sugarú gömbbel modellezzük?

Megoldás
A Föld felületén a két pontot összekötő körívek közül minden esetben a főköríven található ív a legrövidebb: az A és B pont között a rövidebbik narancssárga főkörívnél hosszabb a rövidebbik kék körív. Emiatt gondolhatjuk azt, hogy a Burdzs Kalifa talppontja, a megfigyelés helye és a Föld középpontja egy síkban vannak, és a sík által a Földből kimetszett főkör rövidebb ívének hossza a 95 km.



A feladathoz így egy síkbeli ábrát is készíthetünk. Ezen C a torony csúcsa, és a PB szakasz a toronynak az a része, amelyet nem lehet látni 95 km-ről.
Ennek a hosszát (x) ki tudjuk számítani.
Az α középponti szöget az ívhosszból (95 km) és a sugárból (6370 km) számíthatjuk ki:



$\alpha = \dfrac{95}{2\pi \cdot 6370} \cdot 360^\circ \approx 0{,}8545^\circ$ (itt indokolt a négy tizedesjegy, hiszen az x-et a feladathoz illeszkedően két tizedesjegy pontossággal szeretnénk megadni). Az OAP derékszögű háromszögből: $OP = \dfrac{6370}{\cos\alpha} \approx 6370{,}71$ (km), tehát $x = OP - 6370 \approx 0{,}71$ (km).
Tehát 95 km távolságból a torony megközelítőleg 710 méter feletti kb. 120 m-es része „látszik".

Megjegyzés
Dubaj a tengerparton fekszik, ezért a tenger felől hajóval érkezve a feladatnak megfelelő helyzetet könnyen el lehet képzelni.

Kilátás a Burdzs Kalifából

FELADAT

1. Adj becslést arra, hogy elméletileg mekkora távolságra lehet „ellátni”

a) a Burdzs Kalifa legmagasabb pontjáról, azaz 828 méter magasságból;

b) az Empire State Building tetejéről (381 m);

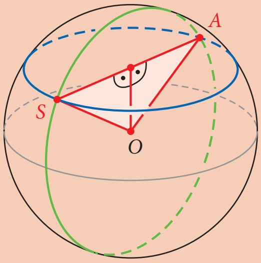
c) a Mount Everest legmagasabb pontjáról!

Empire State Building (New York City, USA)

2. Dubaj a 25,3°-os északi szélességi körön fekszik. Hány km hosszú a Dubajon áthaladó szélességi kör, ha a Földet egy 6370 km sugarú gömbbel modellezzük?

HÁZI FELADAT

1. San Francisco (USA) és Aşgabat (Türkmenisztán) közelítőleg ugyanazon a 37,8°-os szélességi körön fekszik, mégpedig e kör két átellenes pontjában.



a) Mekkora a 37,8°-os szélességi kör sugara, és mekkora a félkör hossza?

b) Mekkora annak a rövidebbik földi főkörívnek a hossza, amelyik a két várost összeköti?

2. A Burdzs Kalifa építéséről szóló újságcikkben több olyan adat is felbukkan, amely az építkezés hatalmas méreteire vonatkozik. Adj **becslést** arra, hogy

a) összesen hány munkaórát töltöttek el a munkások az építkezésen;

b) hány forintba került a beruházás (az USA-dollár aktuális árfolyamán);

c) mennyi energiát használhatnak el naponta az ott élő emberek (egy lakás napi elektromosenergia-szükséglete 5-10 kWh lehet, üzemeltetni kell a légkondicionáló berendezéseket, a lifteket stb.);

d) mekkora lehet az épület térfogata!

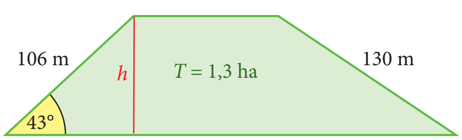
Ha adatokra van szükséged a (jobb) becslések elkészítéséhez, akkor rákereshetsz a témára az interneten is!

Burdzs Kalifa (Dubaj)

14 Többlépcsős feladatok

KIDOLGOZOTT FELADAT

Jocó a nyáron egy hónapig egy ismerősük, Tóni bácsi szőlőbirtokán dolgozott, ahol megkereste a nyaralásra valót. A pihenőnapon kedve támadt egy kis számolásra, ezért arra gondolt, hogy a szőlőskerttel kapcsolatos „minden” távolságot és szöget ki fog számolni. A gazdával folytatott beszélgetéseiből emlékezett arra, hogy a telek trapéz alakú, a két szára 106 m és 130 m, a területe pedig 1,3 hektár. Megmérte a hosszabbik alapon fekvő egyik szöget, s látta, hogy az 43°-os. Jocó gyorsan készített egy olyan vázlatrajzot, amely megfelelt az adatoknak.



Ki tudja-e számolni Jocó a trapéz

a) két párhuzamos oldalának távolságát;

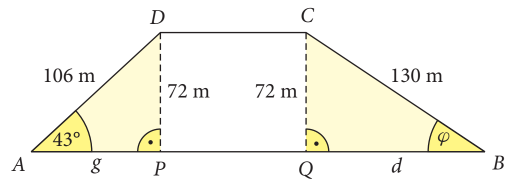
b) a trapéz szögeit;

c) a trapéz párhuzamos oldalainak hosszát?

Megoldás

a) A trapéz magasságának kiszámítására egy alkalmas derékszögű háromszöget választunk (lásd az ábrát). Ebből: $\frac{h}{106} = \sin 43°$, tehát $h = 106 \cdot \sin 43° \approx 72{,}3$.
A telek két párhuzamos oldalának távolsága tehát közelítőleg 72 m.

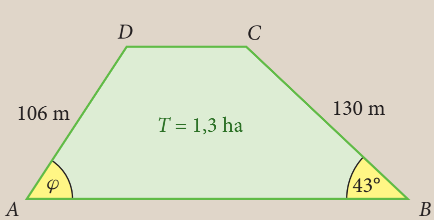
b) A CQB derékszögű háromszögből: $\sin\varphi = \frac{72}{130}$, amiből $\varphi \approx 33{,}6°$ adódik. A trapéz szögei tehát 43°, 34°, 146° és 137° nagyságúak.



c) Az ábrán d-vel, illetve g-vel jelölt szakaszok hosszát egy-egy derékszögű háromszögből is kiszámolhatjuk:
$d = 130 \cdot \cos\varphi \approx 108$ (m) és
$g = 106 \cdot \cos 43° \approx 78$ (m).
Már csak a $PQCD$ téglalap egyik hiányzó oldalának hosszát kell meghatároznunk. Ennek kiszámításához használjuk fel a trapéz területét, amely 1,3 ha = 13 000 m^2.
Ebből a két derékszögű háromszög együttes területe $\frac{108 + 78}{2} \cdot 72 = 6696$ (m^2), ezért a $PQCD$ téglalap területe 6304 m^2.
$PQ = CD = \frac{6304}{72} \approx 88$ (m).
A trapéz alapjainak hossza tehát 88 méter, illetve $78 + 88 + 108 = 274$ méter.
Jocó az ábráján „minden” távolságot és szöget ki tudott számítani az ismert adatokból.

FELADAT

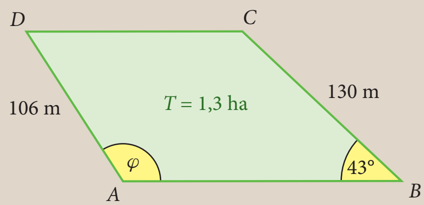
1. *(A kidolgozott feladat folytatása.)* Jocó éppen elkészült a számításaival, amikor megérkezett Dönci, aki általában jól átlátja a geometriai problémákat. Jocó beszámolója után rögtön meg is jegyezte, hogy nem biztos benne, hogy pontosan olyan alakú Tóni bácsi szőlőskertje, mint amilyet Jocó rajzolt.
Dönci rajzát mutatja az ábra.



Számítsd ki az $ABCD$ trapéz

a) magasságát; **b)** szögeit; **c)** alapjainak hosszát!

2. *(Az előző feladat folytatása.)* Amikor Tóni bácsi meglátta Jocó és Dönci rajzát, illetve számításaikat, meghökkenve ceruzát fogott, és egy egészen más alakú trapézt rajzolt.

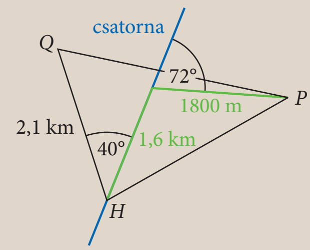


– Ilyen az én szőlőm, Józsi!
Jocó és Dönci azonnal látta, hogy ez a rajz is megfelel az adatoknak. Jocó újra nekilátott a számolásnak.

a) Mekkora a trapéz magassága?
b) Mekkorák az alapok?
c) Mekkorák a trapéz szögei?

3. Egy háromszög alakú telket egy csatorna vág ketté. A birtok egyik csúcsa a *H*-val jelölt hídnál van, innen a csatorna mentén 1,6 km után jobbra fordulva a dűlőúton 1800 métert kell megtenni a birtok másik csücskéig, a *P* pontig. Ez a dűlőút, ahogy az ábra mutatja, 72°-os szöget alkot a csatornával. Ha a *H* hídnál balra, 40°-os szögben indulnak el, és 2,1 km-t haladnak, éppen a birtok harmadik csúcsát, *Q*-t érik el.

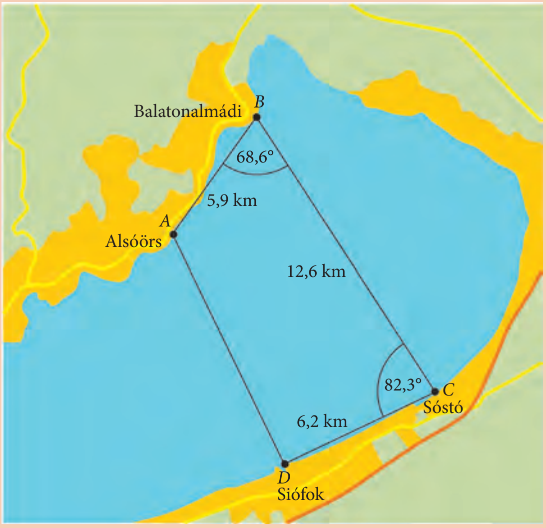
a) Mekkora a birtok *HP* határszakasza?
b) Mekkora a *QHP* szög?
c) Mekkora a birtok *PQ* határszakasza?
d) Hány hektáros ez a birtok?



HÁZI FELADAT

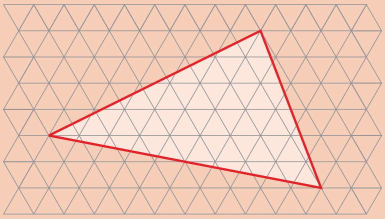
1. Egy nagy viharban a Balatonon egy gumimatracos fürdőző a nyílt vízre sodródott. A vízi mentők csak azt tudják, hogy valószínűleg a mellékelt térképen látható négyszög alakú területen lehet. Számítsd ki

a) az Alsóörs–Sóstó (*AC*) távolságot;
b) a Balatonalmádi–Sóstó–Alsóörs (*BCA*) szöget;
c) az Alsóörs–Sóstó–Siófok (*ACD*) szöget;



d) hány km^2 területet kell a mentőcsapatoknak átkutatniuk!

2. Az ábrán látható háló olyan szabályos háromszögekből épül fel, amelyek oldalhosszúsága 1 cm. Számítsd ki a piros háromszög kerületét és területét!



3. *(A lecke 2. feladatának folytatása.)* Jocó a sok számolás közben rájött arra, hogy van még egy negyedik olyan trapéz is, amelynek a két szára 106 m és 130 m, a területe 1,3 hektár, és az egyik alapon fekvő szöge 43°-os.

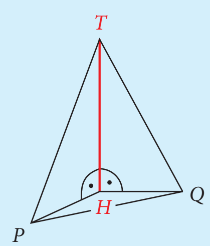
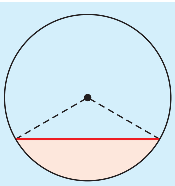
a) Éppen mondani akarta Döncinek, hogy egy más alakú telek is megfelel az adatoknak, de aztán összehasonlította a bevezető feladat szövegét a számolásai eredményével, és mégsem szólt. Miért gondolta meg magát Jocó?
b) Jocó visszatért az első ábrájához, és rájött arra, hogy derékszögű háromszögek nélkül is meg tudja oldani a feladatot, ha a trapézt csak két részre, egy paralelogrammára és egy háromszögre bontja fel. Oldd meg te is ezzel a módszerrel a lecke kidolgozott feladatát!

Csoportverseny

CSOPORTMUNKA

Alkossatok négyfős csoportokat!

1. Oldjátok meg a 6 kijelölt feladatot, a 6. feladat eredményét írjátok fel a táblára! Az a csoport nyer, amelyik először írja fel a jó eredményt. A verseny addig tart, amíg mindegyik csoport felírja eredményét a táblára. Ez alatt az idő alatt mindegyik csoport egyszer javíthat.
Jótanács: érdemes egy kicsit gondolkozni, mielőtt nekiugrotok a formális számolásnak!

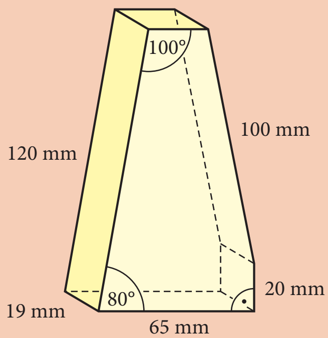
1. feladat Egy paralelogramma átlóinak hossza 30 mm és 50 mm, az általuk közrefogott tompaszög pedig 120°-os. Számítsátok ki mm-ekre kerekítve, hogy mekkorák ennek a paralelogrammának az oldalai! Ezeknek a kerekített számoknak a segítségével állapítsátok meg, hány mm a paralelogramma kerülete!	*A mm-ben megkapott kerület egy 3 jegyű szám. A számjegyeinek összegét jelöljétek A betűvel!*
2. feladat Hány mm^2 annak a paralelogrammának a területe, amelynek az oldalai 10 mm és 70 mm hosszúak, a két oldal által bezárt szög pedig 150°-os?	*A terület értéke egy 3 jegyű szám. A számjegyeinek szorzatát jelöljétek B betűvel!*
3. feladat Hány méter magas a torony? A PQ szakasz hossza 15 m, $PQH\sphericalangle = 42°$, $QPH\sphericalangle = 53°$, $TQH\sphericalangle = 72°$. 	*Kerekítsétek egészekre a torony méterben kifejezett magasságát, a mérőszámot jelöljétek C betűvel!*
4. feladat Egy háromszögnek ismerjük két oldalát és az egyikkel szemközti szögét: $a = 50$ mm, $b = 74$ mm és $\alpha = 37°$. Hány fok a b-vel szemközti β két lehetséges értékének összege?	*Jelöljétek a kapott számot D betűvel!*
5. feladat Egy 20 cm sugarú kört két körszeletre vágunk. A középponti szög 110°-os. Hány cm^2 a kisebbik körszelet területe? (Kerekítsetek egészekre!) 	*Jelöljétek a kapott számot E betűvel!*
6. feladat Számítsátok ki, mennyi a $\left(15 \cdot A - \frac{D}{2}\right) \cdot C - B^2 + E$ értéke!	*A kapott számot írjátok fel a táblára! Zárójelben tüntessétek fel a felírás időpontját!*

2. Az első 3 helyezett csapat bemutatja, milyen egyszerű módszereket alkalmazott (például melyik feladatnál nem kellett számolni).

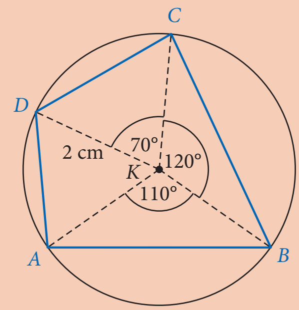
HÁZI FELADAT

1. Egy trapéz alapjainak hossza 57 cm és 41 cm, a hosszabb alapon fekvő egyik szöge 73°. Ezen szög melletti szár 38 cm hosszú. Számítsd ki az átlók és a másik szár hosszát!

2. Egy képernyőtisztító folyadékot tartalmazó flakon alakja egy 19 mm magasságú, ötszög alapú egyenes hasáb. Az ötszög három szögét is ismerjük: 90°, 80° és 100°. Számítsd ki a hasáb felszínét és térfogatát! (A hasáb mindegyik oldallapja téglalap!)



3. A 2 cm sugarú kör középpontja a K pont.



a) Mekkora az $ABCD$ húrnégyszög két-két szemközti szögének összege?

b) Mekkora a négyszög kerülete és területe?

c) Mekkora területű körszeleteket vágnak le a körből a húrnégyszög oldalai?

d) Számítsd ki a négyszög átlóinak hosszát!

EMELT SZINT

A 3. házi feladatban az a) kérdésre a helyes válasz 180°. Véletlen ez, vagy törvényszerű?

10. osztályban részletesen foglalkoztunk ezzel a kérdéssel, de csak a matematikából emelt szintű érettségire készülőknek ajánlottuk ezeket az ismereteket. A mi eszközeink is elegendők azonban a vizsgálathoz!

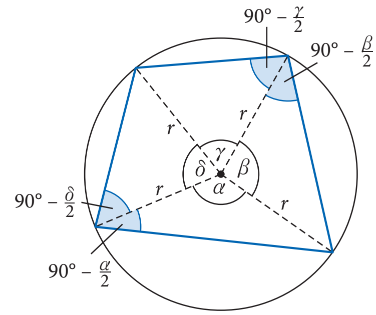
Egyszerű számolással igazolhatjuk, hogy ha a húrnégyszög köré írható kör középpontja a négyszögön belül van, akkor **a húrnégyszög két-két szemközti szögének összege 180°.**

A kör középpontját a húrnégyszög csúcsaival összekötve egyenlő szárú háromszögeket kapunk. A kör középpontjánál keletkező szögek összege 360°, vagyis

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$.

Figyeljük meg az ábra húrnégyszögének két szemközti szögét! Ezek összege így is felírható:

$$90° - \frac{\alpha}{2} + 90° - \frac{\beta}{2} + 90° - \frac{\gamma}{2} + 90° - \frac{\delta}{2}.$$



Ez $360° - \dfrac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2} = 360° - \dfrac{360°}{2} = 180°$, tehát az állítás valóban igaz.

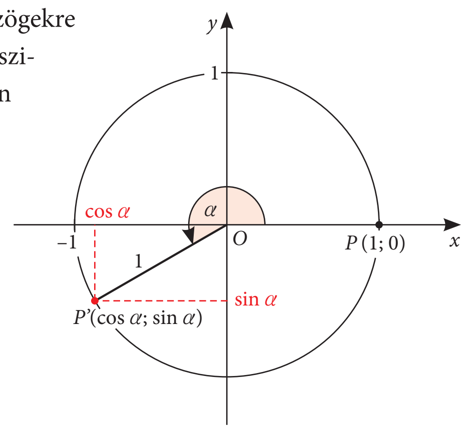
A most bemutatott bizonyítás – némi módosítással – abban az esetben is elvégezhető, ha a kör középpontja nem a húrnégyszög belső pontja, tehát az állítás minden húrnégyszögre igaz.

16 A szinusz és a koszinusz szögfüggvények kiterjesztése

ELMÉLET

Érdekes megfigyeléseket tettünk a 8. leckében a hegyes-, derék- és tompaszögekre vonatkozóan. Ezeket felhasználva most értelmezzük egy tetszőleges szög koszinuszát és szinuszát úgy, hogy az eddigi megállapításaink változatlan formában igazak maradjanak!

Definíció: Forgassuk el a $P(1; 0)$ pontot az origó körül α szöggel! Az elforgatással kapott P' pont első koordinátáját **(cos α)-nak**, a pont második koordinátáját pedig **(sin α)-nak nevezzük**.



Az elforgatás számítógépes animációval is bemutatható (például a *GeoGebra* programmal).

KIDOLGOZOTT FELADAT

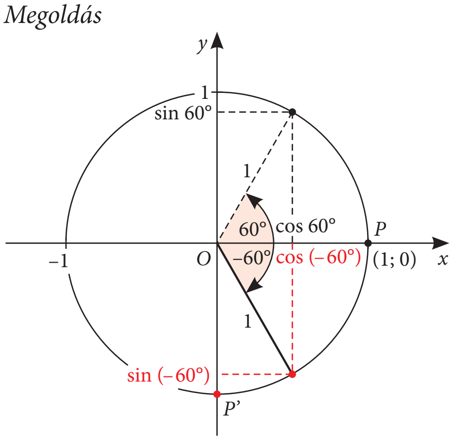
Mennyi

a) a cos 270° és a sin 270°;

b) a cos (−60°) és a sin (−60°);

c) a cos 324° és a sin 324°?

Megoldás



a) Ha a $P(1; 0)$ pontot az origó körül 270°-kal elforgatjuk, akkor a $P'(0; -1)$ pontot kapjuk. A definíció miatt ezt a pontot megadhatjuk a $P'(\cos 270°; \sin 270°)$ alakban is, tehát $\cos 270° = 0$ és $\sin 270° = -1$.

b) Az (1; 0) pontot az origó körül (−60°)-kal (tehát negatív irányban) elforgatva egy olyan pontot kapunk, amelyik a pozitív irányú 60°-os elforgatás után kapott pontnak az x tengelyre vonatkozó tükörképe.

Ezért $\cos(-60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$ és

$\sin(-60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) Ezúttal csak számológép (függvénytáblázat) használatával tudunk kellően pontos választ adni.

Számológéppel:

$\cos 324° \approx 0{,}8090$ és $\sin 324° \approx -0{,}5878$.

Ha függvénytáblázattal dolgozunk, akkor azt használjuk fel, hogy egy szög szinusza és koszinusza ugyanakkora, mint a nála 360°-kal kisebb szög szinusza, illetve koszinusza: $\cos 324° = \cos (324° - 360°) = \cos(-36°) = \cos 36° \approx 0{,}8090$ és

$\sin 324° = \sin(324° - 360°) = \sin(-36°) = -\sin 36° \approx -0{,}5878$.

A példához számítógépes animáció is használható.

FELADAT

1. Rajzolj egy koordináta-rendszert! Ebben forgasd el a $P(1; 0)$ pontot az origó körül 305°-kal!

a) Melyik síknegyedben van a P képe, a P' pont?
b) Milyen előjelű a P' pont első koordinátája?
c) Melyik hegyesszög koszinuszával egyenlő a P' pont első koordinátájának abszolút értéke?
d) Mennyi cos 305°?
e) Milyen előjelű a P' pont második koordinátája?
f) Melyik hegyesszög szinuszával egyenlő a P' pont második koordinátájának abszolút értéke?
g) Mennyi sin 305°?
h) Olvasd le a zsebszámológépedről, mennyi sin 305° és cos 305°!

2. Oldd meg az 1. feladatot úgy, hogy 305° helyett
a) 200°-kal;
b) (−55°)-kal;
c) 560°-kal;
d) (−415°)-kal
forgatod el a $P(1; 0)$ pontot!

HÁZI FELADAT

1. Töltsd ki az alábbi táblázatot a füzetedben a definíció alapján, számológép használata nélkül!

α	−360°	−270°	−180°	−90°	0°	90°	180°	270°	360°
sin α									
cos α									

2. Töltsd ki az alábbi táblázatot a füzetedben!

α	405°	−405°	210°	−210°	660°	−660°	875°	−875°	1080°
sin α									
cos α									

3. Forgasd el a koordináta-rendszer origója körül a $P(1; 0)$ pontot
a) π radiánnal;
b) 2π radiánnal;
c) $-\pi$ radiánnal;
d) -2π radiánnal!
Add meg a P pont képének a koordinátáit, és ennek alapján add meg a szögek koszinuszát, illetve szinuszát!

4. Mekkora α szöggel forgassuk el a koordináta-rendszer kezdőpontja körül a $P(1; 0)$ pontot, hogy a képe
a) a második síknegyedbe kerüljön, és α szinusza megegyezzen a 15° szinuszával;
b) a harmadik síknegyedbe kerüljön, és α szinusza megegyezzen a 287° szinuszával;
c) az első síknegyedbe kerüljön, és α koszinusza megegyezzen a 342° koszinuszával;
d) a negyedik síknegyedbe kerüljön, és α koszinusza megegyezzen a 400° koszinuszával?

17 Elforgatások és szögek

BEVEZETŐ

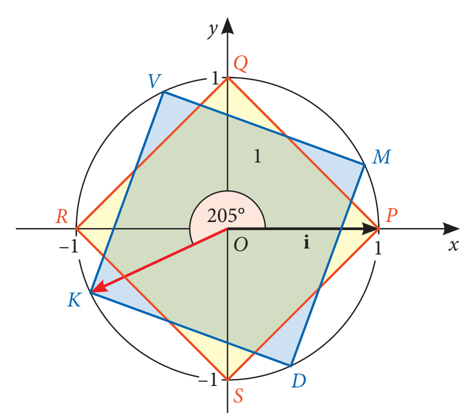
A család vetélkedőműsort nézett a tévében. Dédmama egy „pillanatra” kiment a szobából, és visszajövet éppen azt hallja, ahogy a műsorvezető a következőt mondja: „Gratulálok, János! Jól forgatta a szerencse kerekét!”
– Már hogy forgatta volna? – méltatlankodott dédmama. – Hiszen ugyanúgy áll, mint amikor az előbb kimentem.

Vajon mennyit fordulhatott a szerencsekerék?

Ha a szerencsekerék a forgatás után pontosan ugyanabban a helyzetben áll, mint előtte, akkor biztos, hogy éppen valahány egész fordulatot tett meg, az elfordulás mértéke tehát $k \cdot 360°$, ahol k tetszőleges egész szám.

Megjegyzés
A tévében a vetélkedőműsorok szerencsekerekét ugyan csak egy irányba szabad forgatni, de ettől eltekintve az állítás az összes – pozitív, negatív és nulla – k egész számra igaz.

KIDOLGOZOTT FELADAT



Az ábra $PQRS$ négyzetét úgy forgattuk el a koordináta-rendszer kezdőpontja körül, hogy a $VKDM$ négyzet lett belőle. Az $\overrightarrow{OK}$ egységvektor egyik irányszöge 205° (az irányszög definíciója a 8. leckében is megtalálható).

a) Mekkora az origóból a $VKDM$ négyzet többi csúcsába vezető vektor legkisebb pozitív irányszöge?

b) Mekkora szöggel fordíthattuk el a $PQRS$ négyzetet?

Megoldás

a) Az M csúcs esetében a legkisebb pozitív irányszög $205° - 180° = 25°$, a V csúcsnál $205° - 90° = 115°$, a D csúcsnál $205° + 90° = 295°$.

b) – Ha a $P(1; 0)$ pont az M csúcsba fordult, akkor az elforgatás szöge $25° + k \cdot 360°$, ahol k valamely egész szám. Például $k = 3$ választása esetén az elforgatás szöge $25° + 3 \cdot 360° = 25° + 1080° = 1105°$; ha $k = -2$, akkor az elforgatás szöge $25° - 2 \cdot 360° = 25° - 720° = -695°$.

– Ha a $P(1; 0)$ pont a V csúcsba fordult, akkor az elforgatás szöge $115° + k \cdot 360°$;

– ha a K csúcsba fordult, akkor $205° + k \cdot 360°$;

– ha pedig a D csúcsba fordult, akkor $295° + k \cdot 360°$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

FELADAT

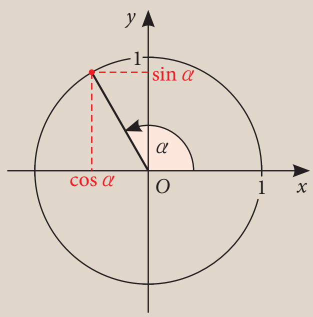
1. Add meg a *VKDM* négyzet csúcsainak koordinátáit a kidolgozott feladatban végzett számítások eredményeit felhasználva!

2. Az α szög 123°-os. Hány fokos lehet a β, ha

a) $\sin\beta = \sin\alpha$ és $\cos\beta = \cos\alpha$;

b) $\sin\beta = \sin\alpha$, de $\cos\beta \neq \cos\alpha$;

c) $\sin\beta \neq \sin\alpha$, de $\cos\beta = \cos\alpha$?



3. Milyen előjelű az α szinusza és koszinusza, ha

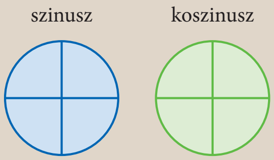
a) $0° < \alpha < 90°$;

b) $90° < \alpha < 180°$;

c) $180° < \alpha < 270°$;

d) $270° < \alpha < 360°$?

4. A 3. feladat eredményeit felhasználva tegyél +, illetve – jeleket a megfelelő helyekre:



HÁZI FELADAT

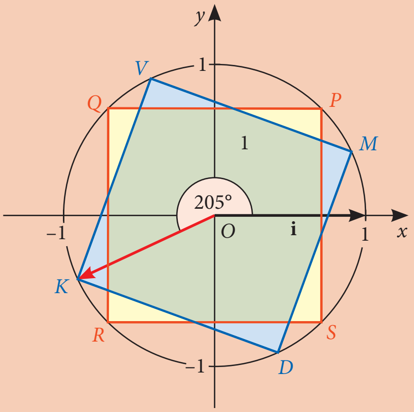
1. Töltsd ki a füzetedben a következő táblázat üres helyeit!

α	40°	110°	180°	350°	320°	390°	460°	530°
$\sin\alpha$								
$\cos\alpha$								

2. Az $\overrightarrow{OK}$ egyik irányszöge most is, mint a kidolgozott feladatban, 205°.

a) Mekkora szöggel forgathattuk el a *PQRS* négyzetet, ha a *VKDM* négyzet lett belőle?

b) Mik a *PQRS* négyzet csúcsainak koordinátái?

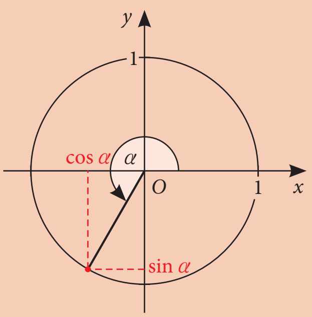


3. Az α szög 4 radián. Hány radián lehet a β, ha

a) $\sin\beta = \sin\alpha$ és $\cos\beta = \cos\alpha$;

b) $\sin\beta = \sin\alpha$, de $\cos\beta \neq \cos\alpha$;

c) $\sin\beta \neq \sin\alpha$, de $\cos\beta = \cos\alpha$?

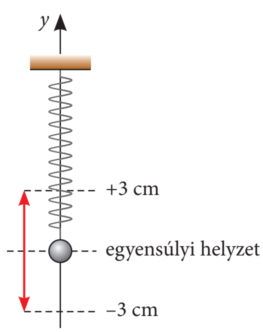


18 A valós számok szinusza, koszinusza

KIDOLGOZOTT FELADAT

Fizikai problémák tárgyalásánál többször előfordul, hogy a szögeket radiánban kell mérni, mert a képletek csak ebben az esetben adnak helyes eredményt. A következő feladatban egy ilyen esetről lesz szó.

Egy csavarrugóra függesztett test harmonikus rezgőmozgást végez egy függőleges egyenes mentén. A rezgés maximális kitérése (amplitúdója) 3 cm, a rezgés körfrekvenciája $4\ \frac{1}{\mathrm{s}}$ $\left(\text{tehát a rezgés frekvenciája } \frac{4}{2\pi} \approx 0{,}64\ \frac{1}{\mathrm{s}}\right)$; a másodpercben mért időt t-vel jelöljük. A test *kitérését* (az egyensúlyi helyzettől mért előjeles távolságot) az $y(t) = 3 \cdot \sin(4 \cdot t)$ összefüggéssel cm-ben kapjuk meg. Mivel a $(4 \cdot t)$ minden szóba jövő t esetén egy mértékegység nélküli valós szám, ezért láthatjuk, hogy itt nem egy fokokban megadott szög szinuszáról van szó.



Számítsuk ki a test kitérését $t = 0$, $t = 1$ és $t = 5$ (s) esetén!

Megoldás

Ki kell számítanunk az $y(0)$, az $y(1)$ és az $y(5)$ helyettesítési értékeket.

$y(0) = 3 \cdot \sin(4 \cdot 0) = 3 \cdot \sin 0 = 3 \cdot 0 = 0$, tehát az időmérés kezdetekor a test kitérése éppen 0 (a test az egyensúlyi helyzetén halad át).

$y(1) = 3 \cdot \sin(4 \cdot 1) = 3 \cdot \sin 4 \approx 3 \cdot (-0{,}7568) \approx -2{,}27$, tehát 1 másodperc elteltével a test az egyensúlyi helyzete „alatt”, attól kb. 2,27 cm-re van.

$y(5) = 3 \cdot \sin(4 \cdot 5) = 3 \cdot \sin 20 \approx 3 \cdot 0{,}9129 \approx 2{,}74$, tehát 5 másodpercnyi rezgés után a test az egyensúlyi helyzete „felett”, attól kb. 2,74 cm-re van.

Megjegyzés

Az előző számolásokban sin 4 jelentése a 4 radián szinusza, sin 20 jelentése pedig a 20 radián szinusza. Ezeket a szögeket kifejezhetnénk fokokban is (4 radián ≈ ≈ 229,2°, 20 radián ≈ 1146°), de ez felesleges részletszámítás lenne, hiszen a számológépek a radiánban kifejezett szögek szinuszát is képesek megadni.

FELADAT

1. A kidolgozott feladatban leírt rezgőmozgást végző test sebességét a $v(t) = 12 \cdot \cos(4 \cdot t)$ összefüggés alapján kapjuk, mégpedig $\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$ egységben mérve. Számítsd ki a rezgő test sebességét $t = 0$, $t = 1$ és $t = 5$ (s) esetén! (A pozitív eredmény azt jelenti, hogy a test éppen „felfelé” mozdul, a negatív pedig azt, hogy „lefelé”.)

2. Folytasd az előző feladatot! A test gyorsulását az $a(t) = -48 \cdot \sin(4 \cdot t)$ összefüggés írja le. A gyorsulást $\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}$-ben kapjuk.

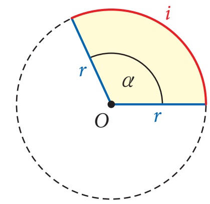
a) Számítsd ki a rezgő test gyorsulását $t = 0$, $t = 1$ és $t = 5$ (s) esetén!

b) A következő kijelentés igaz: „A harmonikus rezgőmozgást végző test gyorsulása egyenesen arányos a kitérésével.” Mennyi most az arányossági tényező?

ELMÉLET

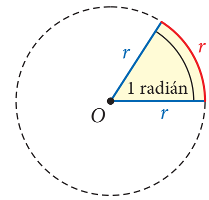
Emlékeztető

– Azt a számot, amely megmutatja, hányszorosa a középponti szöghöz tartozó körív a körsugárnak, a szög *ívmértékének* nevezzük. Ebből adódóan *egy középponti szög ívmértéke úgy számítható ki, hogy a hozzá tartozó ívhosszúságot elosztjuk a kör sugarával.*



– **1 radián** annak a központi szögnek a nagysága, melyhez egy r sugarú, r hosszúságú körív tartozik.

– α radián $= \frac{\pi}{180} \cdot \alpha°$, $\qquad \alpha° = \frac{180}{\pi} \cdot \alpha$ radián.



Mindehhez tegyük még hozzá a következőket:

– Ha a kör sugara 1 egység, akkor maga az ívhosszúság adja meg a középponti szög ívmértékét.
– Az 1 sugarú kör kerülete 2π, ezért a 360°-os teljesszög ívmértéke 2π.
– Érdemes tudni:

Milyen szög?	Teljesszög	Egyenesszög	Derékszög	Nevezetes hegyesszögek			Nevezetes tompaszögek		
Fokban	360	180	90	30	45	60	120	135	150
Radiánban	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

FELADAT

3. Töltsd ki a táblázat üres helyeit a füzetedben!

A szög fokban	30	225									
A szög radiánban			0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2{,}5\pi$
A szög szinusza											
A szög koszinusza											

4. Számítsd ki számológép használata nélkül: $\sin\frac{5\pi}{3} \cdot \cos\frac{5\pi}{6} + \cos\frac{5\pi}{3} \cdot \sin\frac{5\pi}{6}$!

HÁZI FELADAT

1. Töltsd ki a táblázat üres mezőit a füzetedben!

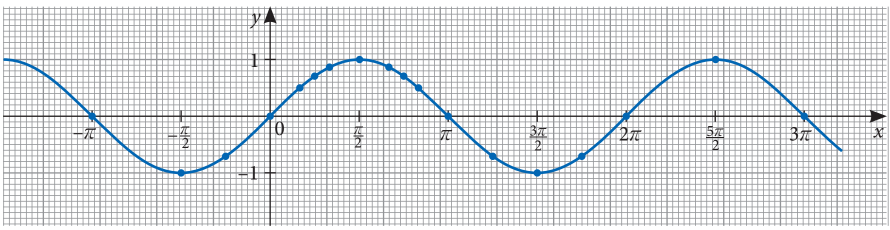
α	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\pi$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	-2π	$\frac{4\pi}{3}$
$\sin\alpha$										
$\cos\alpha$										

2. A hálózati váltakozó feszültség időbeli lefolyását az $U(t) = 230 \cdot \sin(314{,}16 \cdot t)$ összefüggés adja meg. Ha a képletben a mérés kezdete óta eltelt t időt másodpercben (s) adjuk meg, akkor a feszültséget voltban (V) kapjuk meg. Számítsd ki, hogy mekkora a feszültség, ha $t = 0$, $t = 0{,}01$, $t = 0{,}015$, $t = 0{,}02$, $t = 0{,}025$, $t = 10{,}823$!

19 A szinuszfüggvény

BEVEZETŐ

Minden valós számnak van szinusza. Rajzoljuk meg annak a függvénynek a grafikonját, amely minden valós számhoz hozzárendeli a szám szinuszát! $f(x) = \sin x$, ahol x valós szám
Ilyen ábrát kapunk:



ELMÉLET

Definíció: Ha minden valós számhoz hozzárendeljük a szinuszát, a kapott függvényt **szinuszfüggvénynek** nevezzük.

Jele: sin. Egy x valós számhoz hozzárendelt szám jele: $\sin x$.
A szinuszfüggvény értelmezési tartománya: $\mathbf{R}$, értékkészlete: $[-1; 1]$, mert minden $x \in \mathbf{R}$ esetén $-1 \leq \sin x \leq 1$, és a $[-1; 1]$ intervallum minden eleme legalább egy számnak szinusza.
A szinuszfüggvény grafikonjának neve: szinuszgörbe.

FELADAT

1. Töltsd ki a táblázatot, majd annak segítségével ábrázold a füzetedben az $x \mapsto \sin x$ függvényt!

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$										

2. Jelöld meg az előbbi koordináta-rendszer abszcisszatengelyén
a) pirossal azokat a szakaszokat, amelyeken a szinuszfüggvény növekedő;
b) kékkel azokat a pontokat, amelyekhez ez a függvény 1-et rendel hozzá (ezek a függvény maximumhelyei);
c) feketével azokat a pontokat, amelyekhez ez a függvény (-1)-et rendel hozzá (ezek a függvény minimumhelyei)!

3. Mely szakaszokon fogyó a szinuszfüggvény?

4. Töltsd ki a következő táblázat üres helyeit!

x	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{8\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{5}$	$-\frac{2\pi}{5}$	$-\frac{4\pi}{3}$
$\sin x$									
$\sin(-x)$									

5. Vizsgáld meg a szinuszgörbén, milyen kapcsolatban van $\sin(x+2\pi)$ és $\sin x$, ha

a) $x=-\frac{3\pi}{2}$; **b)** $x=-\frac{3\pi}{4}$; **c)** $x=\frac{2\pi}{3}$; **d)** $x=\frac{5\pi}{3}$!

6. Milyen sejtést fogalmazhatsz meg

a) a 4. feladat; **b)** az 5. feladat

eredményei alapján? Sejtésedet igazold a szinusz definíciója segítségével!

7. Milyen valós számok esetén teljesül, hogy

a) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; **b)** $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$?

ELMÉLET

A feladatok (és a szinusz szögfüggvény definíciója) alapján megállapíthatjuk a szinuszfüggvény fontos tulajdonságait.
A szinuszfüggvény

- szigorúan monoton nő a $\left[-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right]$ intervallumokon, szigorúan monoton csökken a $\left[\frac{\pi}{2}+l\pi;\frac{3\pi}{2}+l\pi\right]$ intervallumokon ($k, l\in\mathbf{Z}$);
- zérushelyei a $k\cdot\pi$ számok ($k\in\mathbf{Z}$);
- maximumhelyei: $\left(\frac{\pi}{2}+l\cdot 2\pi\right)$ számok ($l\in\mathbf{Z}$), a maximum értéke 1;
- minimumhelyei: $\left(\frac{3\pi}{2}+m\cdot 2\pi\right)$ számok ($m\in\mathbf{Z}$), a minimum értéke -1;
- *periodikus*, a periódusa 2π. Szemléletesen ez azt jelenti, hogy ha a függvény grafikonját az x tengellyel párhuzamosan eltoljuk 2π-vel, akkor az eredeti függvény grafikonját kapjuk. A 2π-nél rövidebb eltolás esetén (ha az eltolás hossza nem 0) ez nem fordulhat elő. Ezért nevezzük a 2π-t a szinuszfüggvény periódusának. A periodikusság a szinusz szögfüggvény definíciójából is látható, hiszen bármely x valós szám esetén $\sin(x+2\pi)=\sin x$;
- grafikonja szimmetrikus az origóra, ezért *páratlan függvény*. Ez a szinusz szögfüggvény definíciójából is látható tulajdonság, hiszen bármely x valós szám esetén $\sin(-x)=-\sin x$.

HÁZI FELADAT

1. Mely pontokban metszi a szinuszgörbét az

a) $y=\frac{1}{2}$; **b)** $y=-\frac{1}{2}$

egyenes?

2. Vizsgáld meg a szinuszgörbén, milyen kapcsolatban van $\sin(x+\pi)$ és $\sin x$, ha

a) $x=-\frac{3\pi}{2}$; **b)** $x=-\frac{3\pi}{4}$; **c)** $x=\frac{2\pi}{3}$; **d)** $x=\frac{5\pi}{3}$!

3. Keress a szinuszgörbe vizsgálatával olyan x és y valós számokat, amelyekre igaz, hogy

a) $2+\sin x=\sin y$; **c)** $2\cdot\sin x=\sin y$;

b) $1+\sin x=\sin y$; **d)** $(-2)\cdot\sin x=\sin y$!

20 A koszinuszfüggvény

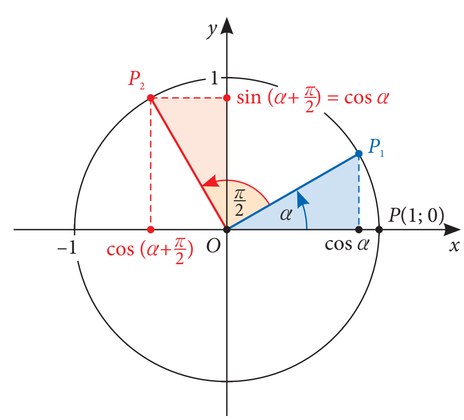
FELADAT

1. Töltsd ki a táblázat üres helyeit!

α	$-\frac{5\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{7\pi}{2}$
$\cos\alpha$										
$\alpha+\frac{\pi}{2}$										
$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$										

ELMÉLET

1. Az 1. feladat megoldása során láthatjuk, hogy egy α szög koszinusza ugyanakkora, mint a nála $\frac{\pi}{2}$-vel nagyobb $\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$ szög szinusza. Ezt a jobb oldali ábrán is megfigyelhetjük.



Ha a $P(1;\ 0)$ pontot az origó körül α szöggel elforgatjuk, akkor a $P_1(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$ pontot kapjuk. Ezt a pontot az origó körül $\frac{\pi}{2}$ radiánnal tovább forgatva a $P_2\left(\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right);\ \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right)$ ponthoz jutunk. Az ábra két derékszögű háromszögének egybevágósága miatt azonnal adódik az összefüggés: a P_1 pont első koordinátája egyenlő a P_2 pont második koordinátájával, vagyis $\cos\alpha = \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$.

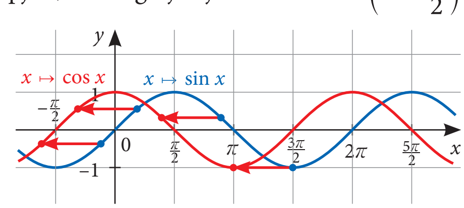
Az ábrán az α hegyesszög, de a kapott összefüggés minden szög esetében igaznak bizonyul.

Igaz tehát, hogy bármely x valós szám esetén $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

2. Rendeljük hozzá minden valós számhoz a koszinuszát! A most kapott függvényt **koszinuszfüggvénynek** nevezzük. Jele: cos. Egy x valós számhoz hozzárendelt szám jele: $\cos x$.

A koszinuszfüggvény értelmezési tartománya: **R**, értékkészlete: $[-1;\ 1]$, mert minden $x \in \mathbf{R}$ esetén $-1 \le \cos x \le 1$, és a $[-1;\ 1]$ intervallum minden eleme legalább egy számnak koszinusza.

A koszinuszfüggvény grafikonjának neve: *koszinuszgörbe*. Ezt a görbét megkapjuk, ha megrajzoljuk az $x \mapsto \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ függvény grafikonját. Ahogyan azt már 10. osztályban is láttuk (például a másodfokú függvények ábrázolásánál), ennek a függvénynek a grafikonját egy x tengellyel párhuzamos, negatív irányú, $\frac{\pi}{2}$ nagyságú eltolással, a szinuszfüggvény grafikonjából kaphatjuk meg. Ezt mutatja az ábra.



A grafikon alapján megadhatók a koszinuszfüggvény legfontosabb tulajdonságai.
A koszinuszfüggvény
- szigorúan monoton csökken a $[k\pi; \pi + k\pi]$ intervallumokon, szigorúan monoton nő a $[\pi + l\pi; 2\pi + l\pi]$ intervallumokon ($k, l \in \mathbf{Z}$);
- zérushelyei a $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ számok ($k \in \mathbf{Z}$);
- maximumhelyei: $2k \cdot \pi$ számok ($k \in \mathbf{Z}$), a maximum értéke 1;
- minimumhelyei: $(\pi + 2k \cdot \pi)$ számok ($k \in \mathbf{Z}$), a minimum értéke -1.
- *periodikus* (ugyanúgy, mint a szinuszfüggvény), a periódusa 2π. A periodikusság a koszinusz szögfüggvény definíciójából is látható, hiszen bármely x valós szám esetén $\cos(x + 2\pi) = \cos x$;
- grafikonja szimmetrikus az ordinátatengelyre, tehát *páros függvény.* Ez a koszinusz szögfüggvény definíciójából is látható tulajdonság, hiszen bármely x valós szám esetén $\cos(-x) = \cos x$.

FELADAT

2. Oldd meg a $\cos x = -\cos \frac{\pi}{3}$ egyenletet az alább megadott lépéseket végrehajtva!

a) Mennyi $-\cos \frac{\pi}{3}$?

b) Melyik két síknegyedben lehetnek a keresett szögek? Készíts ábrát!

c) Adj meg mindkét síknegyedben egy olyan szöget, amelynek a koszinusza egyenlő a $\left(-\cos \frac{\pi}{3}\right)$-mal!

d) Add meg az egyenlet megoldáshalmazát!

3. **a)** Az elmélet I. részének ábráját használva állapítsd meg, milyen kapcsolat van P_1 második koordinátája és P_2 első koordinátája között!

b) Milyen kapcsolat van $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ és $\sin x$ között?

4. Vizsgáld meg a koszinuszgörbén, milyen kapcsolatban van $\cos(x + \pi)$ és $\cos x$, ha

a) $x = -\frac{3\pi}{2}$; **c)** $x = \frac{2\pi}{3}$;

b) $x = -\frac{3\pi}{4}$; **d)** $x = \frac{5\pi}{3}$!

HÁZI FELADAT

1. Állítsd nagyság szerinti sorrendbe a következő számokat!
cos 1; cos 2; cos 3; cos 4; cos 5; cos 6; cos 7.

2. Mekkora lehet az x, ha

a) $\cos x = 0{,}5$; **b)** $\cos x = -0{,}5$; **c)** $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; **d)** $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$?

3. Töltsd ki a táblázat üres helyeit! Milyen összefüggéseket veszel észre?

x	$-\frac{5\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$										
$\cos x$										
$x - \frac{\pi}{2}$										
$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$										
$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$										

21 Transzformációk, függvénytulajdonságok

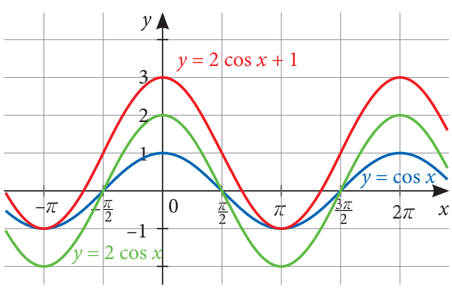
KIDOLGOZOTT FELADAT

Ábrázoljuk és jellemezzük az $f\colon x \mapsto 2\cos x + 1$ függvényt!

Megoldás

Az f függvény értelmezési tartománya – ha nem adtunk meg mást – a valós számok halmaza.

Az ábrázolást több lépésben végezhetjük. Első lépésként a $g\colon x \mapsto \cos x$ függvény, másodikként a $h\colon x \mapsto 2\cos x$, harmadik lépésben pedig az f függvény grafikonját rajzoljuk meg.



A g függvény grafikonját éppen az előző leckében ismertük meg. A h grafikonját úgy kapjuk meg, hogy g grafikonját az x tengelyre merőlegesen „kétszeresére nyújtjuk”. (Ez azt jelenti, hogy a grafikon minden pontjának második koordinátáját a 2-szeresére változtatjuk. Így minden pont 2-szer akkora távolságra kerül az x tengelytől, mint amekkora az eredeti távolsága volt.) Végül f grafikonját a h grafikonjának az y tengellyel párhuzamos, pozitív irányú, 1 egység nagyságú eltolásával kapjuk meg.

Az egyes függvények grafikonját közös koordináta-rendszerben szemléltettük.

Az f függvény értékkészlete: $[-1; 3]$, a függvény periodikus, a periódusa 2π.

A függvény maximumhelyei megegyeznek a koszinuszfüggvény maximumhelyeivel, ugyanez a minimumhelyekre is igaz. A maximum értéke 3, a minimum értéke pedig -1.

A függvény grafikonja szimmetrikus az y tengelyre, tehát az f páros függvény.

A zérushelyek meghatározásához egy *trigonometrikus egyenletet* oldunk meg: a $2\cos x + 1 = 0$ egyenlet valós megoldásait keressük. Az egyenletet átalakítva a $\cos x = -\frac{1}{2}$ egyenlethez jutunk.

Az f függvény zérushelyei tehát azok a valós számok, amelyeknek a koszinusza $-\frac{1}{2}$. Ezeket a számokat az előző (43.) lecke 2. b) házi feladatában már megkaptuk: $\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, illetve $-\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$.

FELADAT

1. Melyik az a függvény, amelynek grafikonját úgy kapjuk, hogy

a) az $x \mapsto \sin x$ függvény grafikonját eltoljuk az y tengely mentén $(-2{,}5)$-del;

b) az $x \mapsto \cos x$ függvény grafikonját „felére összenyomjuk” az y tengely (ordinátatengely) mentén, azaz a grafikon minden pontjának második koordinátáját a felére csökkentjük?

c) Ábrázold a függvényeket!

2. Ábrázold és jellemezd az alábbi függvényeket!

a) $f\colon x \mapsto -2\sin x$

b) $g\colon x \mapsto 0{,}5\sin x + 2$

c) $h\colon x \mapsto 1 - \cos x$

3. A függvények értékkészletének figyelembevételével pótold a hozzárendelési szabályokból hiányzó számokat, majd ábrázold a függvényeket derékszögű koordináta-rendszerben!

a) $f(x) = \ldots \sin x + \ldots$ és $f(x)$ értékkészlete $[-3; 1]$;

b) $g(x) = \ldots \cos x + \ldots$ és $g(x)$ értékkészlete $[0; 6]$.

4. A függvény megadott értékeinek segítségével ábrázold a függvényt, majd határozd meg a függvény hozzárendelési szabályában a hiányzó számokat!

a) $f(x) = \ldots \sin x + \ldots,$
ha $f(0) = 1$ és $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

b) $g(x) = \ldots \cos x + \ldots,$
ha $g(0) = 1$ és $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$

5. A 2. feladatban ábrázolt grafikonok segítségével oldd meg az egyenleteket!

a) $0{,}5 \sin x + 2 = 1{,}5$ **b)** $-2 \sin x = -1$

HÁZI FELADAT

1. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a következő függvényeket!

a) $x \mapsto \cos x$
b) $x \mapsto 0{,}5 \cos x$
c) $0{,}5x \mapsto \cos x - 2$

Határozd meg a c)-beli függvény értékkészletét!

2. Ábrázold az

a) $x \mapsto \sin x$;
b) $x \mapsto -\sin x$;
c) $x \mapsto 3 - \sin x$;
d) $x \mapsto |\sin x|$

függvényt!

3. Figyeld meg a 2. házi feladatban ábrázolt függvényeket! Közülük

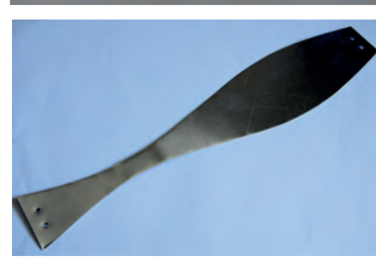
a) melyik páros;
b) melyik páratlan;
c) melyik periodikus?

Amelyik periodikus, annak add meg a periódusát!

Megállapításaidat függvényábrázoló programmal is ellenőrizheted.

RÁADÁS

A hétköznapi életben is találkozhatunk a szinuszfüggvény grafikonjával. Ugyanis ha egy hengert ferde síkkal vágunk el, és utána a palástját kiterítjük a síkba, akkor a palást határoló vonala éppen egy szinuszgörbe. Varrónők szabásmintáin látni ilyet, ott, ahol egy ingujjat kell hozzászabni az inghez. Ha egy ferdén elvágott szaláminak lehúzod a héját, és kiteríted a síkba, ugyanezt tapasztalod. A bádogosok az ereszcsatornák illesztésénél találkoznak ezzel a görbével.



Ezt vágja ki a bádogos, és a középső cikkelyek hajlíthatók belőle

FELADATOK

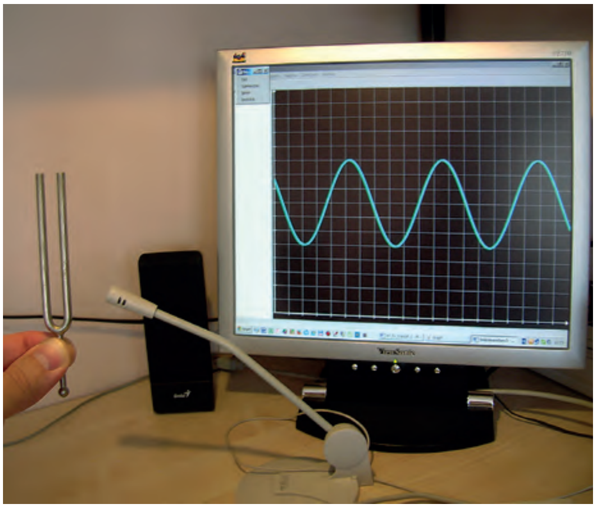
1. Nyomtasd ki, vagy rajzold meg közelítőleg az $y = \sin x$ függvény grafikonját egy papírra! (Valamivel több mint egy teljes periódus férjen ki a lapra.) Vágd szét a lapot a görbe mentén! Tekerd össze, illeszd össze egy teljes periódusnál egyenes hengerré, és ellenőrizd, hogy be lehet-e „zárni” a palástot egy ferde síklappal! Próbálj kapcsolatot keresni: mekkora a henger átmérője? Mekkora a henger sugara? Hogy lehetne ferdébben elvágott hengerhez jutni?

2. Bizonyítsd be, hogy ha egy hengert egy ferde (például 45°-ban metsző) síkkal elmetszünk, és a palástját síkban kiterítjük, a határoló vonala egy szinuszgörbe lesz!

22 Hangfrekvencia és függvénytranszformáció

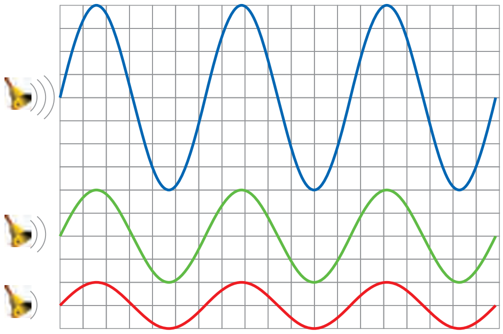
BEVEZETŐ

A hang forrása – egy hangszer, hangszóró membránja vagy akár az emberi hangszálak – rezgésbe hozza a levegő részecskéit, ezt a rezgést hangként érzékeljük a fülünkkel.
Bár az általunk hallott hangok a valóságban általában nagyon összetettek, a hangtan alapjait már a legegyszerűbb, legtisztább rezgések tanulmányozásával is megérthetjük. Az egyik legtisztább rezgés a hangvilla rezgése, amely az oszcilloszkóp képernyőjén egyszerű szinuszgörbeként jelenik meg.

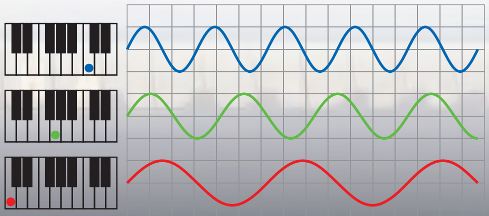


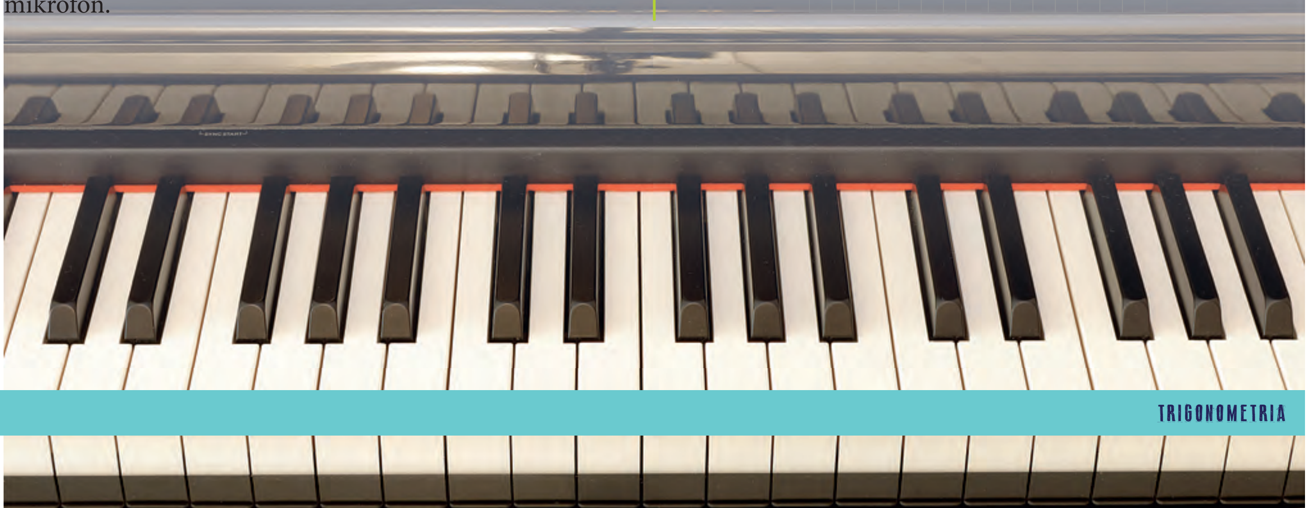
Az oszcilloszkóp egy olyan szerkezet, amely láthatóvá teszi az elektromos feszültség változásait. Az oszcilloszkóp a nagyon gyors változások vizsgálatára is alkalmas (például hangok elemzése, elektromágneses hullámok). A hangvilla rezgéseinek megjelenítéséhez a levegő nyomásváltozásait (amit az emberi fül hangként érzékel) először elektromos-feszültség-változássá kell alakítani. Ezt a célt szolgálja a mikrofon.

Ha a hangvilla erősebb hangot ad ki, akkor az oszcilloszkóp képernyőjén nagyobb lesz a szinuszgörbék „tágassága” (amplitúdója). Minél nagyobb az amplitúdó, annál nagyobb hangerővel szól a hang.



A különböző magasságú hangokhoz tartozó szinuszgörbék egy másik fontos jellemzőjükben – a periódusuk hosszában – térnek el egymástól. A feleakkora periódus azt jelenti, hogy a hangforrás kétszer annyi teljes rezgést végzett egy másodperc alatt, mint a hosszabb periódusú. Ekkor azt mondjuk, hogy a rövidebb periódusú rezgésnek megfelelő hang *egy oktávval* magasabb, mint a kétszer olyan hosszú periódusú rezgésnek megfelelő hang. Az ábra is egy ilyen esetet szemléltet a zongorabillentyűkön. A kék ponttal jelzett billentyű leütésekor egy oktávval magasabb hangot hallunk, mint a piros ponttal jelzett billentyű leütésekor.





FELADAT

1. Töltsd ki a táblázat üres helyeit! A füzetedben dolgozz!

x	$-\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$											
$2x$											
$\sin 2x$											

KIDOLGOZOTT FELADAT

Ábrázoljuk az $x \mapsto \sin 2x$ függvényt! (A $\sin 2x$ helyett $\sin(2x)$ is írható, de általában nem tesszük ki a zárójelet.)

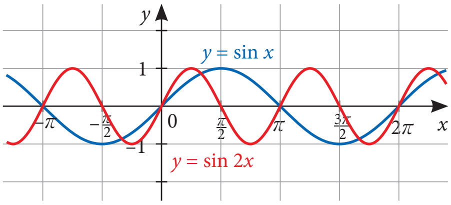
Megoldás

Képzeljük el, hogy a $P(1; 0)$ pontot két példányban, kétféle sebességgel forgatjuk az origó körül! Amíg az egyik pont α szöggel fordul el, addig a másik pontosan 2α szöggel.

A szinuszfüggvény megjeleníti az origó körül elforgatott $P(1; 0)$ pont második koordinátáját. Ha az elfordulás szöge x, akkor az elforgatott pont második koordinátája $\sin x$.

Mit jelenít meg az $x \mapsto \sin 2x$ függvény? Azt mutatja meg, hogy mennyi a „kétszer olyan gyorsan forgó” pont második koordinátája akkor, amikor az első pont éppen x szöggel fordult el (és így a második koordinátája $\sin x$). Mivel a „kétszeres sebességgel” futó pont feleakkora idő alatt futja be a teljes kört, mint a másik pont, ezért a lassabban forgó pont még csak π szöggel fordult el addig, amíg a gyorsabb már 2π-vel. A gyorsabban forgó pont második koordinátáját tehát egy olyan függvény írja le, amelynek a periódusa π.

A két függvényt közös koordináta-rendszerben ábrázolva mutatja az ábra.



FELADAT

2. Jellemezd az $x \mapsto \sin 2x$ függvényt a következő szempontok alapján: értelmezési tartomány, értékkészlet, periodikusság, paritás (páros, páratlan vagy egyik sem), zérushelyek, szélsőértékek!

3. Ábrázold és jellemezd az $x \mapsto \sin\frac{1}{2}x$ függvényt! (Használhatod a Kidolgozott feladat szemléletes modelljét is.)

4. Ábrázold és jellemezd az $x \mapsto 3\cos 2x$ függvényt!

5. Határozd meg a hiányzó együtthatókat a függvény tulajdonságainak ismeretében!
$f: x \mapsto \ldots \sin \ldots x$, ha f minimuma $-3{,}5$; és f zérushelyei között a legkisebb pozitív szám $\frac{2\pi}{3}$.

HÁZI FELADAT

1. Ábrázold és jellemezd az $x \mapsto \cos 3x$ függvényt!

2. Oldd meg az alábbi egyenleteket a $[-\pi; \pi]$ alaphalmazon!

a) $2\sin 2x = -1$ **b)** $2\cos\frac{1}{2}x = 1$

3. Ábrázold és jellemezd az $x \mapsto 3\sin 2x - 3$ függvényt!

Megoldásaidat függvényábrázoló programmal is ellenőrizheted.

23 A tangens szögfüggvények

BEVEZETŐ

Bence ma Dönciéknél készíti a matematika házi feladatát. Az egyik feladat így szól:

„Egy háromszög egyik szögének szinusza 0,47.

a) Mekkora lehet ez a szög?

b) Mekkora lehet ennek a szögnek a koszinusza és a tangense?”

Dönci mindjárt nyomogatni kezdi a zsebszámológépe gombjait.

– Nézd, Bence – mondja –, ez a szög 28,03429654°-os, a koszinusza 0,882666414, a tangense 0,532477493.

Bence persze mindjárt beleköt:

– *Először is* ne adj meg ennyi számjegyet, mert a szinusz csak 2 értékes jegyre volt megadva. Elég azt írni, hogy $\alpha \approx 28°$; *másodszor* meg elfelejtetted, hogy az α tompaszög is lehet.

– Tényleg – jön rá Dönci.

– Akkor az is lehet – folytatja –, hogy $\alpha = 180° - 28° = 152°$. Tehát a feladat a) részének megoldása: 28° vagy 152°. A b) részben a 28°-os szög esetében jók azok az eredmények, amelyeket először írtam, csak kerekíteni kell őket: $\cos 28° \approx 0{,}88$, $\operatorname{tg} 28° \approx 0{,}53$. A 152°-os szög koszinusza a $\cos 28°$ ellentettje, vagyis $\approx -0{,}88$.

Itt azonban Dönci elakadt!

– Te Bence, a tompaszög tangensét még nem is tanultuk!

– Igaz – felel Bence –, ennyivel könnyebb megoldanunk a feladatot. Írjuk oda, hogy a 152°-os szögnek nincs tangense!

Dönci azonban a számológép nagy barátja, ezért megnézi, hátha erről is megtudhat valamit. Igaza van, a gép kiad egy eredményt: $\operatorname{tg} 152° \approx -0{,}53$.

Vajon honnan „tudja” a számológép, hogy mennyi egy tompaszög tangense? Hogyan kell értelmezni egy tetszőleges szög tangensét?

ELMÉLET

Definíció: Ha egy α szög koszinusza nem egyenlő 0-val, akkor a $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ hányadost az α *tangensének* nevezzük.

A szöget nemcsak fokban adhatjuk meg, hanem radiánban is. Így valós számoknak is értelmezzük a tangensét, amennyiben a szám koszinusza nem nulla.

Például

$\sin\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ és $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$, ezért $\operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} : \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\sqrt{3}$.

Az α szögnek nincs tangense, ha $\cos\alpha = 0$, azaz ha $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\cdot\pi$, ahol a k egy egész számot jelöl.

Megjegyzés

10. osztályban láttuk, hogy bármely α hegyesszögre igaz, hogy $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Az új definíció tehát a hegyesszögek esetében ugyanazt adja eredményül, amit korábban a derékszögű háromszög befogóinak arányaként kaptunk.

FELADAT

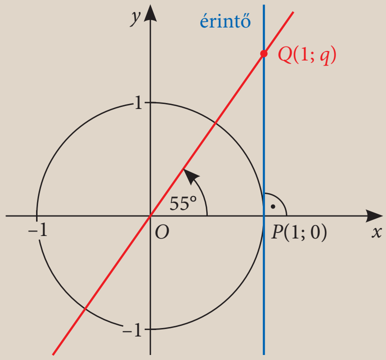
1. Töltsd ki számológép segítségével a következő táblázatot a füzetedben!

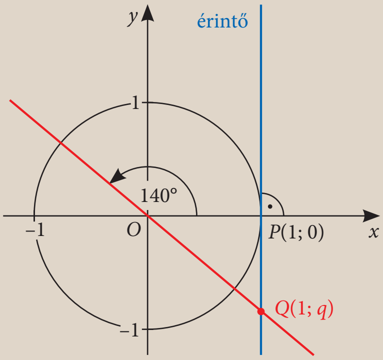
α	−80°	−70°	−50°	−30°	−10°	10°	30°	50°	70°	80°
$\operatorname{tg}\alpha$										

2. Töltsd ki a táblázat üres helyeit a füzetedben!

α	90°	135°	180°	210°	270°	315°	360°	390°
$\sin\alpha$								
$\cos\alpha$								
$\operatorname{tg}\alpha$	nincs							

3. Az origó középpontú, 1 sugarú körhöz érintőt húztunk a $P(1; 0)$ pontban. Az origón áthaladó egyenes ezt az érintőt a Q pontban metszi. Mutasd meg, hogy a Q pont második koordinátája éppen az α tangensével egyenlő, vagyis igaz, hogy $q = \operatorname{tg}\alpha$. Az első ábrán $\alpha = 55°$, a második ábrán pedig $\alpha = 140°$.





3. Egy forgásszög szinusza 0,742.

a) Készíts ábrát az egységkörrel!

b) Hány fokos lehet ez a szög? Az összes lehetőséget add meg!

c) Add meg a lehetséges szögek koszinuszát és tangensét!

HÁZI FELADAT

1. Egy szög szinusza 0,829.

a) Hány fokos lehet ez a szög, ha tudjuk, hogy 0°-nál nagyobb és 360°-nál kisebb?

b) Add meg a lehetséges szögek koszinuszát és tangensét!

2. Egy szög koszinusza 0,877.

a) Hány fokos lehet ez a szög, ha tudjuk, hogy (–90°)-nál nagyobb és 180°-nál kisebb?

b) Add meg a lehetséges szögek szinuszát és tangensét!

3. Állítsd növekedő sorrendbe a következő számokat!

tg (–50°); tg (–20°);
tg 10°; tg 50°;
tg 80°; tg 110°;
tg 150°; tg 250°.

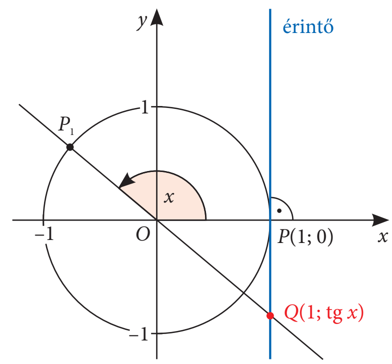
24 A tangensfüggvény

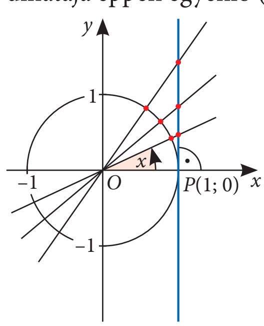
BEVEZETŐ

Az előző leckében értelmeztük minden olyan szög tangensét, amelynek a koszinusza nem nulla. Ha a szögeket valós számokkal adjuk meg, akkor mondhatjuk, hogy értelmeztük végtelen sok valós szám tangensét. Ha ugyanis az x olyan valós szám, amely nem írható fel $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ alakban (ahol $k \in \mathbf{Z}$), akkor az x tangensének nevezzük a szinuszának és a koszinuszának a hányadosát: $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

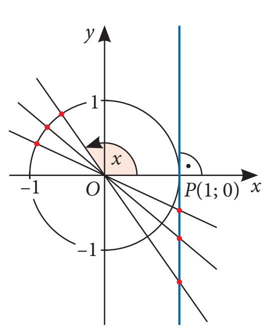
ELMÉLET

Rendeljük hozzá az $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \; (k \in \mathbf{Z})\right\}$ halmaz minden eleméhez a tangensét! Az így kapott függvényt **tangensfüggvénynek** nevezzük. Jele: tg. Egy x valós számhoz hozzárendelt szám jele: tg x.
A tangensfüggvény vizsgálatához a mellékelt ábrát hívjuk segítségül (az előző lecke 3. feladatában is találkoztunk egy ehhez hasonló ábrával). Az origó középpontú, egység sugarú körhöz az (1; 0) pontban érintőt rajzoltunk. Forgassuk el a $P(1, 0)$ pontot az origó körül x irányszöggel, majd a kapott P_1 pontot kössük össze az origóval! Ha ez az egyenes metszi az érintőt, akkor a metszéspont (Q) második koordinátája éppen egyenlő (tg x)-szel.





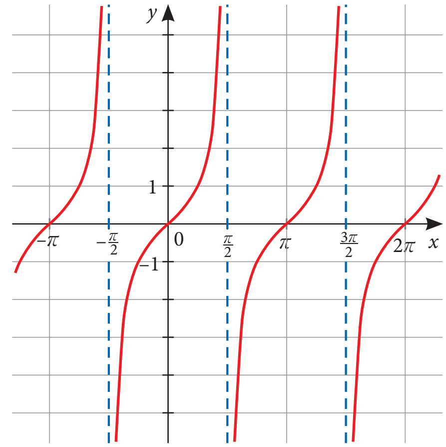
Ebből a megfigyelésből azonnal látható, hogy a tangensfüggvény periodikus, és a periódusa π.
Ha ugyanis a P pontot x irányszög helyett $x + \pi$ szöggel forgatjuk el, akkor láthatjuk, hogy a kapott egyenes megegyezik az x szög esetén kapott egyenessel. Emiatt tehát a $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$ igaz minden olyan x esetén, amelynek van tangense.
Vizsgáljuk meg, hogyan változik az x szög tangense, amíg a P pont egyszer teljesen körbefordul, azaz x irányszög (például) 0-ról indulva egészen (2π)-ig növekszik!
Ha $x = 0$, akkor az elforgatott pont egyenese éppen a P-ben, azaz az (1; 0) pontban metszi az érintőt, tehát $\operatorname{tg} 0 = 0$.



Ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor az irányszög hegyesszög, és a növekedésével együtt a szög tangense is növekszik.
Ahogyan az irányszög közeledik a derékszöghöz, annál erőteljesebbé válik ez a növekedés: az irányszög kicsiny változásához is a szög tangensének igen nagy változása tartozik.
Ha $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, akkor az irányszög tompaszög, a tangense negatív. A rajzon jól látjuk, hogy a szög növekedésével a tangens abszolút értéke csökken, tehát maga a (negatív) tangens növekszik.
Az egyenesszög (π) tangense 0.

Tovább nem is kell vizsgálódnunk, hiszen a $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ szögek esetében a hegyesszögek, a $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ szögek esetében pedig a tompaszögek tangensei ismétlődnek.

Az előzőek alapján a mellékelt grafikont kaphatjuk a tangensfüggvényre.



A $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) szögeknek nincs tangensük, a függőleges szaggatott vonalak éppen ezt jelzik.

A tangensfüggvény

- értelmezési tartománya az $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \ (k \in \mathbf{Z})\right\}$ halmaz;
- értékkészlete a valós számok halmaza;
- nincs szélsőértéke (tehát nincs se maximuma, se minimuma);
- $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ ($k \in \mathbf{Z}$) intervallumokon szigorúan monoton nő;
- zérushelyei az $l \cdot \pi$ számok ($l \in \mathbf{Z}$);
- periodikus, periódusa π;
- páratlan függvény.

FELADAT

1. Zsebszámológéped segítségével töltsd ki a táblázat üres helyeit! (A füzetedben dolgozz!)

x	1,36	1,46	1,56	1,66	1,76	1,86	1,96	2,06	3,06	3,16
tg x										

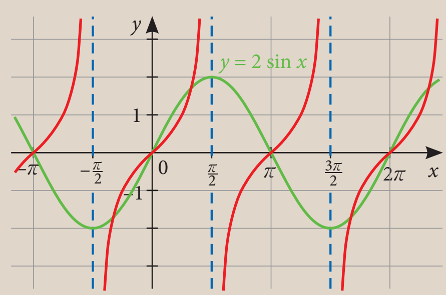
2. Melyek azok az x valós számok, amelyekre igaz, hogy

a) tg $x = 1$; **b)** tg $x = -1$; **c)** tg $x = \sqrt{3}$?

3. Határozd meg mindazokat a $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$-be tartozó valós számokat, amelyekre igaz, hogy tg $x = 2 \sin x$!

a) A két grafikon alapján állapítsd meg, hány megoldás van, és adj becslést a megoldásokra!

b) Oldd meg a tg $x = 2 \sin x$ egyenletet!



HÁZI FELADAT

1. Zsebszámológéped segítségével ellenőrizd, igaz-e, hogy

a) $\text{tg}\frac{\pi}{7} = \text{tg}\left(\frac{\pi}{7} + \pi\right)$; **c)** $\text{tg}\left(-\frac{\pi}{7}\right) = -\text{tg}\frac{\pi}{7}$!

b) $\text{tg}\frac{\pi}{7} = \text{tg}\left(\frac{\pi}{7} - \pi\right)$;

2. Oldd meg a $[-\pi; 2\pi]$ alaphalmazon a következő egyenleteket!

a) tg $x = 2$; **b)** tg $x = -2$.

3. Oldd meg a 2. házi feladatban megadott egyenleteket az **R** alaphalmazon!

A feladatok megoldásait függvényábrázoló programmal is ellenőrizheted.

25 Trigonometrikus egyenletek

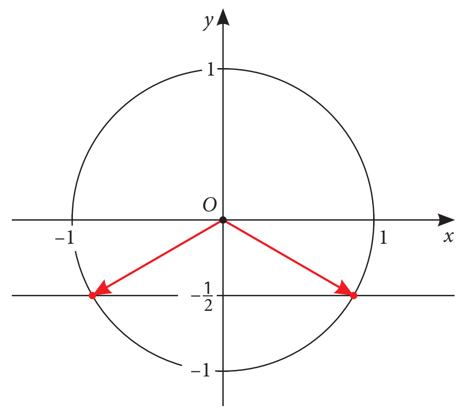
KIDOLGOZOTT FELADAT

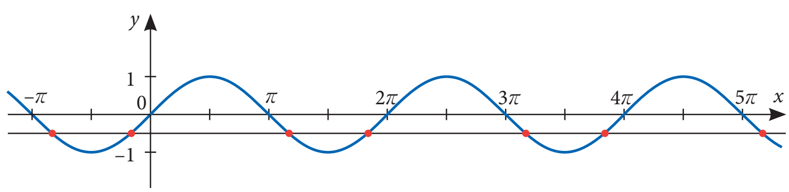
1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\sin x = -\frac{1}{2}$ **b)** $\sin 2y = -\frac{1}{2}$ **c)** $3\sin x + 4 = 2\sin x + 3$

Megoldás

a) Azokat a valós számokat keressük, amelyeknek a szinusza $-\frac{1}{2}$.
0 és 2π között 2 olyan valós szám van, amelyre ez teljesül.
A $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ismeretében az ábráról leolvasható, hogy az egyik érték π-nél $\frac{\pi}{6}$-tal több, azaz $\frac{7\pi}{6}$,
a másik érték 2π-nél $\frac{\pi}{6}$-tal kevesebb, azaz $\frac{11\pi}{6}$.
De nemcsak a 0 és 2π közötti megoldásokat kell megkeresnünk, hanem az összes valós számot, amelynek szinusza $-\frac{1}{2}$. A grafikonról leolvashatjuk, hogy úgy kapjuk meg ezeket a számokat, ha a 0 és 2π közötti megoldásokhoz egész számszor hozzáadjuk a szinuszfüggvény periódusát, 2π-t.





A megoldások tehát:

$$x_1 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z} \qquad \text{és} \qquad x_2 = \frac{11\pi}{6} + 2l\pi, \quad l \in \mathbf{Z}.$$

b) Azokat a valós számokat keressük, amelyek kétszereséről tudjuk, hogy szinusza $-\frac{1}{2}$.
Keressük meg először azokat a számokat, amelyek szinusza $-\frac{1}{2}$. Az a) pontban épp ezeket határoztuk meg, s ezt találtuk:

$$x_1 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z} \qquad \text{és} \qquad x_2 = \frac{11\pi}{6} + 2l\pi, \quad l \in \mathbf{Z}.$$

A mostani egyenletünknek pontosan azok a számok lesznek a megoldásai, amelyeknek ezek a *kétszeresei*. Osszuk el ezért x_1-et és x_2-t 2-vel! Vigyázat, minden tagot osztani kell 2-vel, a $2k\pi$ és $2l\pi$ tagokat is!
Az egyenlet megoldásai:

$$y_1 = \frac{7\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z} \qquad \text{és} \qquad y_2 = \frac{11\pi}{12} + l\pi, \quad l \in \mathbf{Z}.$$

c) Mindkét oldalból kivonva $2\sin x$-et: $2\sin x + 4 = 3$.
Mindkét oldalból kivonva 4-et: $2\sin x = -1$.
Mindkét oldalt osztva 2-vel: $\sin x = -\frac{1}{2}$.
Az egyenlet megoldásait tehát az a) pontban meghatározott valós számok adják:

$$x_1 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z} \qquad \text{és} \qquad x_2 = \frac{11\pi}{6} + 2l\pi, \quad l \in \mathbf{Z}.$$

FELADAT

1. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $\cos 2y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. Oldd meg a valós számok halmazán az egyenleteket!

a) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ **b)** $\operatorname{tg}\frac{y}{2} = -\sqrt{3}$

3. Oldd meg a valós számok halmazán az egyenleteket!

a) $3\sin x = \sqrt{2} + \sin x$

b) $\frac{\operatorname{tg} x}{3} - \frac{\operatorname{tg} x}{2} = \frac{1}{6}$

KIDOLGOZOTT FELADAT

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\sin^2 x + 4\sin x - 5 = 0$

b) $\sin^2 x + \cos x + \cos^2 x = 0$

Megoldás

a) A $\sin^2 x$ leírással azt jelöljük, hogy a $\sin x$-nek vesszük a négyzetét, azaz $\sin^2 x = (\sin x)^2$.
Az egyenletben szerepel $\sin x$ is és a négyzete is. Vezessünk be $\sin x$ helyett új ismeretlent: $y = \sin x$. Ezzel a helyettesítéssel az egyenlet így alakul: $y^2 - 4y - 5 = 0$. Ennek a másodfokú egyenletnek a gyökeit meghatározhatjuk a megoldóképlettel.
Ezt kapjuk: $y_1 = 5$ és $y_2 = -1$.
Ebből $\sin x = 5$, illetve $\sin x = -1$.
$\sin x$ értéke nem lehet 5, ez nem vezet megoldáshoz.
A valós számok halmazán a $\sin x = -1$ egyenlet megoldásai: $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

b) Minden α szög esetén $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Ugyanez teljesül a valós számok esetén is:
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
Ezt alkalmazva az egyenlet így alakul:
$1 + \cos x = 0$, átrendezve: $\cos x = -1$.
A megoldások:
$x = \pi + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

ELMÉLET

Tétel: Minden valós szám esetén $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

FELADAT

4. Oldd meg a valós számok halmazán az egyenleteket!

a) $\cos^2 x - 3\cos x = 0$

b) $\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 3 = 0$

5. Oldd meg a valós számok halmazán az egyenleteket!

a) $\sin^2 x + 1 = 4\sin x - \cos^2 x$

b) $\sin^2 x + 2\cos^2 x + \cos x - 3 = 0$

HÁZI FELADAT

1. Oldd meg a valós számok halmazán az egyenleteket!

a) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **b)** $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. Oldd meg a valós számok halmazán az egyenleteket!

a) $3\cos x - \sqrt{3} = \cos x$ **b)** $\cos 2x - 2 = 1$

3. Oldd meg a valós számok halmazán az egyenleteket!

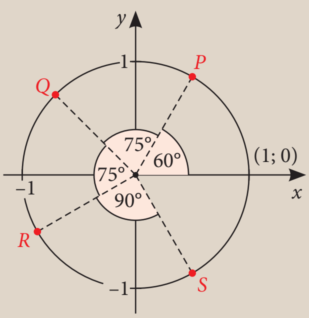
a) $\sin^2 x + 5\sin x - 6 = 0$

b) $\operatorname{tg} x + \sin^2 x + \cos^2 x = 0$

26 Gyakoroljunk!

FELADAT

1. Figyeld meg az ábrát!



a) Add meg a P, Q, R, S pontok koordinátáit!

b) Add meg az origóból a P, Q, R, S pontokba vezető vektorok koordinátáit!

2. Egy koordináta-rendszerben az $A(1; 0)$ pontot elforgatjuk α szöggel, így a B pontba kerül. Töltsd ki a táblázat üres helyeit! A füzetedben dolgozz!

α	20°	60°	180°	200°	310°	380°	450°
A B pont 1. koordinátája							
A B pont 2. koordinátája							
Az $\overrightarrow{OB}$ 1. koordinátája							
Az $\overrightarrow{OB}$ 2. koordinátája							

3. Rajzolj egy derékszögű koordináta-rendszert, az **i** és a **j** legyenek a „szokásos" bázisvektorok!

a) Az origó kezdőpontú **e** egységvektor egyik irányszöge 3000°. Add meg az egységvektor koordinátáit!

b) Az origó kezdőpontú **f** egységvektor második koordinátája 0,5. Add meg az egységvektor első koordinátájának lehetséges értékeit!

4. A Baltimore városában (USA) található World Trade Center 123,5 m magas. Ez a világ legmagasabb szabályos ötszög alaprajzú épülete. A 30 szintes (a fényképen 28 irodai szint, továbbá a tetőtér és az alapszint látható) irodaépület összesített teljes alapterülete 39 200 m^2.

a) Hány m^3 az épület térfogata?

b) Mekkora az alaprajz ötszöge köré írható kör sugara?

c) Hány méter hosszú az ötszög egy-egy oldala?

5. Egy tompaszögű háromszög területe 6,65 dm^2, két oldalának hossza 4,62 dm és 3,08 dm.

a) Mekkora lehet a két adott oldal által közbezárt szög?

b) Mekkora lehet a harmadik oldal?

c) Mekkorák a háromszög ismeretlen szögei?

d) Hányféle háromszög felel meg az adatoknak?

6. Egy paralelogramma 34 mm-es oldala a 38 mm-es átlóval 56°-os szöget alkot.

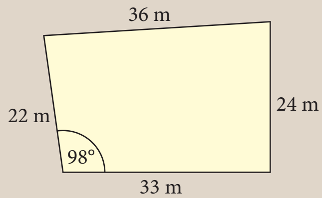
a) Mekkora a paralelogramma többi oldala?

b) Mekkorák a paralelogramma szögei?

c) Mekkora a másik átló?

d) Mekkora a paralelogramma területe?

7. Egy telek füvesítéséről szól az alábbi feladat. A telek négyszög alakú, méretei a rajzon láthatók. A telken áll egy ház, és még fáskamra és szerszámoskamra is van. Így aztán 130 m^2-nyi részt nem kell füvesíteni.

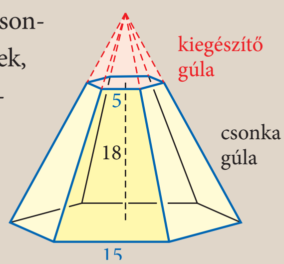


a) Hány m^2-es területre kell fűmagot vásárolni?

b) A telek talaja nem igazán kedvező a füvesítéshez, ezért 5 cm vastagságban jól termő földréteget kell a meglévő talajra teríteni. Hány m^3 földre van szüksége?

c) Számítsd ki, hogy mekkora szöget alkot a telek 33 méteres és 24 méteres oldala egymással!

8. Egy szabályos hatoldalú csonka gúla alapélei 15 cm-esek, fedőélei 5 cm-esek, magassága pedig 18 cm.



a) Mekkora a kiegészítő gúla magassága?

b) Mekkorák a kiegészítő gúla oldalélei?

c) Mekkorák a csonka gúla oldalélei?

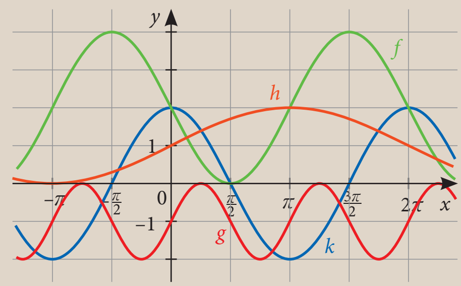
d) Mekkorák a csonka gúla egy oldallapjának a szögei, és mekkora a területe?

e) Mekkora a csonka gúla felszíne?

9. Ábrázold és jellemezd az alábbi függvényeket!

a) $x \mapsto \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **b)** $x \mapsto -\sin 2x + 1$

10. Állítsd párba a függvények nevét és hozzárendelési szabályát!



A) $x \mapsto \sin 2x - 1$

B) $x \mapsto 2\cos x$

C) $x \mapsto 2 - 2\sin x$

D) $x \mapsto \sin\frac{x}{2} + 1$

11. Oldd meg a trigonometrikus egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sin^2 x + \cos^2 x - \operatorname{tg} x = 1$

b) $\sin(\pi - x) = \cos x$

A 9–11. feladatok megoldásait függvényábrázoló programmal is ellenőrizheted.

HÁZI FELADAT

1. Egy szög szinusza 0,768. Mekkora lehet

a) a koszinusza;

b) a kétszeresének a szinusza;

c) a kétszeresének a koszinusza;

d) a felének a szinusza;

e) a felének a koszinusza?

2. Oldd meg a trigonometrikus egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{tg} x$

b) $\sin x = \cos(\pi - x)$

3. Egy gúla alaplapja a 6. feladatban szereplő paralelogramma. A gúla magassága, amely az alaplap átlóinak metszéspontjába fut be, 54 mm hosszú.

a) Mekkorák a gúla oldalélei?

b) Számítsd ki az oldallapok területét!

c) Mekkora a gúla felszíne?

d) Mekkora a gúla térfogata?

4. Figyeld meg egy egységsugarú körben az α tompaszöget, az $\alpha - \frac{\pi}{2}$ és az $\alpha + \frac{\pi}{2}$ szöget! Igaz-e, hogy

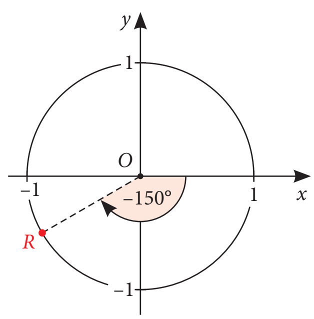
a) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$;

b) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$?

27 Tudáspróba

TUDÁSPRÓBA I.

1. Figyeld meg az ábrát!



a) Add meg az R pont koordinátáit!

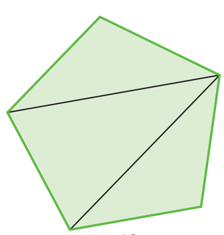
b) Add meg az $\overrightarrow{OR}$ összes irányszögét!

c) Az R pontot az O pont körül 90°-kal elforgatva kapjuk a K pontot (a IV. síknegyedben). Add meg az $\overrightarrow{OK}$ összes irányszögét! Mennyi ezeknek a szögeknek a szinusza, és mennyi a koszinusza?

2. A 12 cm oldalú szabályos ötszög egyik csúcsából megrajzoltuk a két átlót.

a) Számold ki az átlók hosszát!

b) Mekkora területű részekre osztja a két átló az ötszöget?



3. Melyik igaz, melyik hamis az alábbi kijelentések közül, ha a háromszög oldalainak és szögeinek hagyományos jelölését használjuk?

a) $\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta}$

b) $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$

c) $\sin \alpha : \sin \beta = a : b$

4. Egy háromszög egyik oldala 9,6 cm, az egyik rajta fekvő szög 52°-os. E szög szögfelezőjének a háromszög belsejében lévő szakasza 8,4 cm hosszú.

a) Mekkorák a háromszög szögei?

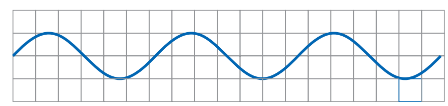
b) Mekkora a két ismeretlen oldal hossza?

c) Mekkora a háromszög területe?

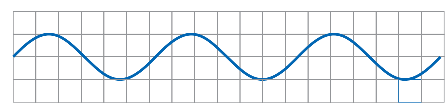
5. **a)** Rajzold be a koordinátatengelyeket úgy, hogy az ábra a megadott függvény grafikonját mutassa! Add meg az x tengelyen a π, az y tengelyen pedig az 1 szám helyét is!

b) Melyik függvény páros, és melyik páratlan?

A) $x \mapsto \cos x - 1$



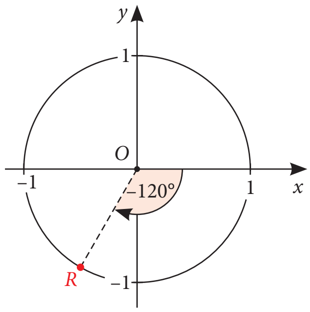
B) $x \mapsto -\sin x$



Flatiron Building (New York City, USA)

TUDÁSPRÓBA II.

1. Figyeld meg az ábrát!

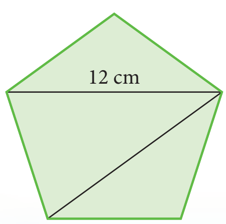


a) Add meg az R pont koordinátáit!

b) Add meg az $\overrightarrow{OR}$ összes irányszögét!

c) Az R pontot az O pont körül $-90°$-kal elforgatva kapjuk a K pontot (a II. síknegyedben). Add meg az $\overrightarrow{OK}$ összes irányszögét! Mennyi ezeknek a szögeknek a szinusza, és mennyi a koszinusza?

2. A szabályos ötszög egyik csúcsából megrajzoltuk a két átlót. Az átlók hossza 12 cm.



a) Számold ki az ötszög oldalhosszát!

b) Mekkora területű részekre osztja a két átló az ötszöget?

3. Melyik igaz, melyik hamis az alábbi kijelentések közül, ha a háromszög oldalainak és szögeinek hagyományos jelölését használjuk?

a) A háromszög területe lehet $\frac{ab}{2}$-vel egyenlő.

b) A háromszög területe lehet $\frac{ab}{2}$-nél kisebb.

c) A háromszög területe lehet $\frac{ab}{2}$-nél nagyobb.

4. Egy paralelogramma 52 mm-es oldala a 38 mm-es átlóval 33°-os szöget alkot.

a) Mekkora a paralelogramma többi oldalának hossza?

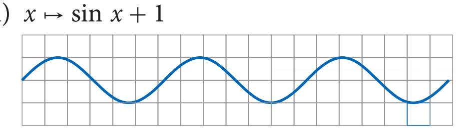
b) Mekkorák a paralelogramma szögei?

c) Mekkora a paralelogramma területe?

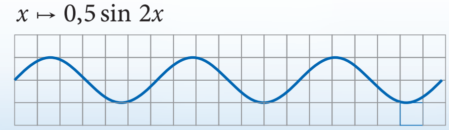
5. **a)** Rajzold be a koordinátatengelyeket úgy, hogy az ábra a megadott függvény grafikonját mutassa! Add meg az x tengelyen a π, az y tengelyen pedig az 1 szám helyét is!

b) Melyik függvény páros, és melyik páratlan?

A) $x \mapsto \sin x + 1$



B) $x \mapsto 0{,}5 \sin 2x$



Témazáró feladatgyűjtemény

1. Egy derékszögű háromszög két befogója 4,3 cm és 5,4 cm. Mekkora az átfogó, és mekkorák a háromszög szögei?

2. Egy derékszögű háromszög 26 cm-es befogóján 32°-os szög nyugszik. Mekkora a háromszög köré írt körének sugara? Hányszorosa a kör területe a háromszög területének?

3. A derékszögű háromszög átfogójához tartozó magassága 5 cm. A magasság az átfogóból egy 12 centiméteres szakaszt vág le. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei?

4. Az egyenlő szárú háromszög alapja 14 cm, az alaphoz tartozó magasság 12 cm. Mekkorák a háromszög szögei? Mekkora a háromszög területe?

5. Egy szimmetrikus trapéz hosszabbik alapja 28 cm hosszú, a trapéz hegyesszögei 60°-osak, a szárak hossza 6 cm. Mekkora a trapéz kerülete és területe?

6. Egy húrtrapéz alapjai 32, illetve 10 egység hosszúak, a trapéz magassága 5 egység hosszú. Mekkorák a trapéz szögei? Mekkora a trapéz kerülete?

7. Egy lejtős út hossza 246 méter, a vízszintessel alkotott hajlásszöge 6,8°. Milyen magasra visz a lejtő?

8. Egy kétágú létra szárainak hossza 2,3 méter. A biztonságos használathoz legalább 34°-ra kell nyitni a szárakat. Legalább milyen távol van ekkor a két láb végpontja a talajon? Eléri-e a létráról egy 170 cm magas ember a 3 méter magasan lévő villanykörtét?

9. Egy rombusz alakú kert kerülete 200 méter, átlóinak aránya 3 : 4. Hány fokos szögben látja a rövidebb átlót Bálint gazda, ha a kert valamely csúcsából szemlélődik? Hány forintot kell a gazdának palántákra költenie, ha négyzetméterenként 64 darab palántát ültet el, és a palánták darabja 140 forintba kerül?

10. Egy háromszög egyik magassága 36 cm. A magasság a szemközti szöget 10,5° és 52°-os szögekre bontja. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei?

11. Egy deltoid átlói egyenlő hosszúak, egyik átlója a másikat 3 : 5 arányban osztja. A deltoid területe 144 cm^2. Mekkora a deltoid kerülete?

12. Egy ablak méretei: 82 cm × 140 cm. Mekkora szöget zárnak be az ablakra ragasztott, átlósan haladó egyenes ragasztószalagcsíkok egymással?

13. Egy 16 cm sugarú körhöz egy külső *P* pontból húzott érintők 48,5° nagyságú szöget zárnak be egymással. Mekkora távolságra van a *P* pont a kör középpontjától, és mekkorák az érintőszakaszok?

14. Egy háromszög két oldalának összege 15 cm, és e két oldallal szemközti szögek nagysága 49° és 73°. Mekkorák a háromszög oldalai?

15. Egy háromszög két oldalhosszának különbsége 7 dm. Az ezen oldalakkal szemközti szögek nagysága 30° és 50°. Mekkorák a háromszög oldalai, és mekkora a háromszög területe?

16. A táblázat egy-egy sora egy-egy háromszög adatait tartalmazza a szokásos jelölésekkel (az oldalak mértéke cm). Számítsd ki a hiányzó adatokat!

	a	b	c	α	β	γ
a)	6	9			62°	
b)		37	22			30°
c)			14	25°	43°	
d)	5,4	12,3				83°
e)	6	8	13			

17. Egy háromszög egyik szöge 94° nagyságú, a vele szemközti oldal 25 cm hosszú. A háromszög egy másik oldalának hossza 10 cm. Mekkora a hiányzó oldal hossza és a szögek nagysága? Van-e a feladatnak több megoldása?

18. Egy paralelogramma oldalainak hossza 10 cm és 16 cm, egyik szögének nagysága 100°. Mekkorák a paralelogramma átlói és mekkora a területe?

19. Egy háromszög alakú kert egyik oldalának hossza 50 méter, másik oldalának hossza 80 méter. Mekkora lehet a kert kerülete, ha ismert, hogy a területe 1000 m^2?

20. Egy háromszög kerülete 800 m, két szögének nagysága 30° és 50°. Mekkorák az oldalai?

21. Egy háromszög két oldalának hossza 12 cm és 20 cm, az ezen oldalak által közbezárt szög nagysága 100°. Határozzuk meg a háromszög legnagyobb szögét felező egyenes háromszögbe eső részének hosszát!

22. Egy trapéz hosszabbik alapja 24 cm, az egyik szára 14 cm. Az ismert szár és a hosszabbik alap hajlásszöge 52°, az alapon fekvő másik szög 65°. Mekkorák a trapéz ismeretlen szögei és oldalai?

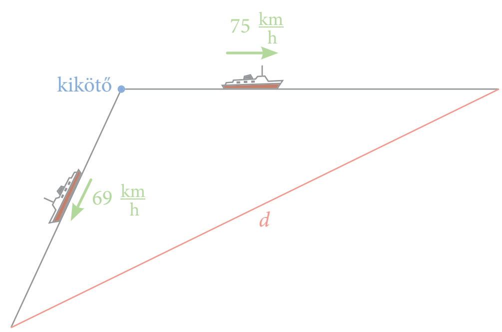
23. Határozzuk meg annak az általános négyszögnek az oldalait, melynek *BD* átlója 38 cm hosszú, és ez az átló a *B*-nél lévő β szöget egy 49°-os és egy 37°-os részre, a *D*-nél lévő δ szöget pedig egy 51°-os és egy 29°-os részre bontja úgy, hogy a 49°-os és az 51°-os szög az átló azonos oldalán van!

24. Szabályos ötszög alakú, 24 cm oldalhosszúságú terítőre – díszítésként – aranyhímzést készítünk. A hímzést az oldalak mentén és az átlók mentén helyezzük el. Hány órán keresztül készül el a teljes munka, ha 10 cm hímzéshez átlagosan 30 perc munkaidő szükséges?

25. Egy háromszög két oldala 18 cm és 24 cm, közbezárt szögük 68°. Milyen hosszú a 18 cm-es oldalhoz tartozó súlyvonal?

26. Egy háromszög egyik oldala 20 cm, a másik két oldal különbsége 4 cm. A 20 cm-es oldallal szemben lévő szög nagysága 120°. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei?

27. Egy kikötőből két hajó indul azonos időpontban. Az egyik kelet felé halad 75 $\frac{km}{h}$ sebességgel, míg a másik délnyugati irányba 69 $\frac{km}{h}$ sebességgel. Milyen távol lesznek egymástól 80 perc múlva?



28. A toronyóra kismutatójának hossza 32 cm, nagymutatójának hossza 46 cm. Milyen távolságban van az óra két mutatójának végpontja egymástól **a)** 3 órakor; **b)** fél 8-kor; **c)** 11 óra 20 perckor?

29. Egy trapéz két párhuzamos oldala 46 cm és 34 cm. Az egyik szár 52 cm. Ennek a nagyobbik alappal bezárt szöge 48°. Határozzuk meg a trapéz negyedik oldalát és a trapéz ismeretlen szögeit!

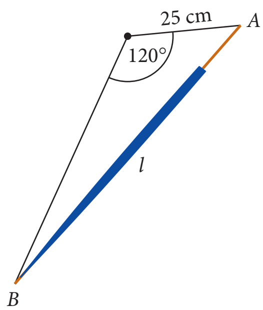
30. Mekkora szöget zár be egymással a kocka két különböző testátlója?

31. Mutassuk meg, hogy az *r* sugarú körbe írt szabályos 12-szög területe $3r^2$!

32. Egy háromszög alakú kertet szeretnénk felásni, melynek oldalai 20, 48 és 60 méter hosszúságúak. Tudjuk, hogy öt négyzetméter felásása fél órába telik. Hány órán keresztül kell dolgoznunk a kert teljes felásásával?

33 A paralelogramma átlója 16 cm hosszú. Ez az átló a paralelogramma egyik szögét 27 és 38 fokos szögekre bontja. Mekkorák – egész számra kerekítve – a paralelogramma szögei, oldalai, kerülete és területe?

34 Az ábrán látható AB végpontú esernyőt falra akasztjuk a következő módon: a zsineg szárai 120°-os szöget zárnak be egymással, a zsineg teljes hossza 85 cm, és a felfüggesztési pont az A végponttól 25 cm-re van.



a) Hány cm hosszú (egész számban mérve) az esernyő?

Ugyanezt az esernyőt egy másik alkalommal úgy függesztettük fel, hogy a kötélszárak derékszöget zárjanak be.

b) Milyen távolságra van ekkor a derékszögű csúcs az esernyő A végpontjától? (Az eredményt cm pontossággal adja meg!)

(2006. májusi érettségi feladat, idegen nyelv.)

35 Egy háromszög egyik oldalának hossza 6 cm. Az ezeken nyugvó két szög 50° és 60°.
A háromszög beírt körének középpontját tükröztük a háromszög oldalaira. E három pont a háromszög csúcsaival együtt egy konvex hatszöget alkot.

a) Mekkorák a hatszög szögei?

b) Számítsa ki a hatszög azon két oldalának hosszát, amely a háromszög 60°-os szögének csúcsából indul!

c) Hány négyzetcentiméter a hatszög területe?

A *b)* és a *c)* kérdésekben a választ egytizedes pontossággal adja meg!
(2006. októberi érettségi feladat.)

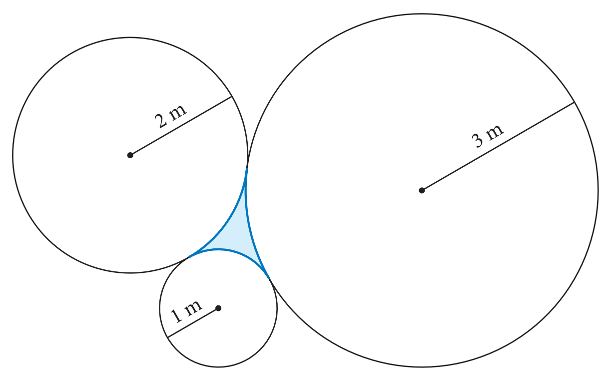
36 Az ABC háromszög AB oldalát B csúcson túl $3AB$-vel, BC oldalát C csúcson túl $3BC$-vel, AC oldalát A csúcson túl $3AC$-vel meghosszabbítjuk. Az így kapott $A'B'C'$ háromszög területe hányszorosa az eredeti ABC háromszög területének?

37 Egy kör sugara 8 cm. Határozzuk meg annak a húrjának a hosszát, melyhez tartozó középponti szög nagysága 84°! Mekkora a húr által a körvonalból kimetszett íveknek a hossza?

38 Egy 41 egység sugarú körben berajzoltunk egy 18 egység hosszúságú húrt. Mekkora területű részekre bontja ez a húr a kör területét?

39 Két kör sugarának hossza 34 cm, illetve 78 cm. A körök középpontjainak távolsága 88 cm. Határozzuk meg a két kör közös húrjának hosszát, valamint annak a síkidomnak a területét, melyet a két kör közösen lefed!

40 Három, egymást páronként érintő kör sugarainak nagysága 1 m; 2 m; 3 m. Mekkora a három kör által létrehozott zárt síkidom kerülete és területe?



41 Mekkora az a tompaszög, melynek

a) szinusza 0,598

b) koszinusza −0,672?

42 Határozd meg a következő valós számok szinuszát és koszinuszát!
1,5; 2,5; 3,5; −2; −5; 11.

43 Melyek azok az α szögek, melyekre $360° \le \alpha \le 1080°$, és

a) $\sin\alpha = 0{,}157$ **c)** $\cos\alpha = 0{,}823$

b) $\sin\alpha = -0{,}558$ **d)** $\cos\alpha = -0{,}731$

44 Határozzuk meg az alábbi kifejezések pontos értékét!

a) $\sin 30° - 2\cos 120° + \operatorname{tg} 45°$

b) $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

c) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + \sin 2\pi$

45. Állítsuk növekvő rendbe az alábbi mennyiségeket! (Próbáljunk meg számológép nélkül dolgozni!)

$A = \sin 3°$ $\quad B = \sin 43°$ $\quad C = \sin \pi$

$D = \cos 47°$ $\quad E = \cos \pi$ $\quad F = \cos 234°$

46. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sin x = \frac{1}{2}$ **c)** $\sin x = -0{,}707$

b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **d)** $\cos x = -0{,}1234$

47. Mennyi lehet annak a szögnek a koszinusza, melynek

a) szinusza 0,35; **b)** tangense −1,2?

48. Ábrázold a következő függvényeket közös koordináta-rendszerben!

a) $x \mapsto \sin x$ **c)** $x \mapsto 3\sin x + 3$

b) $x \mapsto 3\sin x$ **d)** $x \mapsto 3\sin x - 1$

49. Ábrázold a következő függvényeket közös koordináta-rendszerben!

a) $x \mapsto \cos x$ **c)** $x \mapsto 3 - 2\sin x$

b) $x \mapsto -2\cos x$ **d)** $x \mapsto |3 - 2\cos x|$

50. Ábrázold a következő függvényeket közös koordináta-rendszerben!

a) $x \mapsto \cos x$ **c)** $x \mapsto \cos 3x + 2$

b) $x \mapsto \cos 3x$ **d)** $x \mapsto |\cos 3x + 2|$

51. Határozzuk meg az alábbi függvények értékkészletét!

$f(x) = 2\sin x + 1$

$g(x) = -\cos x + 5$

$h(x) = \sin 0{,}5\,x$

52. Oldd meg a valós számok halmazán az egyenleteket! Figyelj rá, hogy az összes megoldást határozd meg!

a) $\mathrm{tg}(2x) = 0$

b) $\frac{\cos x}{3} - \frac{\cos x}{4} = -\frac{1}{12}$

c) $\sin x = \cos x$

53. Igaz vagy hamis?

a) az $f(x) = \sin x$ páratlan függvény;

b) van olyan szög, melynek minden szögfüggvénye negatív előjelű;

c) minden háromszögnek a területe kisebb, mint két hosszabb oldalának szorzata;

d) az $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ függvény legnagyobb helyettesítési értéke $\frac{\pi}{3}$;

e) bármely háromszög minden szögének van tangense;

f) a $g(x) = 3\sin x + 2$ függvény legkisebb helyettesítési értéke −1;

g) bármely háromszögben van három olyan szög, melynek szinusz szögfüggvénye pozitív;

h) bármely valós α esetén fennáll, hogy $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1$.

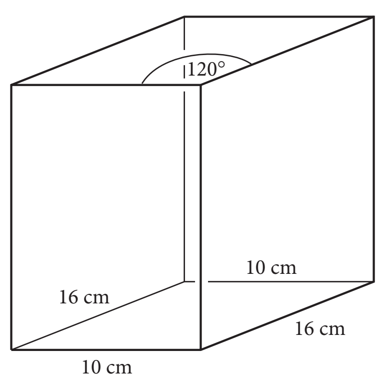
54. Oldd meg a valós számok halmazán az egyenleteket!

a) $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

b) $2\cos x = \sin^2 x + \cos^2 x$

55. Határozzuk meg az egyenes körkúp magasságát, ha tudjuk, hogy palástja egy olyan félkör, melynek sugara 15,7 cm!

56. Mekkora a paralelogramma alapú egyenes hasáb leghosszabb testátlójának hossza, ha az alaplap olyan paralelogramma, melynek oldalai 10 cm és 16 cm hosszúak, egyik szöge 120° nagyságú, és tudjuk, hogy a test magassága megegyezik a paralelogramma rövidebb átlójának hosszával?



57. A gízai nagy piramis – más néven Kheopsz-piramis – a legrégebbi és egyben az egyedüli fennmaradt csoda az ókori világ hét csodája közül. Alakja – kisebb eltérésektől eltekintve – szabályos négyoldalú gúla, melynek alapéle 230 méter hosszú, magassága 137 méter. Határozzuk meg, mekkora a vízszintessel bezárt szögük az oldallapoknak, valamint az oldaléleknek!

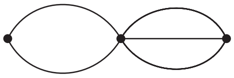
28 Kombinatorika és gráfok

BEVEZETŐ

A térkép néhány lehetséges útvonalat mutat be Ajka, Veszprém és Balatonalmádi között.
A megjelölt utakon haladva hány különböző módon juthatunk el Ajkáról Balatonalmádiba, ha nem akarjuk pazarolni a benzint, tehát visszafelé nem haladunk?
Ajkáról Veszprémbe két út közül választhatunk. Majd mindkét utat háromféleképpen folytathatjuk Balatonalmádiba. Ez $2 \cdot 3 = 6$ lehetőség.

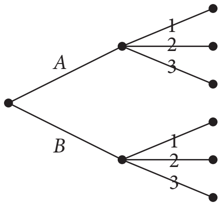
ELMÉLET

I. Ha a három települést egy-egy ponttal, a köztük lévő utakat egy-egy vonallal szemléltetjük, akkor a következő vázlatos ábrához jutunk:



Ez az ábra és a térképvázlat is egy **gráf**. A gráf pontokból és a pontokat összekötő vonalakból áll. A pontok a gráf **csúcsai**. A vonalak a gráf **élei**. Lehet, hogy minden pontpár között van él, de az is lehet, hogy csak néhány pontpár van összekötve. (Sőt az is gráf, amelyben egyetlen él sincs, csak a csúcsok.) Egy adott csúcsba befutó élek számát a csúcs **fokszámának** nevezzük.
Az előbbi gráfnak 3 csúcsa és 5 éle van. A csúcsok fokszáma: 2, 5 és 3.

II. Ha a döntési folyamatot szemléltetjük, akkor a következő ábrához jutunk:



Először eldöntjük, hogy az *A* vagy a *B* úton megyünk Ajkáról Veszprémbe. Majd bármelyik úton is érkeztünk Veszprémbe, ott eldöntjük, hogy az 1., a 2. vagy a 3. úton megyünk tovább Balatonalmádiba.

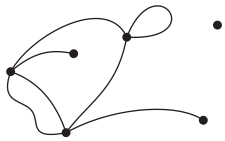
Ez az ábra is egy gráf. Ennek 9 csúcsa és 8 éle van. A csúcsok fokszáma: 2, 4, 4, 1, 1, 1, 1, 1, 1.
Az ilyen gráfot, amellyel egymásból szétágazó lehetőségeket is ábrázolhatunk, **fagráfoknak** nevezzük.

III. Mivel minden él két csúcshoz tartozik, bebizonyítható a következő összefüggés:

Tétel: Minden gráfban a fokszámok összege egyenlő az élek számának kétszeresével.

Például:
Az első gráfban a fokszámok összege $2 + 5 + 3 = 10$; az élek száma pedig 5.
A tétel egyik következménye az is, hogy **a fokszámok összege mindig páros**.

IV. Néhány gráfelméleti alapfogalom:
Összefüggő gráf: bármely csúcsból bármely csúcsba el lehet jutni élek egy sorozatán át.
Hurokél: olyan él, amelynek kezdő- és végpontja ugyanaz.
Többszörös él: ha két csúcs között több él is fut.
Egyszerű gráf: nincs benne hurokél, és nincs benne többszörös él.


gráf

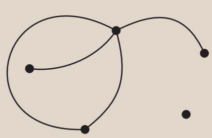

hurokél


többszörös él

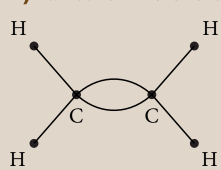
FELADAT

1. Jellemezd a gráfokat! Hány csúcsuk, illetve hány élük van? Mennyi a csúcsok fokszáma? Melyik közülük egyszerű gráf?

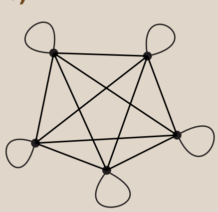
a)



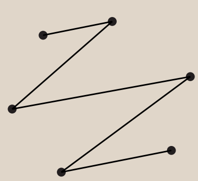
d) az etilénmolekula szerkezete



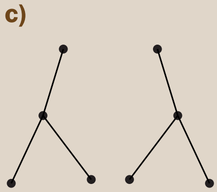
b)



e)



c)



2. Egy gráfnak öt csúcsa van, és minden csúcs fokszáma egyenlő. Adj meg olyan gráfot, melyre ez a fokszám:
a) 1; **b)** 2; **c)** 3; **d)** 4.

3. Rajzolj olyan egyszerű gráfot, amelynek 6 csúcsa van, és a csúcsok fokszámai:
a) 1; 1; 2; 2; 3; 3
b) 0; 0; 3; 3; 3; 3
c) 1; 1; 1; 2; 2; 2
d) 1; 1; 2; 2; 2; 6

4. Háromféle úton juthatunk a hegycsúcsról a folyópartra. A folyó egyik partjáról a másikra csak egy híd vezet. A túlsó parton megint háromféle úton juthatunk a kastélyba.
a) Készíts gráfot a feladathoz!
b) Hányféle útvonal közül választhatunk (ha nem haladunk visszafelé)?
c) Készíts fagráfot a döntési folyamatról!

5. Hányféle lehet a sorrend egy úszóverseny döntőjében, ha 8-an indulnak, és nincs holtverseny?

6. A személyi igazolványok azonosítószáma 6 számjegyből és két betűből áll (ebben a sorrendben). A számjegyek mindegyike 0, 1, …, 9 lehet, a betűk pedig nem lehetnek ékezetes, kettős, illetve hármas betűk, tehát csak az angol ábécé 26 karaktere használható.
a) Igaz-e, hogy mindegyik személyi igazolványban egy 6 jegyű szám áll?
b) Hány különböző 6 jegyű szám van?
c) Hány különböző, hat számjegyből álló jelsorozat képezhető a tíz számjegyből?
d) Hányféle lehet a személyi igazolványokban szereplő betűpár?
e) A fenti szabályok szerint lehet-e 10 millió magyar embernek más-más igazolványszáma?

HÁZI FELADAT

1. Adj meg olyan egyszerű gráfot, melynek 8 csúcsa van, és a csúcsok fokszáma:

a) 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2

b) 1; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 4.

2. Egy ötfős társaságban Anna ismeri Pétert, Balázst és még valakit. Balázs Annán kívül ismeri Zolit és Gábort. Zoli a társaságból csak Balázst ismeri. Gábor viszont mindenkit, kivéve Zolit.

a) Szemléltesd gráffal, hogy ki kinek az ismerőse!

b) Hány ismerőse van Péternek?

3. Egy dolgozat 5 feladatát tetszőleges sorrendben lehet megoldani. Lehetséges-e, hogy egy 100 fős évfolyam minden tanulója más-más sorrendben oldja meg a feladatokat?

4. Hány különböző sorrendben játszhatja le Bence a 10 kedvenc zeneszámát? Körülbelül mennyi ideig tartana, ha mindegyik sorrendet ki akarná próbálni, ha egy zeneszám hossza körülbelül 4 perc?

5. Hajni, Bence és két barátjuk együtt mentek moziba. A négy jegy egymás mellé szólt, de Hajni és Bence nem akart egymás mellé ülni. Hány különböző módon ülhettek le? Szemléltesd gráffal!

RÁADÁS

KIDOLGOZOTT FELADAT

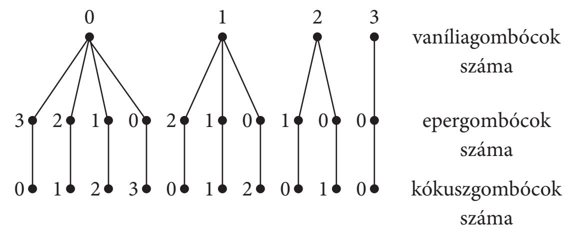
Jutka a nyáron fagylaltárusként dolgozott a strandon. A fizetésén felül mindennap járt neki 3 gombóc fagylalt is „természetbeni juttatás”-ként. A sokféle fagylalt közül azonban ő csak a vaníliát, az epret és a kókuszt szerette. Első nap elhatározta, hogy mindennap másmilyen összeállításban fogja enni a három gombócot. Hány nap alatt tudja végigkóstolni az összes lehetséges összeállítást? (A gombócok sorrendje nem számít, csak az íze.)

Megoldás

Foglaljuk táblázatba, hogy milyen összeállítások lehetségesek (a számok a gombócok számát jelölik):

Vanília	Eper	Kókusz
0	0	3
0	3	0
3	0	0
0	1	2
0	2	1
1	0	2
2	0	1
2	1	0
1	2	0
1	1	1

A különböző lehetőségeket gráffal is szemléltethetjük:



Összesen tehát 10-féle lehetőség van, azaz Jutka 10 nap alatt végigkóstolhatja az összes lehetséges összeállítást.

FELADAT

1. Németh Géza bácsinak három fia van (Pál, János, Sándor), és 7 leányunokája.
Hányféle lehet a három családban a lányok száma?

Segítség a megoldáshoz
Erre a három családra vonatkozóan már nem lenne egyszerű a táblázattal való szemléltetés. Válasszunk más módszert!

$7 = \ldots + \ldots + \ldots = \ldots = 1 + 1 + 5 = \ldots$.

Az egyes esetek azonban többféleképpen is megvalósulhatnak, például az $1 + 1 + 5$ eset 3-féleképpen, attól függően, hogy melyik családban van 5 lány.
Oldd meg ezt a feladatot így, a 7 összes lehetséges felbontására támaszkodva!

2. Szemléltesd gráfokkal az előző feladat megoldását! Hány pontú fagráf szemlélteti azt az esetet, amikor Sándor családjában **a)** 1, **b)** 3, **c)** 5, **d)** 6 lány van?

3. Az 1. feladatban szereplő testvérek, Pál, János és Sándor már réges-régen elhatározták, hogy amelyiküknek legalább két lánya lesz, az a másodiknak a Csilla nevet adja. Az 1. feladatban kiszámítottad, hányféleképpen lehet e három testvérnek 7 lánya. Most vizsgáld meg, hogy a lehetséges esetek hány százalékában van közöttük 0, 1, 2, 3 Csilla!

4. Gergely Gyula bácsinak 3 gyermeke és 9 leányunokája van. A gyermekei: Aranyné Magdi, Kertesné Éva és Nagyné Klári. Hányféle lehet a három családban a lányok száma, ha tudjuk, hogy Aranyéknál három gyerek van: Hajni, Bence és Csilla?

5. Ha egy gráffal egymásból szétágazó döntési lehetőségeket ábrázolunk, akkor fagráfot kapunk. A fagráfokra ugyanakkor három, ettől eltérő definíciót szoktunk használni:
1. Olyan összefüggő gráf, amelyben bármely két csúcsot pontosan egy út (élek egymáshoz kapcsolódó sorozata) köt össze.
2. Olyan összefüggő gráf, amely nem tartalmaz kört (különböző élek egy olyan egymáshoz kapcsolódó sorozatát, amely egy csúcsból önmagába vezet vissza).
3. Olyan összefüggő, egyszerű gráf, amelynek eggyel kevesebb éle van, mint csúcsa.

Bizonyítsd be, hogy a három definíció ekvivalens! (Tehát bármelyikből következik bármelyik és fordítva.)

29 Jelszavak – Variációk

BEVEZETŐ

Nemcsak a lakások, a széfek, de a számítógépek világának számos területe is megköveteli jelszavak készítését. A sok jelszó miatt olykor bajba is kerülhetünk, mert elfelejthetjük őket. Bendi minden számítógépes jelszava a $\{B; e; n; 1; 7\}$ halmaz elemeiből épül fel.

Az egyik dokumentumot Bendi egy háromkarakteres jelszóval védte le, de elfelejtette azt. Legfeljebb hány próbálkozással találhatja el a valódi jelszót, ha

a) tudja, hogy három különböző karaktert használt a jelszó elkészítéséhez;

b) nem tudja, hogy a három karakter között voltak-e egyformák?

Megoldás

a) Az első karakter 5-féle lehet, a második már csak 4-féle. Az első két karaktert tehát $5 \cdot 4 = 20$ különböző módon választhatta meg Bendi. A 20 különböző lehetőség mindegyikét 3 különböző módon folytathatta, vagyis összesen $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$-féle jelszót készíthetett. Legfeljebb 60 próbálkozással tehát megtalálhatja a jelszót (feltéve, hogy a program engedélyez ennyi próbálkozást).

b) Az első és a második karakter is 5-féle lehet, hiszen ismétlődés is előfordulhat. Az első két karaktert tehát $5 \cdot 5 = 25$ különböző módon választhatta meg Bendi. A 25 különböző lehetőség mindegyikét 5 különböző módon folytathatta, tehát összesen $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$-féle jelszót készíthetett. Legfeljebb 125 próbálkozással tehát megtalálhatja a jelszót.

FELADAT

1. Hajni a $\{H; a; j; n; i; 1; 9\}$ halmaz elemeiből 4 karakteres jelszavakat készít. Hányféle jelszót gyárthat, ha

a) a 4 karakter között nincs két egyforma;

b) a 4 karakter között lehetnek egyformák is?

2. Csilla más módszert választott: minden jelszava 10 karakter hosszú, és a karakterek a $\{C; a\}$ halmaz elemei közül kerülnek ki. Hány különböző jelszót készíthet Csilla?

3.

a) Hány 10 jegyű szám írható fel a 2-es számrendszerben? (Vigyázz: 0-val nem kezdődhet a szám!)

b) Hány 10 jegyű szám írható fel a 3-as számrendszerben?

c) Hány 10 jegyű szám írható fel a 10-es számrendszerben? Ezek között hány olyan van, amelyik 5-tel osztható?

4. A 26 betűből álló angol ábécé betűiből (nincsenek hosszú magánhangzók, sem kettős betűk) hány jelszó készíthető, ha

a) a jelszó 6 karakter hosszúságú, és a karakterek között nincs ismétlődés;

b) a jelszó 6 karakter hosszúságú, és a karakterek között lehet ismétlődés?

c) Hogyan változik meg az a), illetve a b) feladatra adható válasz, ha mind a 6 karakter lehet kisbetű is, és lehet nagybetű is?

5. A totóban 13 + 1 mérkőzés esetén megtippelhetjük, hogy ki nyeri a meccset. Háromféle tipp jelölhető meg. 1: a hazai csapat; 2: a vendégcsapat; x: döntetlen.

a) Hányféle különböző kitöltése lehet egy totószelvénynek?

b) Hányféle kitöltés lehetséges, ha az első 6 mérkőzés esetén nem véletlenszerűen tippelünk, hanem megjelöljük a bajnokságban előrébb álló csapatot, és a többi mérkőzés esetén véletlenszerűen választunk?

ELMÉLET

Az előző feladatokban adott számú elem közül úgy kellett adott számút kiválasztani, hogy *fontos volt a kiválasztott elemek sorrendje.* Egyes feladatoknál mindegyik elemet *legfeljebb egyszer* választhattuk, más feladatoknál *ugyanazt többször is* kiválaszthattuk.

Ha például 25 tanuló között 4 különböző értékű könyvutalványt osztunk szét, akkor ezt vagy $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22$-féleképpen, vagy $25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25$-féleképpen tehetjük meg attól függően, hogy egy tanuló csak egy utalványt vagy több utalványt is kaphat.

A lecke feladatainak túlnyomó része az úgynevezett „leszámlálási alapfeladatok" közé tartozik, mégpedig a *variációk* közé.

HÁZI FELADAT

1. A hétjegyű budapesti telefonszámok nem kezdődhetnek 0-val. Hány ilyen telefonszámot lehet készíteni?

2. Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből olyan négyjegyű számokat készítünk, amelyek oszthatók 2-vel. Hány ilyen négyjegyű szám készíthető, ha

a) minden számjegyet csak egyszer használhatunk fel;

b) egy számjegyet többször is felhasználhatunk?

3. 5 darab különböző értékű könyvutalványt sorsolunk ki 20 tanuló között. Hány különböző eredménye lehet a sorsolásnak, ha

a) egy tanuló legfeljebb egy könyvutalványt kaphat;

b) egy tanuló több könyvutalványt is kaphat (akár mind az 5-öt);

c) Konrád egy darab könyvutalványt kap, a többiek pedig legfeljebb egy könyvutalványt kaphatnak?

4. A morzeábécé két karaktert használ a betűk és számok megjelenítésére: pontot és vonalat. Hány különböző jelet lehet készíteni, ha egy jel legfeljebb 5 karakter hosszúságú lehet? Elegendő-e ennyi jel a magyar ábécé betűinek, az írásjeleknek (pont, vessző, pontosvessző, kérdőjel és felkiáltójel) és a tíz számjegynek a megjelenítéséhez? (A kettős betűket két betűként is meg lehet jeleníteni!)

A	•–	J	•–––	S	•••	2	••–––
B	–•••	K	–•–	T	–	3	•••––
C	–•–•	L	•–••	U	••–	4	••••–
D	–••	M	––	V	•••–	5	•••••
E	•	N	–•	W	•––	6	–••••
F	••–•	O	–––	X	–••–	7	––•••
G	––•	P	•––•	Y	–•––	8	–––••
H	••••	Q	––•–	Z	––••	9	––––•
I	••	R	•–•	1	•––––	0	–––––

A jelenleg használatos nemzetközi morzeábécé

30 Csak sorban! – Permutációk

BEVEZETŐ

A cirkuszban 5 vadállat vonul szorosan egymás után: egy tigris, egy oroszlán, egy fekete párduc, egy leopárd és egy kiselefánt.

a) Hány különböző sorrendben vonulhat az 5 vadállat?

b) Hány olyan sorrend van, amelyben a tigris és az oroszlán közvetlenül egymás után állnak a sorban?

c) Hány olyan sorrend van, amelyben a tigris és az oroszlán nem egymás után következik a sorban?

d) Hány különböző sorrendben vonulhatnak fel, ha körbevonulnak, és semelyiküket nem tekintjük „elsőnek”?

Megoldás

a) A különböző sorrendek száma $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Ezt a szorzatot így jelöljük. $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$ (olvasd: 5 faktoriális).

b) Ha az oroszlán közvetlenül a tigris után áll a sorban, akkor kettőjüket tekinthetjük egy „objektumnak”. Rajtuk kívül még 3 „objektum” van, tehát összesen 4 „objektumot” kell sorba rendezni. Ezt $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ módon tehetjük meg ($4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$). A sorban az oroszlán lehet közvetlenül a tigris előtt is, ez ugyancsak $4! = 24$ különböző módon lehetséges. Összesen tehát $2 \cdot 4! = 48$ olyan sorrendben vonulhat az 5 állat, amelyben a tigris és az oroszlán közvetlenül egymás után állnak.

c) Ha az összes lehetséges sorrendből levonjuk azoknak a sorrendeknek a számát, amelyekben a tigris és az oroszlán közvetlenül egymás után következik, akkor megkapjuk azoknak a sorrendeknek a számát, amelyekben ez nem teljesül, azaz a tigris és az oroszlán között még más állat is van (esetleg több is). A megfelelő sorrendek száma tehát: $5! - 2 \cdot 4! = 120 - 48 = 72$.

d) Az öt állat 120-féle sorrendben haladhat egymás mögött. A T, O, F, L, E sor azonban ezúttal ugyanaz, mint az O, F, L, E, T; az F, L, E, T, O; a L, E, T, O, F; valamint az E, T, O, F, L sorrend. Hasonlóan belátható, hogy minden esetnek további négy, tőle lényegében nem különböző párja van. Eszerint a 120 esetben minden esetet ötször is megszámoltunk. Az egymástól nem különböző esetek száma tehát $120 : 5 = 24$.

Megjegyzés

A *b)* feladat megoldása az egymásból szétágazó döntések segítségével is értelmezhető. Két döntést kell meghoznunk. Az első döntés a négy „objektum” sorrendje (ez 4! lehetőség), a második döntés pedig az oroszlán és a tigris sorrendje (ez 2 lehetőség). Mivel a négy állat sorrendjéhez minden esetben ugyanúgy két további lehetőség tartozik, ezért a döntési lehetőségek számát összeszorozhatjuk, így megkapva a $4! \cdot 2$ összes lehetőséget.

FELADAT

1. Testnevelésórán 10 tanuló ül egy tornapadon.

a) Hányféle sorrendben lehetséges ez?

b) Hányféleképpen lehetséges ez, ha Csilla és Panni egymás mellett akarnak ülni?

c) Hányféleképpen lehetséges ez, ha Zoli és Gábor nem akarnak egymás mellett ülni?

d) Hányféleképpen lehetséges ez, ha Csilla és Panni egymás mellett akarnak ülni, de Zoli és Gábor nem szeretnének egymás mellé kerülni?

2. Testnevelésóra után mind a 12 tanuló egyesével kimegy a teremből.

a) Hányféleképpen lehetséges ez?

b) Hányféleképpen lehetséges ez, ha Csilla és Panni szeretne lenni a „két utolsó”?

c) Hányféleképpen lehetséges ez, ha Zoli, Gábor és Peti szeretne lenni az „első három”?

3. Három fiú és három lány úgy ülnek le egymás mellé a nézőtéren, hogy az első helyre lány ül, a másodikra fiú, a harmadikra lány ül, a negyedikre fiú, az ötödikre megint lány, a a hatodikra pedig fiú. Hány különböző módon tehetik ezt meg?

4. Tíz kártyára felírtuk a számjegyeket: mindegyik kártyára egyet, mindegyik kártyára más számjegyet.

a) Hány különböző módon rakhatjuk sorba a tíz számjegykártyát?

b) Az a)-beli sorrendek között hány olyan van, amelyikben a számjegyek csökkenő sorrendben követik egymást?

c) Hány olyan van az a)-beli sorrendek között, amelyik tízjegyű számot határoz meg?

d) Hány olyan van a c)-beli tízjegyű számok között, amelyik osztható 10-zel?

e) Hány olyan van a c)-beli tízjegyű számok között, amelyik osztható 3-mal?

HÁZI FELADAT

1. **a)** A tornateremben 9 tanuló áll egy sorban. Hány különböző módon lehetséges ez?

b) A 9 tanuló úgy áll sorba, hogy András a sor bal szélén, Bence pedig a sor jobb szélén van. Hány különböző módon lehetséges ez?

2. *(2005. májusi érettségi feladat)*

Anna, Béla, Cili és Dénes színházba megy. Jegyük a bal oldal 10. sor 1., 2., 3., 4. helyére szól.

a) Hányféle sorrendben tudnak leülni a négy helyre?

b) Hányféleképpen tudnak leülni a négy helyre úgy, hogy Anna és Béla egymás mellé kerüljenek?

c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Anna és Béla jegye egymás mellé szól, ha a fenti négy jegyet véletlenszerűen osztjuk ki közöttük?

3. *(2007. októberi érettségi feladat)*

A rajzterem falát (lásd az ábrán) egy naptár díszíti, melyen három forgatható korong található. A bal oldali korongon a hónapok nevei vannak, a másik két korongon pedig a napokat jelölő számjegyek forgathatók ki. A középső korongon a 0, 1, 2, 3, a jobb szélsőn pedig a 0, 1, 2, 3, …, 8, 9 számjegyek szerepelnek. Az ábrán beállított dátum február 15.

a) Ezzel a szerkezettel valóságos vagy csak a képzeletben létező „dátumokat” forgathatunk ki?

b) Összesen hány „dátum” forgatható ki?

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a három korongot véletlenszerűen megforgatva olyan dátumot kapunk, amely biztosan létezik az évben, ha az nem szökőév?

4. Egy külvárosi gyorsvasúthálózatnak 35 állomása van. A fizetendő viteldíj attól függ, hogy melyik két állomás között utazunk, ezért a vonaljegyekre rányomtatják a kiinduló- és a célállomást is.

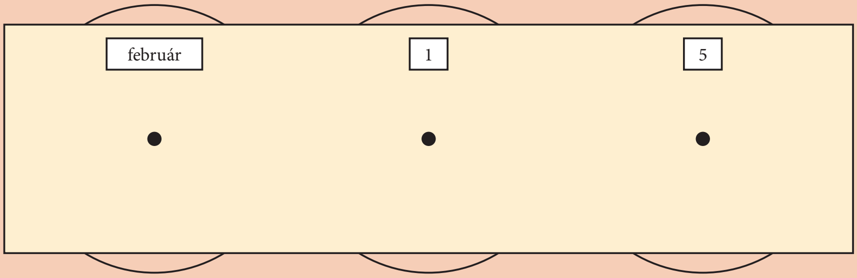
a) Hányféle jegyet kell kinyomtatni?

b) Legfeljebb hány különböző árú jegy lehetséges? (A kiinduló- és a célállomás sorrendjétől nem függ a fizetendő díj.)

5. Számítsd ki a számológépeddel!

a) $0!$ **c)** $\dfrac{11!}{5!+6!}$ **e)** $\dfrac{19!}{20!}$

b) $\dfrac{11!}{5!\cdot 6!}$ **d)** $\dfrac{10!}{9!}$ **f)** $(5!)^2$



31 Kombináljunk! – Kombinációk

BEVEZETŐ

Öt fiatal (Anna, Bálint, Cili, Dénes és Elek) között sorsolunk ki három ugyanolyan koncertjegyet. Beletesszük egy kalapba az öt fiatal nevét, és kihúzunk közülük hármat. Hogy azonban érdekesebb legyen a játék, húzás előtt mindenki leadhat egy tippet, hogy kik lesznek a nyertesek.

a) Hány különböző lehetőségre tippelhetnek a résztvevők?

b) Mekkora egy-egy tipp esélye a telitalálatra?

a) *Első megoldás*

Az öt fiatal nevét jelöljük a kezdőbetűikkel! Könnyen felsorolhatjuk a lehetséges eseteket. Az összehasonlíthatóság kedvéért rendezzük a nyertesek kezdőbetűit ábécésorrendbe:

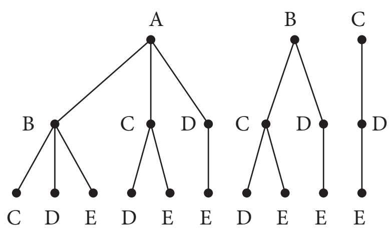
ABC	ABD	ABE	ACD	ACE
ADE	BCD	BCE	BDE	CDE

Összesen tehát 10 különböző lehetőségre lehet tippelni. Nem kaphatunk az eddig felsoroltaktól különböző tippet akkor sem, ha a három nevet nem ábécésorrendben adjuk meg, hiszen csak az számít, hogy melyik három nevet jelöljük meg.

Második megoldás

Ha arra gondolunk, hogy egy tipp elkészítésekor a három nevet ábécésorrendben felírjuk egymás alá, akkor az első név 3-féle lehet: Anna, Bálint vagy Cili. A lehetséges folytatásokat egy három fából álló gráffal is szemléltethetjük.

Láthatjuk, hogy 10 különböző eset lehetséges.



b) A telitalálat valószínűsége 1 : 10, vagy másképpen 0,1. A mindennapokban ezt az esélyt 10%-os esélynek nevezzük.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. **a)** Hány különböző lehetőségre tippelhetnek a résztvevők a Bevezetőben leírt sorsolásnál, ha azt is el kell találniuk, hogy milyen sorrendben húzzák ki a neveket?

b) Mekkora ebben az esetben egy-egy tipp esélye a telitalálatra?

Megoldás

a) A lehetséges tippek száma 6-szorosa a bevezető feladat a) részében lévő számnak: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Ez persze nem véletlen. Ha ugyanis az előző esetben valakinek telitalálata volt, mert például az Anna, Bálint, Cili neveket húzták ki, annak csak akkor lesz telitalálata ugyanezekkel a nevekkel, ha azt is eltalálja, hogy melyik sorrendben húzzák ki ezt a 3 nevet. A lehetőségek száma tehát pontosan annyiszorosára nőtt, ahány különböző módon sorba lehet rendezni három nevet. Eszerint 3!-szorosára, azaz 6-szorosára, 60-ra nőtt a lehetőségek száma.

b) A telitalálat esélye most 1 : 60, vagy másképpen: $\frac{1}{60} \approx 0{,}017$ ($\approx 1{,}7\%$).

2. Hány különböző nyerési lehetőség lenne, ha 6 névből 4-et húzunk ki, és a kihúzott 4 nevet kellene eltalálni úgy, hogy
a) a kihúzás sorrendjét is előre meg kell tippelni;
b) csak a kihúzott neveket kell megtippelni, a sorrendjüket nem?

Megoldás
a) A lehetőségek száma $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.
b) Az a)-beli lehetőségek száma 4!-szor akkora, mint a b)-beli lehetőségek száma.
Vagyis $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4!} = 15$ különböző módon lehet megtippelni azt a 4 nevet, amelyet kihúzhatnak.

FELADAT

1. Ha 5 név közül 2-t húznak ki, akkor hány lehetőségre lehet tippelni, ha
a) a sorrendet nem kell eltalálni;
b) a sorrendet is el kell találni?

2. Ha 8 különböző szám közül 3-at húzunk ki, akkor hány lehetőségre lehet tippelni, ha
a) a sorrendet nem kell eltalálni;
b) a sorrendet is el kell találni?

3. A bevezető feladat 2. megoldásában egy három fából álló gráfot rajzoltunk.
a) Hány csúcsa és hány éle van a gráfnak?
b) Hány elsőfokú, hány másodfokú, hány harmadfokú és hány negyedfokú csúcsa van a gráfnak?

4. **a)** A nagyszülők egyhetes kempingezésre hívták meg 9 leányunokájukat. Azt kérték, hogy közülük hárman jöjjenek két nappal korábban, hogy a bevásárlásban, csomagolásban, a táborhely előkészítésében segítsenek. Hányféleképpen választható ki ez a 3 kislány, ha mindegyikük más feladatban segédkezik?
b) Hányféleképpen választható ki a 9 lányunoka közül az a 3, aki a kempingben első este megfőzi a vacsorának szánt paprikás krumplit?

5. Két nyereményt sorsolnak ki egy parti 90 résztvevője között.
a) Hányféle lehet a sorsolás eredménye, ha két ugyanolyan nyeremény van, de egy ember csak egy nyereményt nyerhet?
b) Hányféle lehet a sorsolás végeredménye, ha két különböző nyeremény van, és mindenki csak egyet nyerhet?
c) Hányféle lehet a sorsolás végeredménye, ha két különböző nyeremény van, és akár ugyanaz a résztvevő is megnyerheti mindkét nyereményt?
d) Hányféle lehet a sorsolás végeredménye, ha két ugyanolyan nyeremény van, és akár egy ember is nyerheti mindkettőt?

HÁZI FELADAT

1. **a)** Egy tárgyalás megkezdése előtt a hét résztvevő mindegyike mindenki másikkal kezet fogott. Összesen hány kézfogás történt?
b) Hány összekötő szakasz (átló vagy oldal) rajzolható egy konvex hétszög csúcsai közé?

2. Apa a képen látható öt lapot tartja a kezében, Csilla egyszerre kettőt kihúz a lapok közül. Mekkora annak az esélye, hogy a királyt és az ászt húzza?

3. Egy utazási iroda 6 üdülőhelyről kínál színes prospektust. Ezek közül véletlenszerűen felmarkolunk kettőt. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?

4. Egy 25 fős osztály 3 tagból álló küldöttséget szeretne kijelölni egy vetélkedőre. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha
a) az egyik küldött az irodalom-, a másik a történelem-, a harmadik pedig a földrajzvetélkedőn indul;
b) mindhárman a matematikavetélkedőn indulnak?

32 Kötésminták – Kombinációk

BEVEZETŐ

Anita sálat köt ajándékba. Tudja, hogy *sima* és *fordított* szemek váltogatásával sokféle mintát kialakíthat. Először egy kisebb darabon próbálgatja a mintát.
Hét szemet köt egy sorba. Úgy dönt, hogy ezek közül 3 *sima,* 4 pedig *fordított* lesz.

Hányféle tengelyesen szimmetrikus minta közül választhat?

Megoldás:
A szimmetria miatt a 7 szem közül a középső csak *sima* lehet, s tőle jobbra is, balra is még 1 *sima* és 2 *fordított* szemet kell elhelyeznie. A lehetőségek a rajzról leolvashatók. (A *sima* szem helyére ×, a *fordított* szem helyére • jelet írunk.)

×••×••×;   •×•×•×•;   ••×××••;
×••×••×;   •×•×•×•;   ••×××••;
×••×••×;   •×•×•×•;   ••×××••;

FELADAT

1. A bevezető feladatban láttuk, hogy ha a minta tengelyesen szimmetrikus, akkor középen sima szemnek kell lennie. Igaz-e az állítás megfordítása: igaz-e, hogy ha középre sima szemet kötünk, akkor a minta tengelyesen szimmetrikus? Válaszodat indokold!

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Eszter érdeklődik Anitától, hányféle mintát tudna kötni 3 sima és 4 fordított szemből, ha nem ragaszkodna a szimmetriához. Anita 7 kis rekeszt rajzol, s elképzeli, melyik háromban lesznek a sima szemek:

×	×	×						×		×	×			
×	×		×					×		×		×		
×	×			×				×		×			×	
×	×				×			×		×				×
×	×					×		×			×	×		

Néhány próbálkozás után látja, hogy túl sok a lehetőség ahhoz, hogy mindegyiket felírja. Így töpreng:
– Olyan minta, amelyben az első és a második szem is sima, 5 van;
– olyan minta, amelyben az első és a harmadik szem sima, de a második fordított, 4 van; …
Eszternek nincs türelme ehhez, inkább így gondolkodik:
– Nézd, ez ugyanolyan, mint amikor kalapból húzunk ki neveket, csakhogy most nem a nevek vannak a kalapban, hanem a rekeszek sorszáma, és azt kell ezek közül „kihúzni”, hogy hová tegyünk sima sze-

met. Az a kérdés, *hányféleképpen választhatunk ki a 7 hely közül 3-at,* ahová a sima szemet kell kötni. Ez pedig $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 7 \cdot 5 = 35$-féle lehet!

2. Csillának hét kedvenc plüssállata van: Bragg, Elly, Kapitány, Mici, Percy, Sózsák és Taxi-Nyuszi. Hány háromelemű részhalmaza van a hét plüssállatból képzett halmaznak?

Megoldás:
A részhalmazok felsorolása igen hosszadalmas lenne, és megeshet, hogy kifelejtünk egy részhalmazt, esetleg valamelyiket véletlenül többször is leírjuk. Ehelyett a következőképpen gondolkodhatunk:
A hételemű halmazból háromelemű részhalmazt kell készítenünk. Ez megfelel annak, hogy a hét különböző elemből hármat kiválasztunk. Ha számítana a kiválasztás sorrendje (azaz lenne az elemek közt első, második és harmadik elem), akkor ezt $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$-féleképpen tehetnénk meg. De így minden részhalmazt 3!-szor számoltunk, hiszen a három kiválasztott elemet ennyiféleképpen rendezhetjük sorba.

Ezért az előbb kapott eredményünket 3!-sal el kell osztanunk. A hételemű halmaz háromelemű részhalmazainak száma tehát:
$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35.$
Nem meglepő, hogy az eredményünk az 1. kidolgozott feladat végeredményével egyezik meg. Ezúttal is 7 „dologból” kellett 3-at kiválasztani: a halmaz 7 eleméből 3-at, és mindegyik részhalmazhoz pontosan egy ilyen kiválasztás tartozik.

FELADAT

2. **a)** Számítsd ki a kötésminta segítségével, hány 4 elemű részhalmaza van egy 7 elemű halmaznak!

b) Van 3 egyforma piros golyónk és 4 egyforma zöld kockánk. Hányféle módon rakhatjuk ezeket sorba?

ELMÉLET

1. A halmazok részhalmazainak számát az alábbi szimbólummal írhatjuk le.

Egy 7 elemű halmaz 3 elemű részhalmazainak a számát így jelöljük: $\binom{7}{3}$; a 4 elemű részhalmazainak a számát pedig így: $\binom{7}{4}$. (Kimondva: *7 alatt a 3*, illetve *7 alatt a 4*.)

Általánosan
Ha n és k természetes szám, és $n \geq k$, akkor $\binom{n}{k}$ azt jelöli, hogy egy n elemű halmaznak hány k elemű részhalmaza van. Az $\binom{n}{k}$ jelet így olvassuk: *n alatt a k*. Az ilyen alakú számokat *binomiális együtthatóknak* nevezzük.

Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható kiszámítható az $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$ összefüggéssel. (A számláló k darab tényezőt tartalmaz.) Például: $\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!}$.

2. Hányféleképpen választhatunk ki n különböző elem közül k darabot úgy, hogy mindegyik elem legfeljebb egyszer választható, és nem számít a kiválasztás sorrendje? A lehetőségek száma $\binom{n}{k}$.

Például: A 7 hely közül kiválasztjuk azt a 3-at, amelybe a sima szemek kerülnek. A lehetőségek száma $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35$.

FELADAT

3. **a)** Számítsd ki, hány 0 elemű, hány 1 elemű, hány 2 elemű, hány 3 elemű, hány 4 elemű, hány 5 elemű, hány 6 elemű és hány 7 elemű részhalmaza van egy 7 elemű halmaznak! A füzetedben töltsd ki a táblázatot!

b) Igaz-e, hogy egymás alatt egyenlő számok vannak? Miért?

$\binom{7}{0} =$	$\binom{7}{1} =$	$\binom{7}{2} =$	$\binom{7}{3} = 35$
$\binom{7}{7} =$	$\binom{7}{6} =$	$\binom{7}{5} =$	$\binom{7}{4} =$

4. **a)** A 32 lapos magyar kártyából 3 lapot osztanak nekünk. Hányféleképpen alakulhat ez a kezdő 3 lap?

b) Örömmel látjuk, hogy remek lapunk van: piros ász, piros felső és makk király. A maradék pakliból újabb két lapot húzunk. Hányféle lehet ez a további két lap?

5. Egy nyolctagú társaság érkezik az épületbe. Négyszemélyes lifttel szeretnének felmenni az ötödik emeletre.

a) Hányféleképpen választhatják ki azt a négy embert, akik először mennek fel?

b) Hányféleképpen rendeződhetnének két négyes csoportba, ha a csoportok sorrendje nem számít?

c) Hányféleképpen mehetnek fel az emeletre a négyszemélyes lifttel, ha az is számít, hogy ki megy az első menetben, és ki megy a második menetben? (A lifttel mindkét menetben négy ember megy fel.)

HÁZI FELADAT

1. Hány 0 elemű, hány 1 elemű, hány 2 elemű, hány 3 elemű részhalmaza van

a) egy 3 elemű halmaznak;

b) egy 4 elemű halmaznak;

c) egy 5 elemű halmaznak?

2. Mennyi $\binom{4}{0}$, $\binom{4}{1}$, $\binom{4}{2}$, $\binom{4}{3}$, $\binom{4}{4}$?

3. Tervezz minél több kötésmintát

a) 2 sima és 3 fordított szemből;

b) 2 sima és 4 fordított szemből!

4. Egy utazó vidámparkban 9-féle játékra lehet felülni. A menetek azonban igen drágák, a pénzünkből csak 4 menetre futja.

a) Hányféleképpen választhatjuk ki a 4 játékot, ha egyiken sem szeretnénk többször menni?

b) Hogyan módosulna a válasz, ha 5 menetre futná a pénzünkből?

5. A 32 lapos magyarkártya-csomagból 5 lapot osztanak nekünk. Hányféle lehet a kapott 5 lap?

A kombinatorika néhány fogalma

I. Permutáció

Legyen az n egy pozitív egész szám. Ha n különböző elemet valamilyen sorrendbe rakunk, akkor azt mondjuk, hogy *megadtuk ezeknek a elemeknek egy* ***permutációját***. Ha a sorrendet megváltoztatjuk, akkor ugyanezeknek a elemeknek *egy másik permutációját* kapjuk meg.
Például az A, C, I, L betűk egy permutációja L A C I, egy másik permutációja C I L A;
n különböző elem **permutációinak** számát így is szoktuk jelölni: P_n.
Bebizonyítható, hogy $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Ennek a szorzatnak a rövidebb jele: $n!$ (olvasd: n faktoriális).

Például:
ha 3 lány be akar menni egy ajtón, akkor a lehetséges sorrendek száma: $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$;
ha az A, C, I, L betűket rendezgetjük, akkor
$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ betűcsoportot kaphatunk;
ha 7 név van egy sapkában, és ezeket kihúzzuk, akkor ezt $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$ különböző sorrendben tehetjük meg.

II. Variációk

Legyen az n is és a k is egy pozitív egész szám, és legyen $k \le n$. Ha n különböző elem közül kiválasztunk k darabot úgy, hogy *mindegyik legfeljebb egyszer választható*, és ezt a k dolgot valamilyen sorrendbe rakjuk, akkor azt mondjuk, hogy megadtuk az adott n elemnek egy ***k-ad osztályú variációját***.
Ha ezeket a dolgokat más sorrendben szemléljük, vagy nem ugyanezt a k dolgot választjuk ki, akkor az adott n elemnek egy másik k-ad osztályú variációját adtuk meg.
Például:
az A, L, N, Ó betűk egy másodosztályú variációja Ó L, egy másik másodosztályú variációja L Ó.
Ha n is és k is pozitív egész számot jelöl, és $k \le n$, akkor n különböző elem k-ad osztályú variációinak a számát így is szoktuk jelölni: V_n^k.
A 3. lecke bevezető feladatának a) részében azt számítottuk ki, hogy *öt* különböző elem *harmadosztályú variációinak* a száma 60. Jelekkel: $V_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.
Bebizonyítható, hogy
$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.
Ennek a szorzatnak k tényezője van.
Például $V_9^4 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$.

III. Ismétléses variációk

Legyen az n is és a k is egy pozitív egész szám. Ha n különböző elem közül kiválasztunk k darabot úgy, hogy *ugyanaz az elem többször is választható*, és ezt a k dolgot valamilyen sorrendbe rakjuk, akkor azt mondjuk, hogy megadtuk az adott n elemnek egy ***k-ad osztályú ismétléses variációját***.
n különböző elem k-ad osztályú ismétléses variációinak a számát így is szoktuk jelölni: $V_n^{k,i}$.
Például:
Az A, B betűk egy harmadosztályú ismétléses variációja A A B, egy másik harmadosztályú variációja B A B.
A 3. lecke bevezető feladatának b) részében azt számítottuk ki, hogy *öt* különböző elem *harmadosztályú ismétléses variációinak* a száma 125. Jelekkel:
$V_5^{3,i} = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$.
Bebizonyítható, hogy $V_n^{k,i} = n^k$.
Például $V_9^{4,i} = 9^4$.

IV. Kombinációk

Legyen az n is és a k is egy pozitív egész szám, és legyen $k \le n$. Ha n különböző elem közül kiválasztunk k darabot úgy, hogy *mindegyik legfeljebb egyszer választható*, és *nem számít a kiválasztott dolgok sorrendje*, akkor azt mondjuk, hogy megadtuk az adott n elemnek egy ***k-ad osztályú kombinációját***.
Ha nem ugyanezt a k dolgot választjuk ki, akkor az adott n elemnek egy másik k-ad osztályú kombinációját adtuk meg; de ha a kiválasztott dolgokat más sorrendben szemléljük, akkor az előzővel azonos kombináció.
Például: az A, L, N, Ó betűk esetében az Ó L és a L Ó ugyanaz a másodosztályú kombináció, az Ó L és az Ó N két különböző másodosztályú kombináció.
Ha n is és k is pozitív egész számot jelöl, és $k \le n$, akkor n különböző elem k-ad osztályú kombinációinak a számát így is szoktuk jelölni: C_n^k.
Az órán láttuk, és be is bizonyítható, hogy

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

Ha az n különböző elem közül úgy választhatunk ki k darabot, hogy *egy elem többször is választható, de a kiválasztás sorrendje nem számít,* azt **ismétléses kombinációnak** nevezzük, és összeszámlálása jóval bonyolultabb az eddigieknél.

33 Binomiális együtthatók kiszámítása

BEVEZETŐ

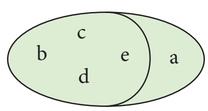
Egy 5 elemű halmaznak 0, 1, 2, 3, 4 és 5 elemű részhalmazai vannak. Melyik fajtából hány van?

Megoldás

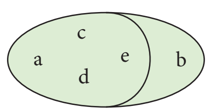
Jelöljük a vizsgált halmaz elemeit az a, b, c, d és e betűkkel! Az {a, b, c, d, e} halmaznak egyetlen 0 elemű részhalmaza van, az üres halmaz. 5 elemű is 1 van, maga az eredeti halmaz.

Tehát $\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1.$

Az 1 elemű részhalmazok:
{ a }, { b }, { c }, { d }, { e }.

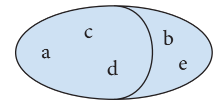


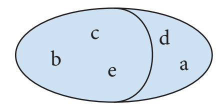
Tehát $\binom{5}{1} = 5.$



Ugyancsak 5 darab 4 elemű részhalmaza van az {a, b, c, d, e} halmaznak, mégpedig az 1 elemű részhalmazok kiegészítő halmazai:
{b, c, d, e}, {a, c, d, e}, {a, b, d, e}, {a, b, c, e}, {a, b, c, d}.

Tehát $\binom{5}{4} = 5.$

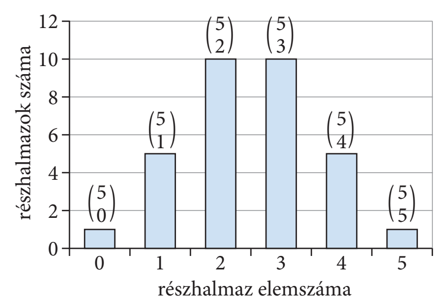




Hány 2 elemű részhalmaza van az {a, b, c, d, e} halmaznak? Ugyanannyi, mint ahány 3 elemű, mert az {a, b, c, d, e} halmaz 3 elemű részhalmazai éppen a 2 elemű részhalmazok kiegészítő halmazai. Vagyis $\binom{5}{2} = \binom{5}{3}.$

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = 10 \text{ és } \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10$$

Az 5 elemű halmaz részhalmazainak számát oszlopdiagramon is szemléltethetjük.



FELADAT

1. Számítsd ki az $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$ összeget a bevezető feladat eredményeinek felhasználásával!

2. **a)** Hány részhalmaza van egy 4 elemű, egy 3 elemű, egy 2 elemű, egy 1 elemű és egy 0 elemű halmaznak?
b) Írd fel a kapott eredményeket binomiális együtthatók segítségével is!

KIDOLGOZOTT FELADAT

Kamillának az idén 11-féle órája van az iskolában. A hétfői napon 6 tantárgyból van egy-egy órája.

a) Hányféleképpen választható ki a 6 tantárgy?

b) Hány különböző órarendje lehetne Kamillának hétfőn?

Megoldás

a) A kérdés *matematikai modellje* a következő: Hány 6 elemű részhalmaza van egy 11 elemű halmaznak? A válasz: $\binom{11}{6}$.

Hogyan számolhatjuk ezt ki? Sok számológépen közvetlen lehetőség van a *binomiális együtthatók* kiszámítására. Ha van a gépen egy nCr feliratú gomb, akkor a kiszámítás módja a következő: 11 nCr 6 =. A kijelzőn megjelenik az eredmény: 462. Tehát a 6 tantárgy 462 különböző módon választható ki a 11 tanult tantárgy közül.

b) Kétféleképpen is kiszámíthatjuk a lehetséges hétfői órarendek számát.

Első módszer

A lehetőségek száma

$11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 332\,640$,

amit – az arra alkalmas számológéppel – a 11 nPr 6 = billentyűkombinációval is kiszámolhatunk.

Második módszer

Ha már megvan a hétfői nap 6 tantárgya, akkor ezeket már csak sorba kell rendezni. A hat tantárgyat 6! különböző sorrendbe állíthatjuk, azaz a hétfői órarendek száma $462 \cdot 6! = 462 \cdot 720 = 332\,640$-féle lehet.

ELMÉLET

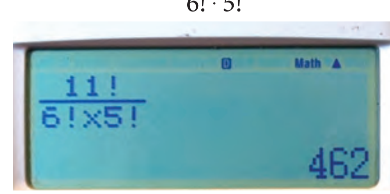
Látható, hogy $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \binom{11}{6} \cdot 6!$, vagyis $\binom{11}{6} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{6!}$.

Egy kis átalakítás után azok is könnyen kiszámolhatják a számológépük segítségével a $\binom{11}{6}$ értékét, akiknek nincs nCr billentyűjük.

Bővítsük a $\frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{6!}$ törtet az $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$ szorzattal:

$\frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$. A számlálóban éppen a 11! áll, és a nevező is egyszerűbben írható: $\frac{11!}{6! \cdot 5!}$.

Tehát: $\binom{11}{6} = \frac{11!}{6! \cdot 5!} = 462$.



FELADAT

3. Kamillának kedden a 11 tanult tantárgy közül csak 5 tantárgyból van egy-egy órája.

a) Több vagy kevesebb lehetőség van az 5 tantárgy kiválasztására, mint a 6-éra?

b) Több vagy kevesebb keddi órarendet lehet készíteni az 5 kiválasztott tantárgyból, mint a hétfői 6-ból? Hányat?

4. **a)** Határozd meg számológépeddel a következő binomiális együtthatók értékét!

$\binom{11}{2}, \binom{11}{3}, \binom{11}{4}, \binom{11}{7}, \binom{11}{8}, \binom{11}{9}.$

b) Fogalmazz meg három olyan valós problémát, amelyre az a)-ban kiszámított valamelyik binomiális együtthatóval adható meg a válasz!

c) Számológépeddel igazold, hogy:

$$\binom{11}{0} + \binom{11}{1} + \binom{11}{2} + \ldots + \binom{11}{10} + \binom{11}{11} = 2^{11}$$

5. A diáknapi vetélkedő zsűrijébe 6 személyt kell kiválasztanunk 5 tanár és 8 diák közül. Hányféle különböző módon állíthatjuk össze a zsűrit, ha

a) a tanár–diák létszámarány közömbös a kiválasztás szempontjából;

b) a zsűriben 3 tanárnak és 3 diáknak kell helyet foglalnia?

HÁZI FELADAT

1. Melyik természetes számot jelentheti az n, ha egy n elemű halmaznak 2^n részhalmaza van?

2. Csilla karkötőket készít gyöngyökből. 15 színből vannak gyöngyei, mind a 15 színből nagyon sok. Hajninak 4 színű karkötőt készít. Hány különböző módon választhatja ki a 15 színből a 4-et?

3. Tamás és 15 osztálytársa megbeszélte, hogy ha jó lesz az idő, vasárnap kirándulnak. Mindenki vasárnap reggel dönti el, hogy elmegy-e a megbeszélt találkozóhelyre. Hogy a dolog izgalmasabb legyen, senki sem árulja el a döntését a többieknek.

a) Hány különböző módon lehetséges az, hogy végül a 16 gyerek közül 7-en mennek el a találkozóra?

b) Hány különböző módon lehetséges az, hogy végül a 16 gyerek közül 9-en mennek el a találkozóra?

c) Hány különböző módon alakulhat a találkozón megjelenő diákok halmaza?

d) Eléggé szeszélyes az időjárás, ezért aztán szombat délután Tamás azon gondolkozik, hogy mekkora az esélye annak, hogy senki sem megy el a találkozóra, illetve annak, hogy mindenki elmegy. Milyen eredményt kaphatott?

4. Megállunk egy gyümölcsárus pultja előtt, aki almát, körtét, szőlőt, őszibarackot és ringlót kínál eladásra. Eldönthetjük, hogy vásárolunk-e bármelyik gyümölcsből, vagy csak egyfajtából veszünk valamennyit, de az is lehetséges, hogy többféléből, akár mind az öt gyümölcsfajtából vásárolunk.

a) Hány lehetőségünk van, ha kétféle gyümölcsöt szeretnénk venni?

b) Hány lehetőségünk van összesen?

5. Tamás osztálya történelemből felel. 32-en vannak az osztályban. A tanáruk 3 felelőt választ ki véletlenszerűen. Mekkora az esélye annak, hogy Tamás nincs köztük? (A felelők sorrendje nem számít.)

RÁADÁS

I. Kéttagú összeg hatványai

Az $\binom{n}{k}$ számokra a binomiális együttható elnevezés onnan ered, hogy ezek a számok szerepelnek a *kéttagú összeg* (görögül: *binom*) hatványainak a kifejtésében.

Binomiális tétel: Ha a és b valós számok, n pedig pozitív egész szám, akkor

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}b^n.$$

Például

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

II. A binomiális együtthatók néhány tulajdonsága

Bebizonyítható, hogy ha az n és a k olyan természetes számok, hogy $n \geq k$, akkor igazak a következő összefüggések:

a) $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$;

b) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;

c) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$.

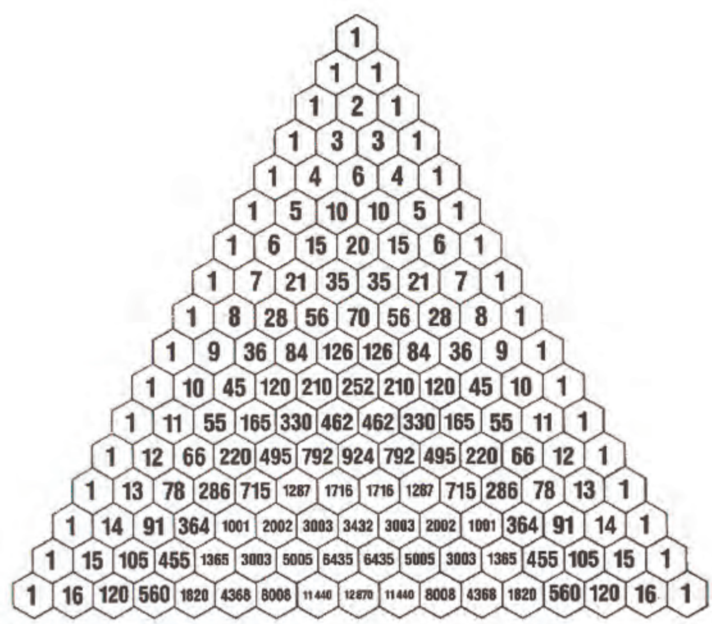
Például

1. $\binom{100}{98} = \binom{100}{2} = \dfrac{100\cdot 99}{2} = 4950$;
2. minden 77 elemű halmaznak 2^{77} részhalmaza van;
3. ha $n = 16$ és $k = 12$, akkor

   a) $\binom{16}{12} = \dfrac{16!}{12!\cdot 4!}$;

   b) $\binom{16}{12} = \binom{16}{4}$;

   c) $\binom{16}{0} + \binom{16}{1} + \binom{16}{2} + \ldots + \binom{16}{15} + \binom{16}{16} = 2^{16}$.



FELADAT

1. Igazold a binomiális tételt kombinatorikai megfontolások segítségével!

2. Fent egy háromszögalakba rendezett táblázatot találsz a binomiális együtthatókról. Észreveheted, hogy mindegyik szám a kettő fölötte lévő összege. Igazold, hogy az így kapott számok valóban a binomiális együtthatók!

3. Kombinatorikai megfontolások alapján igazold, hogy: $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ minden n, k pozitív egész szám esetén!

34 Kiválasztási feladatok I.

BEVEZETŐ

Mekkora az esélye Bencének, hogy egyetlen kitöltött lottószelvénnyel telitalálata lesz az ötös lottón?
Az ötös lottón 90 számból kell megjelölni 5-öt. Nem számít, az, hogy melyik számot jelöltük meg először, melyiket másodszor, csak az, hogy melyik a megjelölt 5 szám. Vagyis a kiválasztás sorrendje nem számít. A 90 szám közül az 5 nyerő számra $\binom{90}{5}$-féleképpen lehet tippelni.
Mivel $\binom{90}{5} = 43\,949\,268$, ezért ha egy szelvénnyel játszik Bence, a telitalálatra körülbelül 1 : 44 000 000, vagyis körülbelül 0,000 000 023 az esélye. Ez meglehetősen kevés!

FELADAT

1. Ha Bence a hatos lottóval próbálkozna, akkor mekkora esélye lenne a telitalálatra, feltéve, hogy egy szelvénnyel játszik? A hatos lottóban 45 szám közül 6-ra kell tippelni.

2. Ha egy szelvénnyel játszik, akkor mekkora esélye van Bencének

a) az ötös lottón arra, hogy pontosan 4 találata legyen?

b) az ötös lottón arra, hogy pontosan 3 találata legyen?

c) a hatos lottón arra, hogy pontosan 5 találata legyen?

d) a hatos lottón arra, hogy pontosan 3 találata legyen?

Segítség

a) az 5 kihúzott számból 4-et kell eltalálnia, de az ötödik szám a nem nyerő 85 szám közül való;

b) az 5 kihúzott számból 3-at kell eltalálnia, de a másik 2 szám a nem nyerő 85 szám közül való.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Tíz diák vízitúrára menne, kapnak is túravezetőt, de csak egy három- és egy ötszemélyes csónak áll rendelkezésükre. A kisebb csónakban az egyik utasnak eveznie, a másiknak kormányoznia kell, a harmadik utas csak pihen. A nagyobbik csónakban ül a túravezető, ő kormányoz, mellette négy túrázó fér el, ők mind evezni fognak. Hányféleképpen állítható össze a tíz diákból a túrán részt vevők 7 fős csoportja?

Megoldás

Először kiválasztunk a *tíz* diák közül *hármat*, ők majd a kisebb csónakba ülnek. Mindhármukra más-más feladat hárul, tehát itt számít a kiválasztottak sorrendje. Ezért a kiválasztási lehetőségek száma: $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.
Most a többi *hét* diák közül választunk *négyet*, ők ülnek a túravezetővel a nagyobbik csónakba. Egyforma a beosztásuk, tehát itt nem számít a kiválasztottak sorrendje. Ezért a kiválasztási lehetőségek száma: $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$.
Bárhogyan választjuk is ki az első csónakba a 3 diákot, hozzájuk 35-féleképpen választhatók a második csónak utasai, tehát összesen $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \binom{7}{4} = 720 \cdot 35 = 25\,200$ módon állítható össze a tíz diákból a túrán részt vevő csoport.

FELADAT

3. A kidolgozott feladatban adott probléma másképpen is megoldható. Hiszen kiválaszthatnánk először azt a 4 diákot, aki a túravezetővel kerül egy csónakba, majd a megmaradt 6 diák közül azt a hármat, aki a kisebb csónakban utazik majd. Így viszont a lehetőségek számára $\binom{10}{4} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ adódik. Melyik a helyes megoldás?

4. Egy 15 fős baráti társaság egy 4 személyes, egy 5 személyes és egy 6 személyes bérelt autóval megy kirándulni. Hányféle ülésrend lehetséges, ha mindenki tud vezetni, és

a) az egyes autókban az ülésrend lényegtelen;

b) nemcsak az számít, hogy ki melyik autóba ül, hanem az is, hogy pontosan melyik ülésre?

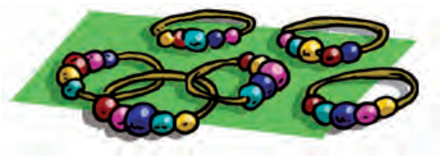
c) Oldd meg úgy is a feladatot, hogy a 15 fő három darab 5 személyes autóba ül! Az autók között nem teszünk különbséget (csak az számít, hogy ki kivel ül egy autóban), és az is mindegy, hogy az autón belül ki hol ül.

ELMÉLET

Az elmúlt órákon az összetett kombinatorikai feladatok, problémák megoldásának három eszközével is találkozhattunk. Az összetettebb feladatok megoldásában mind a három módszer gyakran segítségünkre lehet:

1. Ha úgy kell sorba rendeznünk elemeket, hogy azok közül néhány elemnek mindenképpen egymás mellé kell kerülnie, akkor ezeket az elemeket érdemes egy elemnek tekinteni. A sorba rendezés után még figyelembe kell vennünk ezen elemek egymáshoz képesti sorrendjét is.

2. Akad olyan probléma, amikor könnyebb összeszámolni a keresett esetek egy többszörösét. Így járunk el, amikor azonos tárgyakat először megkülönböztetünk, így csupa különböző tárgyunk lesz. A *különböző* tárgyakkal megoldjuk a feladatot (például összeszámoljuk, hányféleképpen állíthatók sorba). Majd ezek után végiggondoljuk azt, hogy mivel a tárgyak között vannak azonosak, így hányszor számoltunk egy-egy esetet. Ha minden esetet *ugyanannyiszor* számoltunk, akkor egy osztással megkaphatjuk a különböző esetek számát. Ha tehát a lehetséges eseteket össze tudjuk úgy számolni, hogy abban minden, egymástól lényegében (a feladat szövege alapján) nem különböző esetet pontosan k-szor számolunk, akkor az egymástól különböző esetek számát a k-val való osztással kaphatjuk meg.



3. Ha a lehetséges esetek összeszámlálásában nehézségünk támad (például a módszerünk túl hosszadalmas, vagy vannak esetek, amelyeket többször számoltunk, de akadnak, amelyeket nem stb.), akkor célszerű megvizsgálni, hogy könnyebben össze tudjuk-e számolni a számunkra „kedvezőtlen” (rossz) esetek számát. Az összesből kivonva őket, megkapjuk a számunkra „kedvező” esetek számát.

KIDOLGOZOTT FELADAT

2. Hányféle (nem feltétlenül értelmes) anagramma alkotható a PARALELOGRAMMA szó betűiből?

I. megoldás:

Ha a 14 betű mindegyike különböző lenne, az 14!-féle lehetséges sorrendet jelentene. Gondolatban színezzük be az azonos betűket különböző színűre. Mivel két „L” betűt használtunk fel, minden esetet kétszer számoltunk: akkor, amikor a „piros L” betű van előrébb, és akkor is, amikor a „kék” van előrébb, de a többi betű sorrendje változatlan. Így a 14!-féle lehetőségnek csak a fele lesz az, amelyben nem különböztetjük meg az „L” betűket.

De még így is kétszer számoltunk minden különböző esetet, a két azonos „M” betű miatt, valamint ismét kétszer az „R” betűk miatt. Így további $2 \cdot 2$-vel kell még osztanunk. „A” betűből négy darab is van, amelyek egymáshoz képest vett sorrendje szintén nem számít, így minden megmaradt esetet 4!-szor számoltunk.

A 14 betű, amelyek közt rendre 2, 2, 2, 4 azonos betű van, tehát $\frac{14!}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4!}$-féle sorrendben rakható ki.

Megjegyzés: A tört nevezőjében a 2-es tényezők helyett írhattunk volna 2!-t is.

II. megoldás:

Oldjuk meg a feladatot egymásból szétágazó döntések segítségével! Egy anagrammát felépíthetünk így is: elsőként kiválasztjuk, hogy hová kerüljön a 14 hely közül a 2 „L” betű. Ez $\binom{14}{2}$-féle lehetőséget jelent. Ezután meghatározzuk, hogy a maradék 12 hely közül hová kerüljön a 2 „M” betű. Ez, függetlenül az előző döntéstől, $\binom{12}{2}$-féle lehetőség. A maradék 10 helyre a 2 „R” betűt $\binom{10}{2}$-féleképpen helyezhetjük el. A 8 megmaradt helyre a 4 „A” betűt $\binom{8}{4}$-féleképpen illeszthetjük be. Végül 4 különböző betűnk maradt (P, G, E, O), amiket a megmaradt 4 helyre kell sorba rendeznünk, amit 4!-féleképpen tehetünk meg.

Minden esetet pontosan egyszer számoltunk, így összesen

$$\binom{14}{2} \cdot \binom{12}{2} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{4} \cdot 4!$$

lehetséges anagrammát rakhatunk ki.

FELADAT

5. Hány darab (nem feltétlenül értelmes) anagrammát tudnál alkotni a neved betűiből? Találsz értelmes anagrammát? (Az anagramma több szóból is állhat.)

6. Az 52 lapos francia kártyából találomra kiválasztunk 4 lapot.

a) Hányféle lehet a kiválasztás eredménye?

b) Mekkora az esélye annak, hogy mind a négy ász a kezünkbe kerül?

c) Mekkora az esélye annak, hogy nem lesz nálunk mind a négy ász?

d) Mekkora az esélye annak, hogy nem lesz egyetlen ász sem a lapok között?

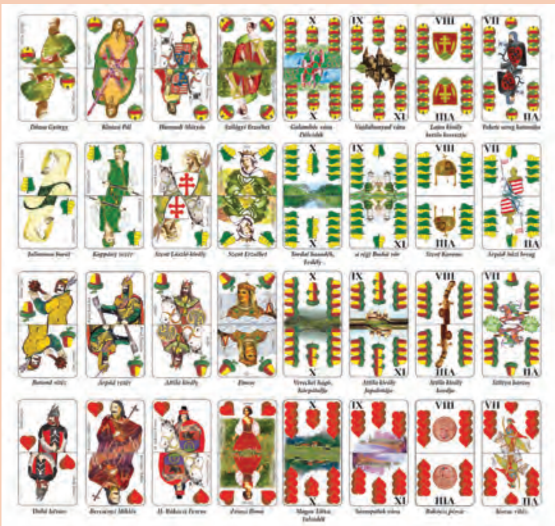
HÁZI FELADAT

1. Van olyan lottójáték is, amelynél 35 szám közül 7-re kell tippelni.

a) Egy szelvénnyel játszva mekkora az esélye a telitalálatnak?

b) Egy szelvénnyel játszva mekkora az esélye a 4 találatnak?

2. Bence és Dönci 32 lapos magyar kártyával játszanak.



Először Döncinek osztanak 5 lapot.

a) Hányféle lehet Dönci lapja?

Dönci után Bencének osztanak 5 lapot.

b) Hányféle lehet Bence lapja, ha tudjuk, hogy Döncinél van a négy király és a makk hetes?

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a b) pontban leírt esetben Bencénél van a zöld ász?

A játék vége után begyűjtötték a kiosztott lapokat, megkeverték a paklit, és új menetet kezdtek. Ismét öt-öt kártyát osztottak mindkettőjüknek.

d) Hányféle lehet a kezdő leosztás (Bence kezdő öt lapja és Dönci kezdő öt lapja)?

3. Bence egyik házi feladata így szólt: 8 különböző ajándék közül 3-at Csongornak, 2-t Boginak adunk. Hány különböző lehetőség van erre? Oldd meg a feladatot!

a) Írd le binomiális együtthatók használatával a következő kijelentést: A lehetőségek száma ugyanannyi, ha először Csongornak adunk a 8 ajándék közül 3-at, majd a megmaradó 5 ajándék közül 2-t Boginak, mint ha először Boginak választunk 2 ajándékot a 8 közül, és a megmaradó 6 ajándék közül 3-at választunk Csongornak.

b) Mutasd meg a számológéped segítségével, hogy $\binom{12}{3}\cdot\binom{9}{5}=\binom{12}{5}\cdot\binom{7}{3}$! Keress más hasonló példákat is, és magyarázd el, miért igazak azok!

Rényi Alfréd (1921–1970)

Matematikus, a kombinatorika, a gráfelmélet, a számelmélet és legfőképp a valószínűségszámítás területén ért el kimagasló eredményeket. Egyik leghíresebb ismeretterjesztő munkája a *Levelek a valószínűségről*, melyben a valószínűség fogalmával kapcsolatos elvi kérdésekkel foglalkozik. Írásaiban szokatlan és szórakoztató formát választ: a téma egyik első kutatójának, a XVII. századi francia matematikus, Blaise Pascalnak kortársához, Pierre Fermat-hoz írt fiktív (kitalált, nem valós) leveleinek formájában igyekszik megvilágítani e terület alapvető kérdéseit.

Erdős Pál (1913–1996)

A XX. század egyik legismertebb és legnagyobb hatású matematikusa, a matematika szinte minden területén tevékenykedett. Kiemelkedők a kombinatorika kutatásával és alkalmazásaival kapcsolatos eredményei.
Híres volt problémafelvetéseiről – melyekre sokszor pénzjutalmat tűzött ki – és hatalmas tudományos munkásságáról.

Ráadás Póker – Kiválasztási feladatok II.

Párokban dolgozzatok! Minden párnál legyen egy 52 lapos franciakártya-pakli! Célszerű a lapokat rendezetten (szín vagy laptípus szerint) kirakni, hogy a feladatokat könnyebben átlássátok.

BEVEZETŐ

A póker kártyajátékot az 52 lapos francia kártyával játszszák. Egy pakli kártyában 4 szín van (pikk, kőr, káró, treff), minden színben 13 különböző értékű lap (ász, király, dáma, bubi, 10, 9, …, 3, 2). A játékosoknak 5-5 lapjuk van.
Az értékes lapkombinációkat figuráknak hívják. Ezek közül a legegyszerűbb az 1 pár.
Az 5 lap akkor alkot 1 párt, ha az 5 lapból kettő azonos értékű (pl. mindkettő király), s a másik három lap értéke ezektől is, egymástól is különbözik.
A többi figurát később ismertetjük.

Bence és három barátja, Jocó, Dönci és Szulamit pókereztek. Bence alaposan kikapott a két fiútól és a lánytól. A játszma végén megkérdezte tőlük, hogyan lehetett ekkora szerencséjük.
– Nem szerencse volt. Csak te olyankor is blöfföltél, amikor alig volt esélyed jó lapokra – válaszolta Dönci.
– Ti bezzeg ismeritek az összes valószínűséget! – csattant fel Bence.
– Én igen – vallotta be csendben Jocó, aki ezúttal nem akart megint okoskodónak tűnni.
– Én nem, de könnyen rá lehet érezni – mondta Szulamit.
– Viszont mi pont ezt tanuljuk matekból, és szerintem ki tudjuk számolni az összeset. – Erre már Jocó szeme is felcsillant.
– Csináljuk!
– Kezdjük a párral – mondta Szulamit. – Azt számoljuk ki, hogy hányféleképpen lehet párunk! Figyelj, mert ez nehéz: ahhoz, hogy párod legyen, kell két egyforma lap és a maradék három különböző kell legyen.
Bence és Dönci hosszasan töprengtek (Jocó nekiállt fejben számolni), végül megrázták a fejüket.
– Ez tényleg nehéz.
Szulamit kis gondolkodás után Bence kezébe nyomta a kártyapaklit.
– Jó, akkor csináljuk máshogy! Rakj ki öt lapot úgy, hogy az pár legyen! És közben próbáld végig tudatosítani, hogy milyen döntéseket hozol, amikor kirakod a kártyalapokat!
Bence átnézte a kártyapaklit, aztán kirakott két királyt, a kárót és a kőrt, valamint a pikk hetest, a káró kilencest és a kőr dámát.
– Megvan.
– És az is, hogy milyen döntéseket hoztál meg közben?
– Azt hiszem. Először azt, hogy milyen párom legyen. A királyt választottam. Aztán ki kellett választanom, hogy melyik két király legyen a kezemben. Ezután kellett egymás után három különböző értékű lap.
– És ezeket már mindegy, hogy milyen sorrendben rakod ki – helyeselt Jocó.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Írjuk fel a feladat megoldását Bence gondolatmenete alapján!

Megoldás:
Gondoljuk végig, hogy az egyes döntési helyzetekben hányféle lehetőség közül választhatunk. Ha a választási lehetőségek száma nem függ az előző döntésünktől, akkor a lehetőségek számait összeszorozhatjuk. Oda kell azonban figyelni arra is, hogy nem számoltunk-e bizonyos eseteket többször is.

1. döntés: Miből lesz párom? Mivel 13 különböző értékű laptípus van a francia kártyában, ez **13**-féle lehetőséget jelent.
2. döntés: Melyik két lap alkotja a párt az adott típusból? Minden laptípusból négy különböző színű van (treff, pikk, káró, kőr), tehát miután kiválasztottuk, hogy milyen párunk lesz, a 4 lapból 2-t kell megjelölnünk, ami $\binom{4}{2}$ lehetőséget jelent.
3. döntés: Mi a harmadik kezemben tartott lap? Már csak 48 lapból választhatok, hiszen olyan típus, amiből párom van, már nem lehet köztük.
4. döntés: Mi a negyedik kezemben tartott lap? Az előző döntéssel 3 további lapot kizártam (az előzővel egyező típusúakat), így már csak 44 lapból választhatok.
5. döntés: Mi az ötödik kezemben tartott lap? Az előző döntéshez hasonló gondolatmenettel már csak 40 lap közül választhatok.
Számoltam-e többször azonos eseteket? Igen! A 3–5. döntésben választott lapokat bármilyen sorrendben kiválaszthattam, azok ugyanazt a három lapot jelentik. Így minden esetet 3! = 6-szor számoltam. Az 1–5. döntésből származó szorzatot tehát el kell osztanom 3!-sal.
Az összes lehetőség tehát, amikor 1 pár van a kezemben:

$$1\ \text{PÁR:}\ \frac{13\cdot\binom{4}{2}\cdot 48\cdot 44\cdot 40}{3!} = 1\,098\,240.$$

A figura esélyét, tehát azt, hogy az esetek hány százalékában fordul elő, szintén ki tudjuk számolni.
Összesen $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$-féle kombináció lehet a kezünkben, annak az esélye (valószínűsége) tehát, hogy 1 párunk lesz:

$$\frac{\dfrac{13\cdot\binom{4}{2}\cdot 48\cdot 44\cdot 40}{3!}}{\binom{52}{5}} = 0{,}423,$$

tehát 42,3%.

2. Jocó így írta fel az 1 párt alkotó esetek számát:

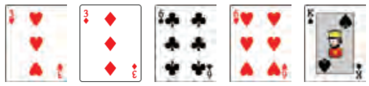
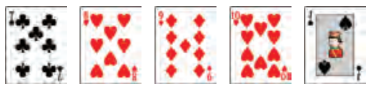
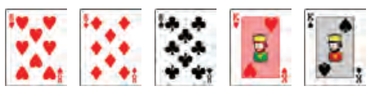
$$13\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{12}{3}\cdot 4^3 = 1\,098\,240.$$

Mik voltak Jocó döntései a megoldás során?

Megoldás:
Az első két döntés megegyezik az előző feladatéval.
1. döntés: Miből lesz párom?
2. döntés: Az adott típus melyik két lapja alkotja a párt?
3. döntés: Melyik három laptípus alkotja a maradék három lapot? A maradék 12 típusból kell 3 különbözőt választanom, hogy ne legyen erősebb lapkombinációm. Ezt $\binom{12}{3}$-féleképpen tehetem meg.
4. döntés: Milyen színű a maradék három lap? Mivel mindegyik típus a négyféle szín bármelyike lehet, ezért itt 4^3-féleképpen dönthetek.
Számoltam-e többször azonos eseteket? Nem. Azzal, hogy a három maradék lapot is kiválasztással írtam fel, a sorrendet sehol sem vettem figyelembe.

PÁRMUNKA

Számoljátok ki minél több figurának a valószínűségét! Használjátok a kártyapaklit az öt kártya összeállításához, és jegyezzétek fel, hogy az egyes kártyalapok kiválasztásánál milyen döntéseket kell meghoznotok! Gondoljátok végig azt is, hogy számoltatok-e többször egymástól lényegében nem különböző eseteket.
Vigyázzatok! Arra is oda kell figyelnetek, hogy a lapkombináció ne legyen „erősebb” a kiszámítandónál. Például a sor ne legyen azonos színű, mert az már színsor lenne.

1 PÁR		2 azonos típusú lap és három különböző
2 PÁR		2-2 azonos típusú lap és egy ezektől különböző
DRILL		3 azonos típusú lap és két különböző
SOR		5 egymást követő lap (nem azonos színűek)
FLUSH		5 azonos színű lap (nem alkotnak sort)
FULL		3 azonos típusú lap és egy pár (egy drill és egy pár)
PÓKER		4 azonos típusú lap
SZÍNSOR		5 egymást követő azonos színű lap, legfeljebb 9-től indítva
ROYAL FLUSH		azonos színű 10, J, Q, K, A lapok

Az óra végén mutassátok be megoldásaitokat az osztálynak! A tankönyv végén megtaláljátok a helyes végeredményeket, így ellenőrizhetitek, hogy jó-e a megoldásotok.

HÁZI FELADAT

1. Mekkora annak az esélye, hogy „üres” leosztás van a kezemben, tehát egyik fenti se jött ki?

2. Mira nagyon tehetségesen rajzol. Egy alkalommal a fizikatanárával úgy döntenek, dekorációt készítenek a fizika tanterembe: Mira híres fizikusokról készít plakátokat. A fizikatanár elképzelései között Tycho Brahe, Galileo Galilei, Isaac Newton, Marie Curie, Albert Einstein, Richard Feynmann, Peter Higgs és Vera Rubin szerepelnek, valamint egy-egy „csoportkép” az elektromosságtan és a kvantummechanika nagyjairól. A tíz plakátot úgy tervezik kihelyezni, hogy elsőként két plakát jelenjen meg, majd havonta egy-egy újabb. Az első évben összesen hét plakátot fog elkészíteni a tervezett tízből. Hányféle sorrendben kerülhetnek ki az első év plakátjai? (Az első kettő sorrendje nem számít.)

3. Egy cipősszekrényben 10 pár cipő van. Találomra kiválasztottunk belőle négy darabot. Mekkora annak az esélye, hogy

a) nem lesz közöttük pár;
b) lesz közöttük pár;
c) pontosan egy pár lesz közöttük?

RÁADÁS

Hányféleképpen tudjuk kiolvasni az alábbi képen a TÉGLALAP szót? (A kiolvasás betűnként balról jobbra vagy fentről lefelé haladva történik.)

T	É	G	L	A
É	G	L	A	L
G	L	A	L	A
L	A	L	A	P

I. megoldás:

A felső sor betűihez csak egyféleképpen juthatunk el, akárcsak a bal szélső sor betűihez. A második sor második oszlopában található „G" betűhöz a felső és a tőle balra lévő „É" betűből is eljuthatunk. Mivel mindkettőhöz 1-1 út vezetett, így a „G" betűhöz 2 vezet. A harmadik oszlopban található „L" betűhöz a tőle balra és a fölötte található „G"-ből is eljuthatunk. Ez előbbibe 2 út vezetett, utóbbiba 1, így az „L" betűhöz összesen háromféle módon találhatunk el. Ezt a gondolatmenetet folytatva kitölthetünk egy táblázatot, amelyben mezőről mezőre (a tőle balra és fölötte lévő számokat összegezve) megkapjuk, hogy hány út vezet a bal felső sarokból a jobb alsóba. Összesen tehát 35-féleképpen olvasható ki a TÉGLALAP szó.

1	1	1	1	1
1	2	3	4	5
1	3	6	10	15
1	4	10	20	35

II. megoldás:

Ahhoz, hogy kiolvassuk a TÉGLALAP szót, összesen 7 lépést kell tennünk: 4-et jobbra és 3-at lefelé, az viszont mindegy, hogy milyen sorrendben. A lépéseket betűkkel jelölve például a JJLJLLJ egy lehetséges kiolvasás. Minden lehetséges út megfelel ezen betűk egy anagrammájának. Az 1. feladat megoldása szerint ez $\frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$ lehetőséget jelent.

III. megoldás:

Az előző megoldás szorzatalakja sugallja, hogy a feladat kiválasztással is megoldható. A 7 lépésből 4-et jobbra és 3-at lefelé kell megtennünk, bármilyen sorrendben. Így egyedül azt kell eldöntenünk, hogy (pl.) melyik az a 4 lépés, amit jobbra teszünk meg. (Pl. az első, második, ötödik és hatodik lépésben lépünk jobbra, a többiben lefelé, ami a JJLLJJL kiolvasásnak felel meg.) 7 dologból kell tehát 4-et kiválasztanunk, amit $\binom{7}{4} = 35$-féleképpen tehetünk meg.

Megjegyzés: Természetesen mindegy, hogy a 7 lépésből a 4 „jobbra lépést" vagy a 3 „lelépést" választjuk ki: $\binom{7}{4} = \binom{7}{3}$.

FELADAT

Találj minél több lehetséges megoldási módot a feladatokhoz!

1. Hányféleképpen olvashatók ki az alábbi képek szavai?

M	A	T	E	M	A
A	T	E	M	A	T
T	E	M	A	T	I
E	M	A	T	I	K
M	A	T	I	K	A

M	A	T			
A	T	E			
T	E	M			
		A	T	I	K
		T	I	K	A

2. – Járhatsz-kelhetsz a kastélyban, a legelsőtől a legutolsóig bejárhatod az összes termet, de a 13. terembe be ne tedd a lábad! – mondta a királylány a szegényember legkisebb fiának. (Aztán jól faképnél hagyta.) Fogta magát hát a szegényember legkisebb fia, és elsétált a legelső teremtől a legutolsóig, de kihagyta a 13. szobát, és csak a keleti és déli ajtókat használta. Hányféle utat járhatott volna így be?

35 Véletlen? – Relatív gyakoriság

CSOPORTMUNKA

Dolgozzatok párokban! Ezen az órán két lehetőség közül választhattok: vagy a mások által elvégzett kísérleteket értékelitek, vagy ti is elvégzitek ugyanezeket a kísérleteket, és saját eredményeiteket elemzitek a megadott szempontok alapján.

1. kísérlet

a) Minden pár dobjon fel 50-szer egy szabályos pénzdarabot, és készítse el a kísérlethez tartozó jegyzőkönyvet!

Dobások száma	Fejek **gyakorisága** 50 dobásból	Fejek **relatív gyakorisága** 50 dobásból
50		

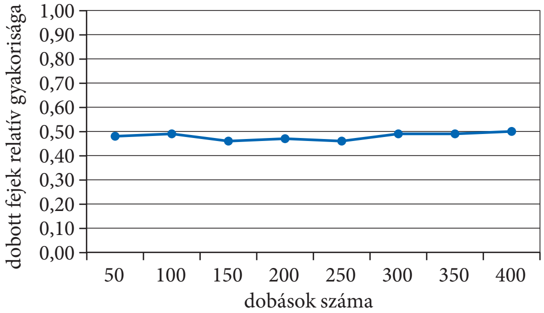
b) Amikor mindegyik pár befejezte a dobást, akkor a párok egymás után bemondják a dobott fejek számát. Ennek alapján készítsetek összesítő táblázatot az alábbi mintára!

	Dobások száma összesen	Ebből a fejek **gyakorisága**	Fejek **relatív gyakorisága**
1.	50		
2.	100		
3.	150		

c) Készítsetek diagramot arról, hogyan változott az összesítés során a dobott fejek számának relatív gyakorisága! Ez az összesítés azt mutatja, mintha egyetlen pénzdarabot sokszor feldobtunk volna, és 50 dobásonként kiszámítottuk volna az addig dobott fejek számának relatív gyakoriságát.

d) Egy iskolai tanulócsoportban 8 pár dolgozott. Náluk a következő összesített táblázat és diagram született.

	Dobások száma összesen	Ebből a fejek **gyakorisága**	Fejek **relatív gyakorisága**
1.	50	24	0,48
2.	100	49	0,49
3.	150	69	0,46
4.	200	93	0,47
5.	250	116	0,46
6.	300	148	0,49
7.	350	172	0,49
8.	400	201	0,50



ELMÉLET

A 9. osztályban tanultuk:
Ha egy kísérletet, megfigyelést n-szer végeztünk el, és k-szor kaptunk meg egy eredményt, akkor azt mondjuk, hogy ennek az eredménynek a *gyakorisága* k, a *relatív gyakorisága* pedig $\frac{k}{n}$.

Itt az n és a k természetesen egy-egy nemnegatív egész szám, és $k \leq n$.
A relatív gyakoriság jobban jellemzi az eseményt, mint a gyakoriság, mert azt mutatja meg, hogy *az esetek hányadrészében* kaptuk meg a vizsgált eredményt.

FELADAT

1. Mit fejez ki az a hétköznapi kijelentés, hogy ha egy szabályos pénzérmét feldobunk, akkor 0,5 annak a valószínűsége, hogy a dobás eredménye fej lesz? Hogyan támasztja alá az 1. kísérlet ezt a kijelentést?

CSOPORTMUNKA

2. kísérlet

a) Minden pár dobjon fel 50-szer 3 különböző pénzdarabot (pl. egy 5 forintos, egy 10 forintos és egy 20 forintos érmét), és minden dobás után jegyezze fel a dobás eredményét! Minden pár a saját kísérletére vonatkozóan töltse ki alábbi táblázatot! (Az első betű az 5 forintoson, a második a 10 forintoson, a harmadik betű pedig a 20 forintoson látható képet jelzi, ez minden esetben fej (F) vagy írás (I) lehet.)

FFF	FFI	FIF	IFF	FII	IFI	IIF	III	Összesen

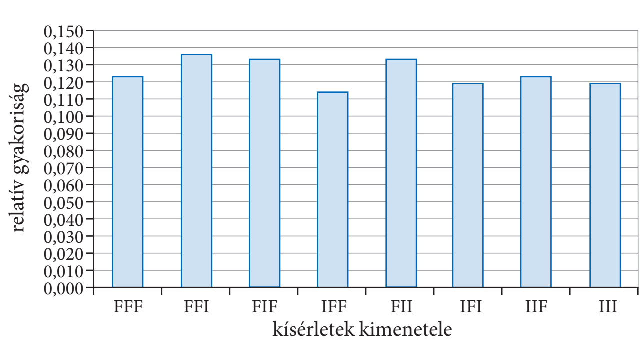
b) Készítsetek összesítő táblázatot a csoport eredményéről:

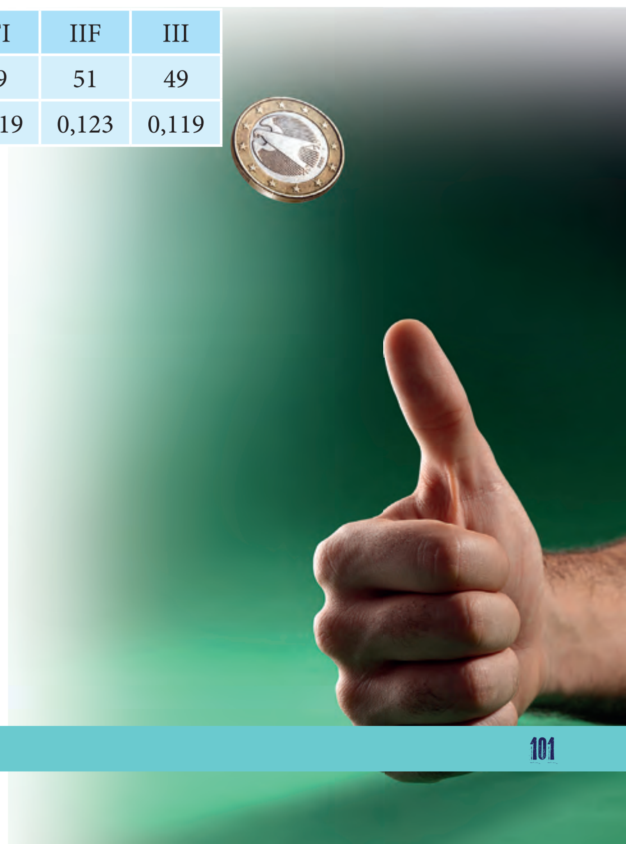
A kísérlet kimenetele	FFF	FFI	FIF	IFF	FII	IFI	IIF	III
Összes gyakoriság								
Relatív gyakoriság								

c) Készítsetek diagramot a 8 lehetséges kimenetel relatív gyakoriságáról!

d) Egy iskolai tanulócsoportban összesen 413-szor végezték el a 2. kísérletet, és az alábbi összesítő táblázatot, illetve diagramot kapták:

A kísérlet kimenetele	FFF	FFI	FIF	IFF	FII	IFI	IIF	III
Összes gyakoriság	51	56	55	47	55	49	51	49
Relatív gyakoriság	0,123	0,136	0,133	0,114	0,133	0,119	0,123	0,119





FELADAT

2. Feldobunk egy 5 forintos, egy 10 forintos és egy 20 forintos érmét. Mekkora annak az esélye, hogy az 5 forintoson fej, a 10 forintoson és a 20 forintoson pedig írás lesz a dobás után? Hogyan támasztja alá a 2. kísérlet ezt a kijelentést?

3. Mekkora annak a valószínűsége, hogy három különböző érmével dobva egy fej és két írás lesz a dobás eredménye? Hogyan támasztja alá a 2. kísérlet a kérdésre adott választ?

4. Mekkora annak a valószínűsége, hogy három egyforma érmét feldobva egy fej és két írás lesz a dobás eredménye?
Tibor szerint 4 eset van:
– mindhárom érmén fej;
– mindhárom érmén írás;
– két érmén fej és egy érmén írás;
– két érmén írás és egy érmén fej lesz a dobás után.

Tehát $\frac{1}{4}$ annak a valószínűsége, hogy a dobás eredménye egy fej és két írás lesz.
Igaza van-e Tibornak?

HÁZI FELADAT

1. Végezz el 50 dobást egy szabályos dobókockával, és írd fel sorban a kapott pontszámokat!

a) Hányszor kaptál 6-ost az első 10, az első 20, az első 30, az első 40 és az 50 dobásból?

b) Töltsd ki a táblázatot a füzetedben!

	10 dobás	20 dobás	30 dobás	40 dobás	50 dobás
6-os dobásának gyakorisága					
6-os dobásának relatív gyakorisága					

2. Lacinak olyan számológépe van, amelyen akár 1000 kockadobást is „elvégezhet”, mégpedig úgy, hogy csak a véletlenen múlik, melyik dobás hány pontot eredményez. Most 850 dobással kísérletezik. A táblázatból leolvashatsz ugyan bizonyos eredményeket, de az üres cellákat neked kell kitöltened. A füzetedben dolgozz!

Hány pont?	1	2	3	4	5	6
A gyakorisága	126	180	152		138	119
A relatív gyakorisága						

3. Az előző feladat táblázata alapján számítsd ki, mennyi a gyakorisága, illetve a relatív gyakorisága annak, hogy a gép

a) prímszámot dobott;

b) összetett számot dobott;

c) legalább 5-öt dobott!

RÁADÁS

1. Három pénzdarabot egyszerre dobnak el. Ha ugyanarra az oldalukra esnek (mind fej vagy mind írás), akkor Dönci nyer, ellenkező esetben Bence. Nyilván Dönci sem olyan buta, hogy így be lehessen csapni, de felvetődik: *Milyen tétekkel kellene játszani, hogy a játék igazságos legyen*?

Ha megnézzük a 2. kísérlet eredményeit, akkor azt látjuk, hogy ha sokszor végezzük el három pénzdarab feldobását, akkor körülbelül az esetek negyedében fordul elő az, hogy mindhárom érmén ugyanaz a minta áll (mindhárom fej vagy mindhárom írás). Ez azt jelenti, hogy Dönci és Bence nyerési esélyének aránya 1 : 3.
A játék akkor igazságos, ha elvárható, hogy hosszú távon ugyanakkora lesz a két játékos nyereménye.
Ha minden egyes dobásnál ugyanakkora téttel fogadnak, a kísérletek alapján akkor igazságos a játék, ha Bence tétje 3-szor akkora, mint Döncié. Dönci és Bence tétjének aránya tehát 3 : 1, ha azt akarják, hogy a játék igazságos legyen. Igazságos játék esetén – hosszú távon – Bence és Dönci nyeresége nagy valószínűséggel egyaránt 0.
Ha a tétek aránya más, akkor – hosszú távon – valamelyik fél nagy valószínűséggel veszíteni fog, a másik pedig nyerni.

Megjegyzés
A pénz befizetéséhez kötött szerencsejátékok túlnyomó része (lottójáték, totójáték, rulett, kártyajáték) a játékosok számára igazságtalan, mert hosszabb távon nagy valószínűséggel veszítenek (az általuk befizetett összes pénz több, mint az általuk megnyert összes pénz). Az ötös lottón például a telitalálat esélye 1 : 43 949 268. Az előbbiek szerint *ha csak az 5 találatra fizetnének nyereményt*, a befizetett pénznek és a főnyereménynek is ilyen arányban kellene állnia, azaz 225 Ft-os szelvényár mellett 9 888 585 300 Ft-os fődíj lenne az igazságos!

2. Próbáljátok ki ketten a következő játékokat:
Dobjatok fel többször egymás után egy pénzérmét, és jegyezzétek fel a dobássorozat eredményét F és I jelekkel! (Például: FFIFIII…)
Mindketten fogadjatok arra, hogy húsz dobásból legfeljebb hányszor dobtok egymás után egyformát. Az nyer, akinek a tippje közelebb van a kísérlet eredményéhez. Ismételjétek meg a játékot többször is. Mit tapasztaltok?

Megjegyzés
Meglepőnek tűnhet, de a sok kísérlet elvégzése után látható, hogy általában hosszú, azonos betűkből álló rész alakul ki a betűsorban, és annak az esélye, hogy a fejek és írások váltakozva fordulnak elő, igen csekély. Ezt akár fel is használhatod egy matematikai „bűvésztrükkre". Kérd meg egy ismerősödet, hogy írja fel egy papírlapra húsz dobás eredményét a dobássorozat elvégzése nélkül, kitalálva az eredményeket, ezután pedig végezze el a kísérletet, és annak az eredményét is írja fel a papírlapra. Képes leszel „olvasni a gondolataiban", vagyis megmondani, hogy melyik volt az igazi dobássorozat, és melyik az, amelyet az ismerősöd talált ki. Azt válaszd valódinak, amelyben hosszabb az egymást követő azonos dobások sora!

Egy másik játékot is kipróbálhattok. Fogadjatok arra, hogy a betűsorban az FFI vagy az IFF betűhármas jelenik-e meg előbb. Ismételjétek meg sokszor a játékot! Mit tapasztaltok? Más betűhármasokkal is próbálkozhattok (például IFI és FFF).

36 Megismerhető véletlen

CSOPORTMUNKA

Dolgozzatok párokban!

Kísérlet

a) Mindegyik pár egyszerre két, egy fekete és egy fehér dobókockával dobjon, majd jegyezze fel a két kockán dobott pontok összegét! Minden pár végezzen el 50 kísérletet, és töltse ki a kísérletéhez tartozó jegyzőkönyvet az alábbiak szerint:

Pontösszeg	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Összesen
Gyakoriság												50

b) A párok által kapott gyakoriságokat az alábbi táblázatban kell összegezni. Számítsák ki minden lehetséges kimenetel relatív gyakoriságát is!

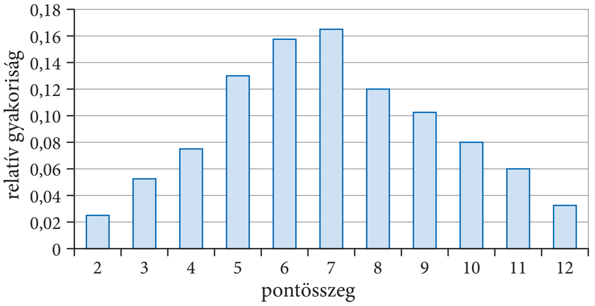
Pontösszeg	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Összesen
Gyakoriság												
Relatív gyakoriság												1

c) Készítsetek relatív gyakorisági diagramot az összesített táblázat eredményei alapján!

d) Egy tanulócsoportban 8 pár összesen 400 kísérletet végzett el. Összesített táblázatuk és relatív gyakorisági diagramjuk a következőképpen alakult:

Pontösszeg	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Összesen
Gyakoriság	10	21	30	52	63	66	48	41	32	24	13	400
Relatív gyakoriság	0,025	0,0525	0,075	0,13	0,1575	0,165	0,12	0,1025	0,08	0,06	0,0325	1

Hasonlítsátok össze a táblázatot és a diagramot a saját kísérletetekkel!



FELADAT

1. Zsombor szerint két dobókockával dobva ugyanolyan valószínűséggel dobhatunk 7-et, mint 8-at. Kijelentését a következőképpen indokolja:

$7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$ és

$8 = 2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4.$

Mivel mindkét szám háromféleképpen bontható fel, ezért egyforma a 7 és a 8 pontösszeg dobásának esélye.

a) Alátámasztják-e a kísérlet eredményei Zsombor okoskodását?

b) Szerinted körülbelül mekkora a valószínűsége a 7, illetve a 8 pontösszeg dobásának?

2. **a)** Töltsd ki a táblázatot úgy, hogy a két dobókockás kísérlet (lásd az előző oldalon!) lehetséges kimeneteleit adja meg! Néhány mezőt már kitöltöttünk.

	1	2	3	4	5	6
1			4			
2		4				
3				7		
4						10
5	6					
6					11	

b) Hány lehetséges kimenetele van a kísérletnek?

c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a fekete kockán 4, a fehér kockán pedig 1 pont lesz egy dobás után?

d) Töltsd ki a következő táblázat üres helyeit!

Pontösszeg	Hányféleképpen jöhet létre?
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	

e) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy dobásnál a dobott pontok összege 12 lesz?

f) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a dobott pontok összege 7? Alátámasztja-e ezt a pármunkában végzett kísérlet eredménye?

g) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a dobott pontok összege 8? Alátámasztja-e ezt a kísérlet eredménye?

h) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a dobott pontok összege kisebb 5-nél? Alátámasztja-e ezt a kísérlet eredménye?

3. Mekkora annak a valószínűsége, hogy két (színre és méretre is) egyforma szabályos dobókockával dobva a dobott pontok összege

a) 7; **b)** 11; **c)** 6 lesz?

ELMÉLET

Véletlen kísérlet: A mostani és az előző órán is olyan eseményekkel foglalkoztunk, amelyek bekövetkezése a **véletlentől** függött, mivel a kísérletek eredményét (kimenetelét) a tekintetbe vett körülmények nem határozták meg egyértelműen.

Elemi esemény: A vizsgált kísérleteknek véges számú különböző kimenetelük lehetséges (egy pénzérme feldobása esetén 2 kimenetel lehetséges, három különböző érme feldobásakor 8, két különböző színű dobókocka feldobásakor 36). Ezeket a *lehetséges kimeneteleket* az adott véletlen kísérlethez tartozó *elemi eseményeknek* nevezzük (a két különböző színű dobókocka feldobásánál például 36 elemi esemény van; szóhasználatunkban a *lehetséges kimenetel* és az *elemi esemény* fogalmak a későbbiekben egymás szinonimájaként szerepelnek).

Összetett esemény: A véletlen kísérlethez több – az elemi eseményektől különböző – *összetett esemény* tartozik. Például a két különböző kocka feldobásánál megfogalmazható a következő *összetett esemény*: *„a dobott pontok összege 5”*. A 2. gyakorlófeladat táblázatából jól látható, hogy ez az esemény négyféleképpen is bekövetkezhet: $5 = 1 + 4 = 4 + 1 = 2 + 3 = 3 + 2$. Az *„a dobott pontok összege 5”* esemény tehát bekövetkezik, ha a felsorolt négy elemi esemény bármelyike bekövetkezik.

Két esemény összege akkor következik be, ha bekövetkezik az egyik **vagy** a másik esemény.
Két esemény szorzata akkor következik be, ha bekövetkezik az egyik **és** a másik esemény.

Valószínűség: A véletlen kísérletek mindegyik kimeneteléhez egy-egy nemnegatív számot rendeltünk hozzá, és azt mondtuk, hogy ez a szám a lehetséges kimenetel esélye, más szóval *valószínűsége*. Eddig olyan véletlen kísérletekkel foglalkoztunk, amelyeknél a lehetséges kimenetelek (elemi események) egyenlően valószínűek voltak. Például a három különböző érme feldobásánál mindegyik elemi esemény valószínűsége $\frac{1}{8} = 0{,}125$, a két különböző színű kocka feldobásánál mindegyik elemi esemény valószínűsége $\frac{1}{36}$ volt. Ezeket a számokat szimmetria okokra hivatkozva fogadtuk el valószínűségként (esélyként), mert úgy gondoltuk, hogy az adott kísérletben mindegyik elemi esemény ugyanakkora valószínűségű.

Valószínűség és relatív gyakoriság kapcsolata: Az eseményekhez hozzákapcsolt valószínűségeknek gyakorlati jelentéstartalmuk is van. Azt tapasztaltuk, hogy ha a véletlen kísérletet nagyon sokszor, azonos körülmények között végezzük el, akkor az események *relatív gyakorisága* (nagy valószínűséggel) igen közel van a valószínűségükhöz.

HÁZI FELADAT

1. Használd a 2. feladat táblázatát!

a) Mennyi az esélye, hogy mindkét kocka azonos számot mutasson?

b) Mennyi az esélye, hogy a számok összege nagyobb, mint 9?

c) Minek van nagyobb esélye: annak, hogy az összeg nagyobb, mint 9, vagy annak, hogy kisebb, mint 4?

2. Feldobtunk két különböző színű kockát, a dobott pontok szorzatát pedig táblázatba foglaltuk.

a) Készítsd el a táblázatot, és állapítsd meg az elemi események számát!

b) Hány elemi esemény összegeként adható meg *„a dobott pontok szorzata 6”* összetett esemény, és melyek ezek az elemi események? Mekkora *„a dobott pontok szorzata 6”* esemény valószínűsége?

c) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a dobott pontok szorzata négyzetszám (1, 4, 9, …) lesz?

d) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a dobott pontok szorzata nagyobb lesz 10-nél?

3. Norbi és Barnabás „kő-papír-olló” játékot játszanak.

a) Készíts a 2. feladatban látotthoz hasonló táblázatot, amely a játék egy körének lehetséges kimeneteleit tartalmazza! Minden rubrikába írd be, hogy az adott eset döntetlen-e, illetve ha nem, akkor melyik fiú nyer!

b) Mekkora az esély a döntetlenre?

c) Alátámasztja-e a táblázat, hogy ez egy „fair” játék, azaz mindkét játékosnak egyenlő esélye van a győzelemre?

Kő, papír, olló

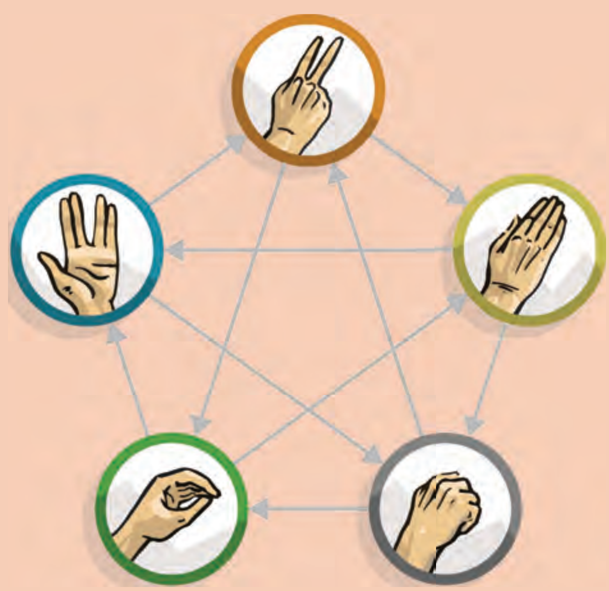
Ketten játszotok: jobb kezetekkel egyszerre mutatjátok a kő, a papír vagy az olló jelét.

- A kő legyőzi az ollót, mert kicsorbítja.
- Az olló legyőzi a papírt, mert elvágja.
- A papír legyőzi a követ, mert becsomagolja.

d) Mekkora a döntetlen esélye a kő-papír-olló-gyík-Spock játékban?

Kő, papír, olló, gyík, Spock

Az olló elvágja a papírt, a papír bevonja a követ. A kő agyonüti a gyíkot, a gyík megmarja Spockot, Spock eltöri az ollót. Az olló lefejezi a gyíkot, a gyík megeszi a papírt, a papír cáfolja Spockot, Spock feloldja a követ, és a kő eltöri az ollót.



37 Biztos, lehetetlen, véletlen

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Mekkora annak a valószínűsége, hogy két különböző színű, szabályos dobókockával dobva

a) a dobott pontok összege 16-nál kisebb lesz;
b) a dobott pontok összege 12-nél nagyobb lesz;
c) a dobott pontok összege 5 lesz?

Megoldás

a) Ez az esemény mindenképpen bekövetkezik, vagyis **biztos esemény**. A valószínűsége 1.

b) Ez az esemény egyetlen alkalommal sem következhet be, tehát **lehetetlen esemény**. A valószínűsége 0.

c) Ez az esemény (a múlt órán már láttuk) négyféleképpen is bekövetkezhet: *„a dobott pontok összege 5”* esemény **négy elemi esemény összege**. Mindegyik elemi esemény valószínűsége $\frac{1}{36}$, ezért a négy elemi esemény összegének a **valószínűsége 4-szer akkora, mint egy elemi eseményé**: $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

2. Egy dobozban 5 különböző színű golyó van: barna, fehér, kék, piros, sárga. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy golyót véletlenszerűen kihúzva

a) a golyó piros lesz;
b) a golyó nem piros lesz;
c) a golyó barna vagy kék lesz;
d) a golyó nem lesz sem fehér, sem piros, sem sárga?

Megoldás

Világos, hogy a véletlen kísérlet lehetséges kimeneteleinek száma 5, és ezek mind egyenlően valószínűek. Tehát mindegyik elemi esemény valószínűsége $\frac{1}{5}$.

a) A piros golyó húzása elemi esemény, tehát $\frac{1}{5}$ a valószínűsége.

b) Most 4 „kedvező” elemi esemény van. Ennek az eseménynek a valószínűsége tehát $\frac{4}{5}$.

c) A kedvező elemi események száma 2, ezért az esemény bekövetkezésének valószínűsége $\frac{2}{5}$.

d) Ez az esemény megegyezik a c) eseménnyel, ezért ugyanakkora a valószínűsége is: $\frac{2}{5}$.

Megjegyzések

– A „kihúzott golyó piros” és a „kihúzott golyó nem piros” két olyan esemény, amelyek egyszerre sohasem következnek be, de bármi is legyen a véletlen kísérlet eredménye, közülük az egyik biztosan bekövetkezik.
Ha két esemény ilyen kapcsolatban van egymással, akkor **egymást kiegészítő eseményeknek**, idegen szóval **komplementer eseményeknek** nevezzük őket.
Világos, hogy **ha egy esemény valószínűsége** p, **akkor a komplementer eseményének a valószínűsége** $1 - p$.

– Ha két esemény minden esetben egyszerre következik be, vagy nem következik be, akkor **a két eseményt egyenlőnek mondjuk**. Az egyenlő események valószínűsége szintén egyenlő.

ELMÉLET

1. A *biztos esemény* mindig bekövetkezik, valószínűsége 1.
2. A *lehetetlen esemény* sohasem következik be, valószínűsége 0.
3. Ha egy véletlen kísérlet lehetséges kimenetelei (az elemi események) **egyenlően valószínűek**, és az A esemény k számú elemi esemény összegével egyenlő, akkor az A esemény bekövetkezésének valószínűsége k-szor akkora, mint egyetlen elemi esemény bekövetkezésének a valószínűsége.

Ha az elemi események száma n, akkor egy elemi esemény $\frac{1}{n}$ valószínűséggel következik be, a k számú elemi esemény összegeként felírható A esemény bekövetkezésének valószínűsége pedig $\frac{k}{n}$.

Jelölés: $p(A)=\frac{k}{n}$. A p betű a valószínűség szó latin megfelelőjének (probabilitas) kezdőbetűje.

Tehát: $p(A)=\dfrac{\text{kedvező elemi események száma}}{\text{összes elemi esemény száma}}$.

FELADAT

1. Egy dobozban 5 különböző színű golyó van: barna, fehér, kék, piros, sárga. Egymás után két golyót húzunk ki úgy, hogy az elsőnek kihúzott golyót **nem tesszük vissza**.

a) Hány elemi esemény van ebben a véletlen kísérletben? Szemléltesd gráffal!

Mekkora a valószínűsége, hogy

b) az első golyó kék színű lesz;
c) az első golyó nem kék színű lesz;
d) a két kihúzott golyó között nincs piros;
e) a két kihúzott golyó között van piros;
f) az egyik kihúzott golyó sárga, a másik pedig fehér?

2. Oldd meg az előző feladatot azzal a változtatással, hogy a második húzás előtt az elsőnek kihúzott golyót **visszatesszük**!

HÁZI FELADAT

1. Egy repülőgépjárat 200 utasa közül 94-en magyar állampolgárok, 72-en angolok, 20-an hollandok és 14-en németek. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott utas állampolgársága

a) magyar;
b) holland vagy német;
c) nem angol;
d) kínai?

2. Ha történelemből veled együtt már csak hatan nem feleltetek, és a mai órán két ember felel egymás után, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy

a) te leszel az első felelő;
b) te leszel a második felelő;
c) felelni fogsz a mai órán;
d) te nem fogsz felelni a mai órán?

3. Egyszerre dobunk fel egy 5, egy 10 és egy 20 Ft-ost.

a) Hányféle kimenete lehet ennek a véletlen kísérletnek? Szemléltesd gráffal!
b) Mennyi a valószínűsége, hogy mindhárom pénzérme „írást” mutasson?
c) Mennyi a valószínűsége, hogy mindhárom érme ugyanazt mutassa?
d) Mennyi a valószínűsége, hogy csak egy érme mutasson „írást”, a másik kettő „fejet”?
e) Mennyi a valószínűsége, hogy NE mutassa mindhárom érme ugyanazt?
f) Megváltoznának-e a fenti valószínűségek, ha 3 darab 20 Ft-os érmét dobnánk fel?

38 Valószínűség a gyakorlatban

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy 36 fős osztályban 9 diák tanulja emelt szinten a matematikát, 18 a történelmet, s ezek közül 3 diák mindkét tantárgyat. Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott diák

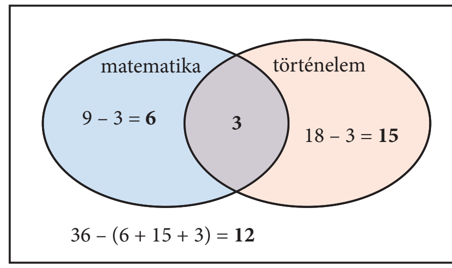
a) emelt szinten tanulja a történelmet;
b) mindkét tárgyat emelt szinten tanulja;
c) egyik tantárgyat sem tanulja emelt szinten;
d) csak a történelmet tanulja emelt szinten;
e) csak az egyik tantárgyat tanulja emelt szinten, a másikat nem?

Megoldás

a) Ha harminchat diákból 18 tanulja emelt szinten a történelmet, akkor a keresett valószínűség $\frac{18}{36} = 0{,}5$.

b) $\frac{3}{36} \approx 0{,}083$.

c) Először tudnunk kellene, hogy pontosan hány diák nem tanulja emelt szinten egyik tantárgyat sem. Ehhez készíthetünk Venn-diagramot, vagy használhatjuk a „logikai szita” módszert is: a 36 diák közül zárjuk ki azokat, akik valamilyen tantárgyat emelt szinten tanulnak: $36 - 9 - 18 = 9$, de azokat, akik mindkét tárgyat emelt szinten tanulják, kétszer zártuk ki, holott csak egyszer kellett volna. A helyes válasz így: $9 + 3 = 12$.



Tehát 12 diák nem tanulja egyik tantárgyat sem emelt szinten, így a keresett valószínűség $\frac{12}{36} \approx 0{,}333$.

d) Használjuk az előző feladat ábráját! A valószínűség $\frac{18-3}{36} = \frac{15}{36} \approx 0{,}417$.

Ebben a feladatban máshogy is gondolkodhattunk volna: annak a valószínűsége, hogy egy diák emelt szinten tanulja a történelmet, az a) feladat szerint $\frac{18}{36}$, de ebben „benne van” az a $\frac{3}{36}$ valószínűség is, hogy a diák mindkét tantárgyat emelt szinten tanulja. Annak valószínűsége tehát, hogy csak a történelmet tanulja emelt szinten, a maradék: $\frac{18}{36} - \frac{3}{36} = \frac{15}{36} \approx 0{,}417$.

e) A Venn-diagram alapján: $\frac{6+15}{36} = \frac{21}{36} \approx 0{,}583$. Vagy valószínűségekkel: $\frac{6}{36} + \frac{15}{36} = \frac{21}{36} \approx 0{,}583$.

FELADAT

1. Egy biztosítótársaság felmérést készített 1000 véletlenszerűen kiválasztott ügyfele bevonásával. Az 1000 ügyfél közül 611-nek gépjármű-biztosítása, 389-nek lakásbiztosítása és 96-nak mindkétféle biztosítása van a társaságnál.
Mennyi a valószínűsége annak, hogy az 1000 ügyfél közül egyet véletlenszerűen kiválasztva ennek az ügyfélnek

a) van gépjármű-biztosítása a társaságnál;
b) a kétféle biztosítás közül egyik fajtával sem rendelkezik;
c) a kétféle biztosítás közül legalább az egyik fajtával rendelkezik;
d) csak az egyik fajta biztosítása van, a másik nincs?

2. Az alábbi táblázat egy vérellátó központ nyilvántartása arról, hogy a legutóbbi véradó akciójuk során hány egységet kaptak az egyes vércsoportokból a különböző donoroktól (1 egység = 4,5 deciliter).

	Vércsoport			
	0	A	B	AB
Rh-pozitív	161	73	44	14
Rh-negatív	30	14	8	2

Véletlenszerűen kiválasztva egy donort mennyi a valószínűsége annak, hogy

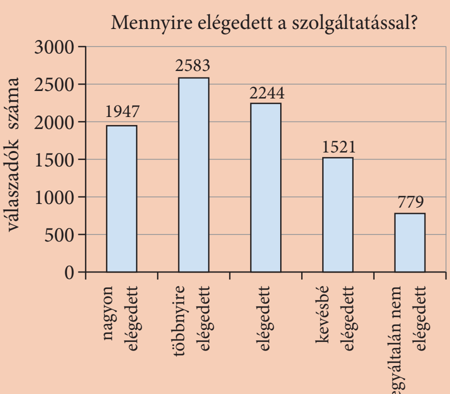
a) a donor AB-s vagy B-s vércsoportú;

b) a donor 0-s vércsoportú vagy Rh-pozitív;

c) a donor nem AB vércsoportú, és nem is Rh-negatív?

HÁZI FELADAT

1. Egy internetszolgáltató társaság nagyszámú ügyfél körében elvégzett, reprezentatívnak mondható felmérést készített arról, hogy ügyfeleik mennyire elégedettek a szolgáltatásaikkal. Az eredményeket a grafikon szemlélteti.



Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ügyfél

a) nagyon elégedett a szolgáltatással;

b) csak kevésbé vagy egyáltalán nem elégedett?

2. Egy egyetem 860 elsőéves hallgatója közül 312-en gazdasági szakra járnak, és az elsőévesek között 452 nő van. Az elsőéves hallgatónők közül 195-en járnak gazdasági szakra. Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott elsőéves egyetemista

a) gazdasági szakra jár;

b) gazdasági szakra járó hallgatónő;

c) nem gazdasági szakra járó férfi hallgató;

d) gazdasági szakra járó férfi hallgató?

3. A táblázat egy repülőtér különböző parkolóiban álló autók számát mutatja.

	1. zóna	2. zóna	3. zóna	4. zóna
A parkoló	43	19	18	5
B parkoló	65	41	23	2
C parkoló	39	22	15	11

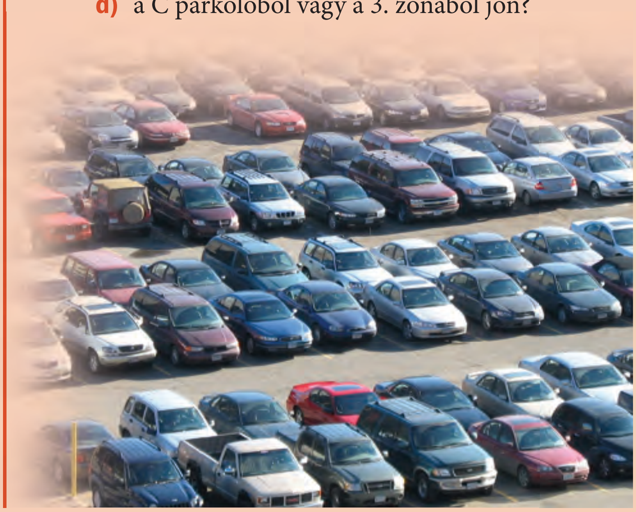
Mennyi a valószínűsége annak, hogy a következő autó, amelyik elhajt a parkolóból

a) az A parkoló 1. zónájából jön;

b) a B parkolóból jön;

c) nem a 4. zónából jön;

d) a C parkolóból vagy a 3. zónából jön?



39 Ugyanazt többször

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy zsákban 3 darab 1-től 3-ig sorszámozott sárga színű pingponglabda és 7 darab 4-től 10-ig sorszámozott fehér színű pingponglabda van. Egymás után 5-ször, véletlenszerűen kihúzunk egy-egy pingponglabdát, feljegyezzük a sorszámát, majd **a kihúzott labdát visszatesszük a zsákba**.

a) Hány különböző kimenetele van ennek a kísérletnek?

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első 2 kihúzott pingponglabda sárga, a többi pedig fehér színű lesz?

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott 5 pingponglabda között 2 sárga és 3 fehér színű lesz?

Megoldás

a) Mind az 5 húzásnál 10-féle lehet a húzás eredménye, ezért a lehetséges kimenetelek száma 10^5.

b) Az első 2 labda $3 \cdot 3 = 3^2$ különböző módon lehet sárga, a többi 3 fehér labda pedig $7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$ különböző módon választható. A kedvező kimenetelek száma tehát $3^2 \cdot 7^3$, a kérdezett valószínűség pedig: $\frac{3^2 \cdot 7^3}{10^5} \approx 0{,}031$.

c) Az öt húzás közül bármelyik 2 lehet sárga, ezért a kedvező elemi események száma $\binom{5}{2}$-ször akkora, mint a b) esetben volt. A kérdezett valószínűség tehát:

$$\frac{\binom{5}{2} \cdot 3^2 \cdot 7^3}{10^5} \approx 0{,}309.$$

Megjegyzés

A c) feladat eredményét írhatjuk így is:

$$\binom{5}{2} \cdot \frac{3^2}{10^2} \cdot \frac{7^3}{10^3} = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^3.$$

Felfedezhetjük, hogy a $\frac{3}{10}$ éppen annak a valószínűsége, hogy a 10 pingponglabda közül egyet kihúzva az sárga színű lesz, a $\frac{7}{10}$ pedig annak a valószínűsége, hogy a kihúzott pingponglabda fehér színű lesz.

FELADAT

1. Egy szabályos dobókockát ötször egymás után feldobunk, a dobott pontokat egymás után sorban feljegyezzük.

a) Hány különböző lehetséges kimenetele van ennek a dobássorozatnak?

b) Hány olyan dobássorozat van, amelyben elsőre legalább 5-öt dobunk, de a többi dobás kisebb 5-nél?

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy elsőre legalább 5-öt dobunk, de a többi dobás kisebb 5-nél?

d) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az öt dobás között pontosan egyszer dobunk legalább 5-öt, de a többi négy dobás mindegyike kisebb lesz 5-nél?

e) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az első és a második dobásra is legalább 5-öt dobunk, de a többi három dobás kisebb 5-nél?

f) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az öt dobás között pontosan kétszer dobunk legalább 5-öt, de a többi dobás már 5-nél kisebb?

2. Egy zsákban 3 különböző méretű sárga és 7 különböző méretű fehér golyó van. Egymás után 5-ször húzunk egy-egy golyót úgy, hogy a kihúzott golyó színét feljegyezzük, majd a golyót visszatesszük a zsákba.

a) Hány különböző kimenetele lehet a kísérletnek?

b) Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy a kihúzott golyók között k darab fehér lesz, ahol $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$!
Töltsd ki a táblázatot, és ábrázold oszlopdiagramon a valószínűségeket!

Az 5 golyó között a fehér golyók száma	0	1	2	3	4	5
Ennek valószínűsége						

HÁZI FELADAT

1. 50 darab különböző méretű gyöngy között 10 darab selejtes van (nincs rajtuk furat, amelyen a zsinórt át lehetne fűzni). A minőségellenőr véletlenszerűen kiválaszt egy gyöngyöt, megvizsgálja, feljegyzi, hogy jó-e vagy selejtes, majd a kiválasztott gyöngyöt visszateszi. Összesen 5 alkalommal választ egy-egy gyöngyöt.
Mennyi annak a valószínűsége, hogy

a) nem talál selejtes gyöngyöt ezzel a módszerrel;

b) mindegyik kiválasztott gyöngy selejtes lesz;

c) a kiválasztott gyöngyök között a selejtesek aránya ugyanannyi lesz, mint az 50 gyöngy között a selejtesek aránya?

2. Szabályos dobókockát 7-szer egymás után feldobunk, és a dobott pontszámokat sorban lejegyezzük. Mekkora a valószínűsége, hogy

a) az első dobás legfeljebb 2, a többi dobás pedig mind 2-nél nagyobb lesz;

b) pontosan egyszer dobunk 3-nál kisebbet, a többi hat dobás mindegyike pedig 2-nél nagyobb lesz;

c) a 7 dobás közül 3 alkalommal 3-nál kisebbet, 4 alkalommal pedig 2-nél nagyobbat dobunk?

3. A rulettjátékban a 37 szám között 18 „piros” szám és 18 „fekete” szám van, továbbá 1 szám, a nullás „zöld”. Ha 6-szor megpörgetik a kereket, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy

a) mindegyik pörgetésnél piros szám jön ki;

b) mindegyik pörgetésnél a 0 jön ki;

c) az első 4 pörgetésnél piros, a következő 2 pörgetésnél pedig fekete jön ki;

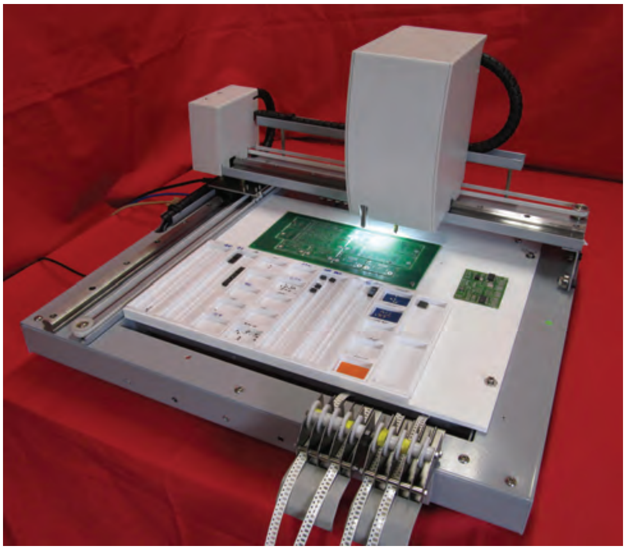
d) 4 pörgetésnél piros jön ki?

Ráadás

Binomiális eloszlás

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy nyomtatott áramkör elkészítésekor az automatának 40 forrasztást kell végrehajtania. A gyártásnál nem vették észre, hogy az automata meghibásodott, így minden egyes forrasztásnál csak 0,85 a valószínűsége annak, hogy a forrasztás hibátlan lesz, 0,15 pedig annak a valószínűsége, hogy hibás. Ha a 40 forrasztás bármelyike hibás, akkor a nyomtatott áramkör már selejtes lesz.



Mekkora a valószínűsége, hogy a 40 forrasztás végrehajtása után

a) a nyomtatott áramkör minden forrasztása hibátlan lesz;

b) a nyomtatott áramkör selejtes lesz (hibás forrasztás miatt);

c) egy hibás forrasztás lesz az áramkörön;

d) pontosan 2 hibás forrasztás lesz az áramkörön;

e) a forrasztásoknak pontosan 15 százaléka lesz hibás az áramkörön?

Megoldás

Az automata bármelyik forrasztásának kimenetele *modellezhető* a következőképpen:

Képzeljünk el egy 100 pingponglabdát tartalmazó zsákot, amelyben 1-től 15-ig sorszámozott 15 darab sárga és 16-tól 100-ig sorszámozott 85 darab fehér labda van. Húzzunk ki labdákat ebből a zsákból úgy, hogy a kivett pinponglabdákat minden alkalommal visszatesszük!

A sárga pingponglabda kihúzásának valószínűsége pontosan 0,15, a fehér labdáé pedig 0,85. Ha a sárga labda húzását *hibás forrasztásnak* nevezzük, a fehér labda húzását pedig *jó forrasztásnak*, akkor a 40 forrasztást modellezhetjük úgy, hogy visszatevéssel 40 alkalommal húztunk a zsákból egy-egy pingponglabdát.

A lehetséges kimenetelek (elemi események) száma ebben a *modellben* 100^{40}.

a) A kérdéses valószínűség megegyezik annak a valószínűségével, hogy a modellben megadott feltételek mellett mind a 40 alkalommal fehér labdát húztunk. Ennek valószínűsége:
$$\frac{85^{40}}{100^{40}} = \left(\frac{85}{100}\right)^{40} = 0{,}85^{40} \approx 0{,}0015.$$

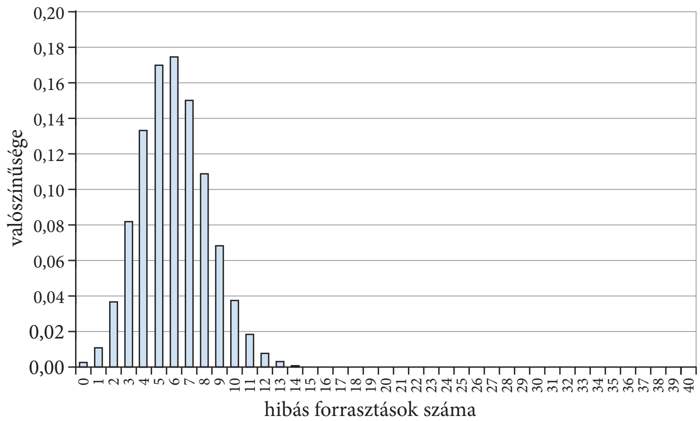
b) Ez az esemény az a)-beli esemény kiegészítő eseménye, ezért a valószínűsége: $1 - 0{,}85^{40} \approx 0{,}9985$.

c) Annak a valószínűsége, hogy éppen az első forrasztás lesz hibás, és a többi 39 hibátlan, megegyezik a modellünkben annak az eseménynek a valószínűségével, hogy az elsőnek húzott pingponglabda sárga, a többi pedig fehér. Ennek valószínűsége:
$$\frac{15 \cdot 85^{39}}{100^{40}} = \frac{15}{100} \cdot \left(\frac{85}{100}\right)^{39} = 0{,}15 \cdot 0{,}85^{39}.$$
Mivel a 40 forrasztás bármelyike lehet hibás, ezért a keresett valószínűség ennek éppen a 40-szerese: $40 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85^{39} \approx 0{,}0106$.

d) Az előző gondolatmenethez hasonlóan okoskodva: annak a valószínűsége, hogy éppen az első két forrasztás lesz a hibás:
$$\frac{15^2 \cdot 85^{38}}{100^{40}} = \left(\frac{15}{100}\right)^2 \cdot \left(\frac{85}{100}\right)^{38} = 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^{38}.$$
A 40 forrasztás közül azt a kettőt, amelyiknél az automata hibázik, $\binom{40}{2}$-féleképpen lehet kiválasztani, ennyivel kell tehát megszorozni az előbb kapott számot:
$$\binom{40}{2} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^{38} \approx 0{,}0365.$$

e) A 40-nek a 15%-a 6. Így a d)-ben követett gondolatmenettel arra jutunk, hogy a pontosan 6 hibás forrasztás valószínűsége: $\binom{40}{6} \cdot 0{,}15^6 \cdot 0{,}85^{34} \approx 0{,}1742$.

Számítógéppel elkészíthetjük az összes lehetséges kimenetel valószínűségét bemutató diagramot is. A diagram jól mutatja, hogy igen nagy (több mint 0,97) valószínűséggel 2–11 hibás forrasztás lesz a nyomtatott áramkörön. Az is jól látható, hogy a legnagyobb valószínűséggel a forrasztások 15%-a lesz hibás. Ez az arány megegyezik a hibás forrasztásoknak a gép használati utasításában megadott valószínűségével.



ELMÉLET

A kidolgozott feladat alapján a következőket mondhatjuk:
Legyen egy véletlen kísérlet során az A esemény bekövetkezésének valószínűsége 0,15. Ha a véletlen kísérletet 40-szer megismételjük, akkor annak a valószínűsége, hogy a 40 lehetőség közül az A esemény pontosan

0 alkalommal következik be: $0{,}85^{40}$;

1 alkalommal következik be: $40 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85^{39}$;

2 alkalommal következik be: $\binom{40}{2} \cdot 0{,}15^{2} \cdot 0{,}85^{38}$;

$\vdots$

6 alkalommal következik be: $\binom{40}{6} \cdot 0{,}15^{6} \cdot 0{,}85^{34}$;

$\vdots$

k alkalommal következik be: $\binom{40}{k} \cdot 0{,}15^{k} \cdot 0{,}85^{40-k}$ $(k \in \{0; 1; 2; \ldots; 39; 40\})$.

A binomiális együtthatók megjelenése indokolja, hogy az ehhez a 41 számhoz tartozó valószínűségeket ***binomiális eloszlásúnak*** nevezzük.

Általában tehát azt mondjuk, hogy ha egy kísérlet (például a kidolgozott feladatban olvasott forrasztás vagy az előző lecke feladatai) valamely lehetséges kimenetelének valószínűségét p-vel jelöljük (ekkor az esemény komplementerének valószínűsége $1 - p$), és a kísérletet egymás után n alkalommal végezzük el, akkor annak a valószínűsége, hogy a kérdéses kimenetel pontosan k-szor $(k \leq n)$ következik be: $P = \binom{n}{k} \cdot p^{k} \cdot (1-p)^{n-k}$.

A szorzat első tényezője arra utal, hogy pontosan $\binom{n}{k}$ kedvező elemi esemény létezik (hiszen mindegy, hogy az n kísérletből melyik k alkalommal következik be a kedvező kimenetel), a középső tényező arra utal, hogy a p valószínűségű esemény k-szor bekövetkezett, a harmadik tényező pedig arra utal, hogy a maradék $(n - k)$ alkalommal nem következett be.

FELADAT

1. Egy nagyvárosi metróvonalon már igen sok ellenőrzést tartottak, és az eddigi ellenőrzések azt mutatták, hogy körülbelül 0,92 annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott utasnak van érvényes menetjegye (vagy bérlete).
A vonalon dolgozó ellenőrök egyike azt jelenti a főnökének, hogy 50 utast ellenőrzött, és

a) mindegyiknek volt érvényes menetjegye (bérlete);

b) egyiküknek sem volt érvényes menetjegye (bérlete).

Melyik állítást fogadja el a főnök, ha ő csak a legalább 5%-os valószínűségű eseményről gondolja azt, hogy az valóban megtörténhetett?

2. Egy ezernél is több angol iskolás részvételével 2000-ben lebonyolított nagyszabású kísérletsorozat igazolta, hogy az asztalról leeső vajas pirítós tényleg nagyobb eséllyel esik a vajas felére. A nagyszámú kísérlet eredménye szerint ennek valószínűsége kb. 62%. (A jelenség fizikai magyarázata, hogy az asztalról lebillenő kenyérszelet megpördül, de egy átlagos magasságú étkezőasztal esetén csak kb. fél fordulatra van idő esés közben.) Mennyi a valószínűsége, hogy 10 lepottyanó pirítósszelet közül

a) egy sem esik a vajas felére;
b) mindegyik a vajas felére esik;
c) lesz olyan, amelyik nem a vajas felére esik;
d) pontosan 7 esik a vajas felére;
e) 7-nél több esik a vajas felére;
f) legfeljebb 7 esik a vajas felére?

3. Egy szabályos érmét egymás után 10-szer feldobunk. Jocó azt mondja, hogy 0,5 annak a valószínűsége, hogy a fejek és az írások száma ugyanannyi lesz a dobássorozat végére. Azért gondolja így, mert a dobássorozat eredménye kétféle lehet ebből a szempontból: vagy egyenlő a fejek és írások száma, vagy nem. Számítással igazold, hogy hibás Jocó érvelése!

HÁZI FELADAT

1. Egy szabályos dobókockát 10-szer feldobva mekkora annak a valószínűsége, hogy
a) egyszer sem dobunk hatost;
b) mind a 10 alkalommal hatost dobunk;
c) legalább 8-szor hatost dobunk;
d) legfeljebb 2-szer dobunk hatost?

2. Egy internetes cikkben az olvasható, hogy a balkezesek aránya a teljes népesség körében körülbelül 11%. Bence matematikacsoportjában 17-en vannak, közülük 3 balkezes tanuló. A cikk olvasása után Bence azon gondolkodik, mennyire valószínű az, hogy pontosan 3 balkezes van a csoportban. Ezért kiszámítja annak a valószínűségét, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott 17 fős csoportban a balkezesek száma pontosan 0, 1, 2, 3, 4, 5, illetve 6. A számítások elvégzése után a valószínűségeket oszlopdiagramon ábrázolja.
a) Milyen következtetésre juthatott Bence?
b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott 17 fős csoportban a balkezesek száma legalább 1, de legfeljebb 4?

3. Bence nem készült fel rendesen a keddi 6 tanórájára, ezért tart attól, hogy felelni fog. Arra gondol, hogy mindegyik órán körülbelül 5% annak az esélye, hogy felel, ezért 30% körüli lehet annak az esélye, hogy valamelyik órán felelni fog.
a) Jól gondolkodik-e Bence?
b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy legalább két órán felelni fog?

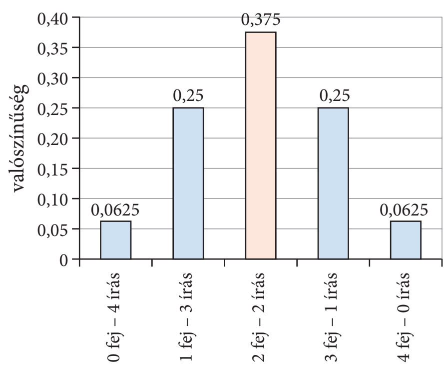
4. Egy automata palackgyártó gép 0,08 valószínűséggel állít elő hibás palackot. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a gép által gyártott 50 palack között
a) nincs hibás;
b) nincs hibátlan;
c) van hibás;
d) van hibátlan;
e) pontosan 4 hibás van;
f) legfeljebb 4 hibás van?

RÁADÁS

„Az élet nem igazságos…"

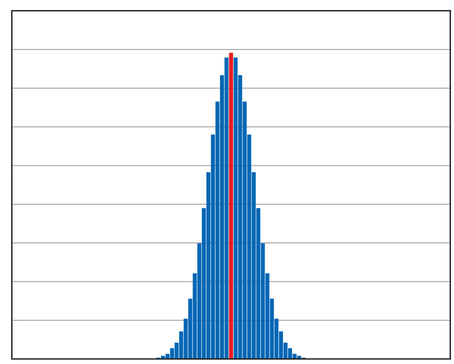
A binomiális eloszlással kapcsolatos egyik gyakori félreértés, hogy a kísérlet az esetek többségében az eloszlás „csúcsához" tartozó, azaz a legnagyobb valószínűségű esemény bekövetkezésével zárul. Ez azonban általában nem igaz.

Tegyük fel például, hogy Bence és Hajni 4 elvégzendő házimunka esetében mindegyik alkalommal pénzfeldobással dönti el, hogy melyiküknek kell azt elvégeznie. Bence mindig a fejjel, Hajni az írással játszik.
Azt várnánk – és a grafikon is azt sugallja –, hogy az esetek többségében az egyébként is legigazságosabb 2-2 eset fog megvalósulni.



Ennek a valószínűsége azonban csak 0,375, míg annak az esélye, hogy NEM az igazságos 2-2-es eset következik be, 0,625, azaz több mint másfélszer annyi! Vagyis az esetek nagyobb részében az összes vagy majdnem az összes házimunkát – nagy valószínűséggel – ugyanaz a személy fogja végezni. Bármelyikük legyen is az, úgy fogja érezni, hogy „az élet igazságtalan"!

Nagyobb számú kísérlet esetén még jobban látszik, hogy hiába az „igazságos" kimenetel a legvalószínűbb, mégis legtöbbször egy „igazságtalan" kimenetel valósul meg. Ha nem 4, hanem például 100 feladat elvégzéséről döntenének pénzfeldobással, akkor csupán 0,08 körüli annak a valószínűsége, hogy 50-50 feladat jut Hajnira, illetve Bencére. Majdnem 12-szer akkora (0,92) az esélye annak, hogy valamelyikük számára kedvezőtlen lesz a kimenetel.




A probléma táblázatkezelő programmal is vizsgálható.

Ráadás

Porszívók – Binomiális eloszlás vizsgálata számítógéppel

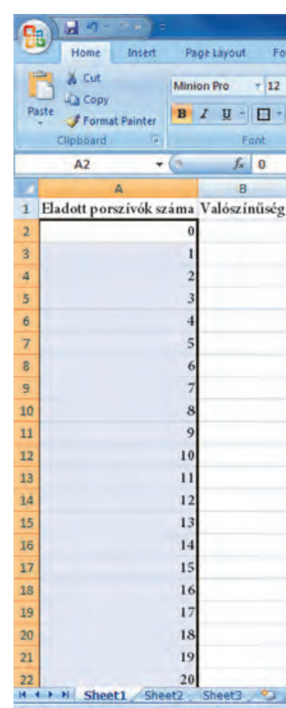
BEVEZETŐ

Ha van rá lehetőségetek, ezt az órát az informatikateremben tartsátok meg. Ha erre nincs mód, az itt szereplő feladatokat feldolgozhatjátok projektmunkaként, az órát pedig gyakorlásra használhatjátok.

FELADAT Ⓚ

Jocó nevelőapja egy porszívókat értékesítő cégnél dolgozik termékforgalmazóként. Felkeresi a lakásokat, bemutatókat tart. Az elmúlt évek statisztikai adatai alapján a megkeresett magyar háztartások 30%-a vásárol a termékforgalmazó ügynöktől porszívót. Egy házaló ügynök egy nap alatt 20 háztartást keres fel. A termékforgalmazók nem visznek magukkal 20 porszívót, hiszen ennyit „egész biztosan” nem adnak el egy nap alatt, és ezeket a termékeket más ügynököknek oda lehet adni. Ha azonban túl keveset visznek magukkal, „felsülhetnek”, vagyis előfordulhat, hogy még azelőtt kelnek el a magukkal vitt porszívók, hogy végiglátogatták a 20 háztartást, és így kimaradhatnak esetleges potenciális vevők.
Hány porszívót vigyen magával Jocó nevelőapja, ha 90%-os biztonsággal „nem akar felsülni”?

A feladat megoldásához táblázatkezelő programot fogunk használni. Ezeknek a programoknak az előnye, hogy a hosszas számításokat elvégzik helyettünk, így megkönnyítik az összetettebb problémák vizsgálatát.



Ha 20 háztartást látogatunk meg, akkor annak a valószínűsége, hogy közülük pontosan 0, 1, ..., 20 fog porszívót vásárolni, a binomiális eloszlás segítségével határozható meg. Ezeknek az eseményeknek a valószínűségét $P(0)$, $P(1)$, ... $P(20)$ jelöléssel látjuk el. Először végezzünk el néhány számítást a füzetünkben:

1. Számold ki a $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$ valószínűségeket!

2. Számold ki annak a valószínűségét, hogy legfeljebb két porszívót adunk el!

PÁRMUNKA

3. Használjatok most táblázatkezelő programot, például Excelt. Érdemes egy olyan táblázatot készítenetek, amely a sikeresen eladott porszívók száma mellett ennek az eseménynek a valószínűségét is tartalmazza.

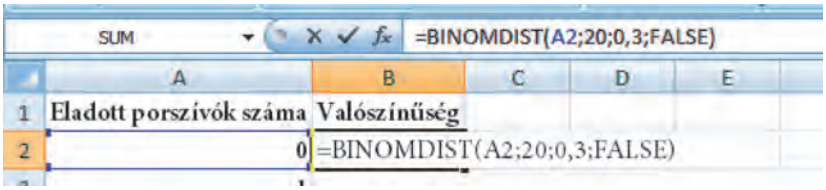
Az eladott porszívók számának megadásához használjátok az automatikus kitöltés funkciót! Ha az első két cellát kitöltitek (a 0 és 1 értékekkel), majd mindkettőt kijelölitek, a jobb alsó sarokban megjelenő „+” jelre kattintva az alattuk lévő sorokat automatikusan kitölti a program.

A binomiális eloszlás segítségével annak a valószínűsége, hogy a 20 háztartásból pontosan k darab vesz porszívót, így írható fel:

$$P(k) = \binom{20}{k} \cdot 0,3^k \cdot 0,7^{20-k}$$

Nem kell azonban ezt a hosszú képletet beírnunk a cellákba, az Excel ugyanis külön parancsot ismer a binomiális eloszlásra. Használjuk a BINOMDIST parancsot (a magyar nyelvű Excelben BINOM.ELOSZLÁS parancs). A parancs megadásához a cellába írt szöveget egyenlőségjellel kell indítani. Tehát:

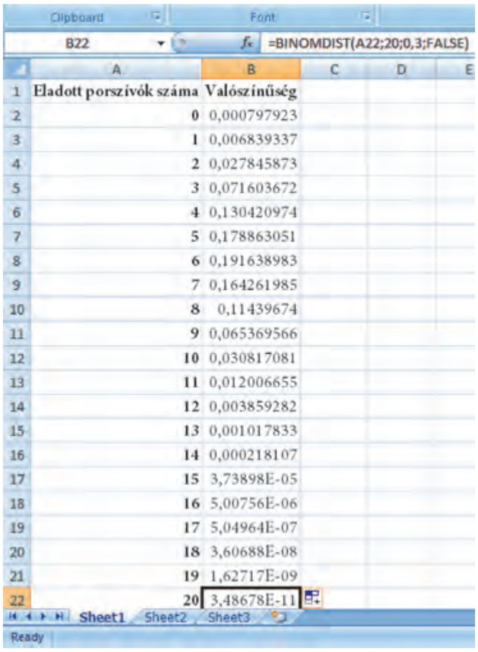
=BINOMDIST(
vagy
= BINOM.ELOSZLÁS(



SUM =BINOMDIST(A2;20;0,3;FALSE)

	A	B	C	D	E
1	Eladott porszívók száma	Valószínűség			
2	0	=BINOMDIST(A2;20;0,3;FALSE)			

A zárójel megnyitása után négy adatot kér a program a számításhoz, ezeket ;-vel kell elválasztani.



B22 =BINOMDIST(A22;20;0,3;FALSE)

	A	B	C	D	E
1	Eladott porszívók száma	Valószínűség			
2	0	0,000797923			
3	1	0,006839337			
4	2	0,027845873			
5	3	0,071603672			
6	4	0,130420974			
7	5	0,178863051			
8	6	0,191638983			
9	7	0,164261985			
10	8	0,11439674			
11	9	0,065369566			
12	10	0,030817081			
13	11	0,012006655			
14	12	0,003859282			
15	13	0,001017833			
16	14	0,000218107			
17	15	3,73898E-05			
18	16	5,00756E-06			
19	17	5,04964E-07			
20	18	3,60688E-08			
21	19	1,62717E-09			
22	20	3,48678E-11			

Az első (number_s/sikeresek) a sikerrel bekövetkezett események számát jelenti. Ez a példánk esetében az eladott porszívók száma. Mivel minden sorban az előtte lévő cellában szereplő szám kerül ide, adjátok meg ennek a cellának a nevét. A fenti képen ez A2.

A második adat (trials/kísérletek) az összes kísérlet számát jelenti. Esetünkben ez a megkeresett háztartások száma, tehát 20.

A harmadik adat (probability_s/siker_valószínűsége) a sikerrel bekövetkezett esemény valószínűségét jelenti. A példában annak a valószínűsége, hogy egy porszívót elad, 30%, tehát 0,3.

Az utolsó adat (cumulative/eloszlásfüggvény) azt jelöli, hogy annak a valószínűségét szeretnénk-e megkapni, hogy *pontosan* k-szor következzen be az esemény (ilyenkor a FALSE/HAMIS szót kell beírnunk), vagy annak, hogy *legfeljebb* k-szor (ilyenkor a TRUE/IGAZ szót kell beírnunk). Számunkra hasznosabb lesz az utóbbi, de egyelőre, az eloszlás vizsgálatához írjátok be a FALSE/HAMIS szót.

Ha használjátok az automatikus kitöltés funkciót, mindegyik valószínűséget egyből megkaphatjátok.

4. Készítsetek oszlopdiagramot a valószínűségről!
Jelöljétek ki a valószínűségeket mutató mezőket. Az oszlopdiagram beszúrásakor utólag megadhatjuk a vízszintes tengely adatait, itt válasszuk ki az eladott porszívók számát.
Tegyetek megfigyeléseket az oszlopdiagram és a táblázat alapján!

5. A következő oszlopban adjátok meg az előző parancsot úgy, hogy a cumulative/eloszlásfüggvény adatnak a TRUE/IGAZ értéket adjátok! Töltsétek ki az összes oszlopot, és vizsgáljátok meg az értékeket. Honnan látszik a valószínűségek értékéből, hogy ezúttal annak az eseménynek a valószínűségét határoztuk meg, hogy *legfeljebb* k-szor következik egy esemény?

6. Jocó nevelőapjának annyi porszívót bocsátanak a rendelkezésére, hogy azok legalább 90% valószínűséggel elegendők lesznek a 20 háztartáshoz. A táblázatot vizsgálva válaszold meg, hány porszívóról van szó!

Ráadás Visszatevéssel vagy anélkül?

BEVEZETŐ

A közvélemény-kutatások szervezésekor fontos, hogy a megkérdezettek körét jól válasszák ki, azaz a minta *reprezentatív*, s így a felmérés eredménye *megbízható* legyen, és természetesen az sem elhanyagolható kérdés, hogy *mennyibe is kerül* a felmérés elvégzése. A kutatás költsége nagymértékben függ attól, hogy mekkora mintát választanak, hiszen a válaszok összegyűjtése eszköz- és időigényes munka, és a kérdezőbiztosokat is meg kell fizetni.

Bence és Jocó azon vitázik, hogy a közvélemény-kutatás során biztosítani kell-e azt, hogy mindenkit csak egyszer kérdezzenek meg. Jocó szerint fontos különbségről van szó, Bence szerint nem.
Ugyanez a kérdés merül fel a minőség-ellenőrzés során is: visszatehető a megvizsgált munkadarab a többi közé *(visszatevéses mintavétel)*, vagy el kell különíteni az egyszer már megvizsgált termékeket *(visszatevés nélküli mintavétel)*?

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy gép által gyártott 50 munkadarab közül 20 darab selejtes, azaz 40% a selejtesek aránya. A minőség-ellenőrzés során 15 munkadarabot vizsgálnak meg. Azt várjuk, hogy nagy valószínűséggel a 15 megvizsgált munkadarab között is 40% körüli lesz a selejtesek száma, azaz 5, 6 vagy 7.
Mekkora valószínűséggel lesz 5, 6 vagy 7 selejtes a 15 megvizsgált munkadarab között, ha

a) visszatevéssel;

b) visszatevés nélkül végzik a minőség-ellenőrzést?

Megoldás

a) A visszatevéssel végzett minőség-ellenőrzésnél minden alkalommal ugyanazt a véletlen kísérletet hajtjuk végre. Ezért alkalmazhatók a binomiális eloszlásról tanultak. A selejtes munkadarab választásának valószínűsége minden esetben 0,4, a jó munkadarab választásának valószínűsége minden választásnál 0,6. Annak a valószínűsége, hogy a selejtes darabok száma a 15 alkalommal megismételt kiválasztás során 5, 6 vagy 7:

$$\binom{15}{5}\cdot 0{,}4^5\cdot 0{,}6^{10}+\binom{15}{6}\cdot 0{,}4^6\cdot 0{,}6^9+\binom{15}{7}\cdot 0{,}4^7\cdot 0{,}6^8\approx 0{,}57.$$

b) A visszatevés nélküli mintavétel esetén a $\dfrac{\text{kedvező kimenetelek száma}}{\text{lehetséges kimenetelek száma}}$ hányadossal határozhatjuk meg a valószínűséget.

Az 50 munkadarab közül $\binom{50}{15}$ különböző módon választható ki a 15 munkadarab (ennyi tehát a lehetséges kimenetelek száma). A 15 kiválasztott között 5, 6 vagy 7 selejtes $\binom{20}{5}\cdot\binom{30}{10}+\binom{20}{6}\cdot\binom{30}{9}+\binom{20}{7}\cdot\binom{30}{8}$ különböző módon lehet. A keresett valószínűség tehát:

$$\frac{\binom{20}{5}\cdot\binom{30}{10}+\binom{20}{6}\cdot\binom{30}{9}+\binom{20}{7}\cdot\binom{30}{8}}{\binom{50}{15}}\approx 0{,}65.$$

Látható, hogy van különbség a kétféle mintavétel között, de nem túl nagy. Ez a különbség azonban még kisebb, ha nemcsak 50 munkadarab van, hanem sokkal több. Jocónak tehát elméletileg igaza van, de gyakorlati szempontból inkább Bencénél van az igazság.

Megjegyzések

– Ha valamelyik mintavételi eljárás jelentős többletköltséggel jár a másikhoz viszonyítva, akkor nem jelent túl nagy kockázatot az, ha helyette a másik mintavételi eljárást választják.
– Közvélemény-kutatás során jóval nagyobb létszámú a megvizsgálandó halmaz egyedszáma (népesebb a populáció), mert például egy több tízezer lakosú településen vagy akár egy több millió lakosú országban kell kutatást végezni, több száz, esetenként több ezer embert megkérdezni. A felmérés megszervezése sokkal olcsóbb lehet, ha a visszatevéses mintavételt választják. Ekkor persze nincs kizárva, hogy ugyanazt az embert akár többször is megkérdezik, csakhogy a népes populáció miatt *ennek igen kicsi a valószínűsége*. A felmérés végeredménye emiatt gyakorlatilag ugyanaz lesz, mint ha gondosan ügyeltek volna arra, hogy mindenkit legfeljebb egyszer kérdezzenek meg (azaz visszatevés nélküli legyen a mintavétel). Ezzel együtt viszont jóval olcsóbban sikerülhet a felmérést elvégezni. (Lásd még a ráadást is!)

FELADAT

1. Számítsd ki, hogy a kidolgozott feladatban megadott feltételek mellett mekkora annak a valószínűsége, hogy a 15 elemű mintában 4, 5, 6, 7 vagy 8 selejtes lesz, ha
a) visszatevéssel;
b) visszatevés nélkül végzik a mintavételt!

2. Egy közlekedési vállalat felmérést készíttet az ellenőrökkel, hogy az utasok hány százaléka utazik tanulóbérlettel. Egy buszon utazó 60 utas közül 12-nek (20%-nak) van tanulóbérlete. Egy ellenőr két megálló között 10 utas jegyét vagy bérletét ellenőrzi. Az utasok a buszban szabadon mozoghatnak. Fontos-e a felmérés hatékonysága szempontjából, hogy figyeljen arra az ellenőr, hogy 10 különböző utast kérdezzen meg?

a) Töltsd ki a táblázat üres mezőit a füzetedben!

A 10 megkérdezett utas közül ennyi utazik **tanulóbérlettel**	0	1	2	3	4	5	6
Ennek valószínűsége **visszatevéses** mintavétel esetén	0,107		0,302			0,026	
Ennek valószínűsége **visszatevés nélküli** mintavétel esetén			0,330		0,081		0,002

b) „Visszatevéses módszerrel ellenőrizve” mekkora annak a valószínűsége, hogy a buszon utazó Bencétől legfeljebb egyszer kéri az ellenőr a bérletét?

HÁZI FELADAT

1. Egy iskola külföldi diákcsereprogramot szervez. Összesen 24 diák jelentkezett, közülük fogják sorsolással kiválasztani a 3 résztvevőt. A jelentkezők közül 15 tanuló tizenkettedik, 9 tanuló pedig tizenegyedik osztályos.

a) Alkalmazható-e erre a sorsolásra a visszatevéses és a visszatevés nélküli modell is? Ha nem, melyiket kell használni?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy mindhárom kisorsolt jelentkező tizenkettedikes lesz?

c) Mennyi a valószínűsége, hogy két tizenkettedikest és egy tizenegyedikest választanak ki?

2. A LEGO cég 2010-ben dobta piacra a gyűjthető LEGO minifigura első sorozatát. A teljes gyűjtemény 16 különböző figurából áll, közülük az egyik űrhajós. Ezek mind ugyanolyan – nem átlátszó – csomagolásban kerülnek forgalomba, így csak a figurát rejtő zacskó kinyitása után derül ki, hogy valójában melyik figurát is vásároltuk meg. Egy játékboltban, ahol a 16-féle figura mindegyikéből 4-4 darab van, 64 csomag közül válogathatunk. Mekkora annak a valószínűsége, hogy 5 megvásárolt figura közül

a) pontosan 2 űrhajós lesz;

b) nem lesz űrhajós?

3. Egy televíziós vetélkedőműsorban a nézőtéren 60 játékosjelölt ül, közülük 12-en ugyanannak a baráti társaságnak a tagjai. A 60 néző közül sorsolással fogják kiválasztani azt az 5-öt, akik játszhatnak. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az 5 kiválasztott játékos közül

a) pontosan ketten;

b) legalább ketten

a 12 tagú baráti társaságnak a tagjai, ha mindenki csak egyszer választható játékosnak?

RÁADÁS

Számítógép segítségével nagyobb létszámú populáció esetén is vizsgálható a visszatevéses és a visszatevés nélküli mintavétel.

Például

egy 250 fős összejövetelen a megjelentek 30%-a nyugdíjas korú. A jelenlévők között 20 könyvutalványt sorsolnak ki. Vizsgáljuk meg, mennyi annak a valószínűsége, hogy a nyertesek között 0, 1, 2, …, 20 nyugdíjas korú van, ha

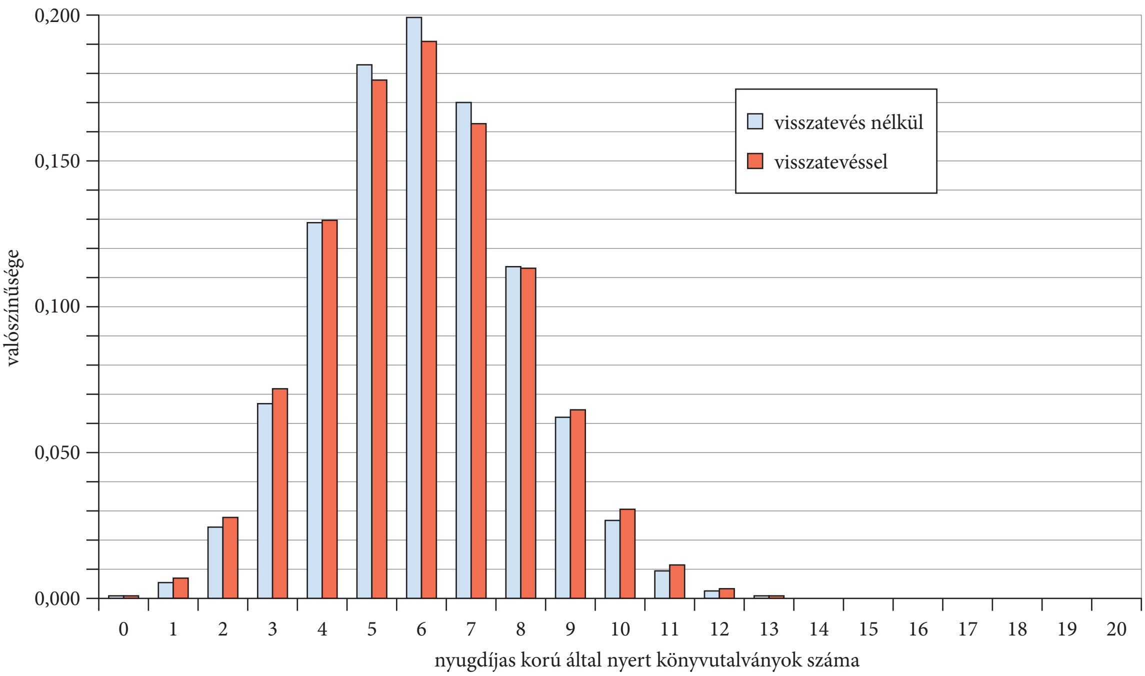
a) mindenki csak egy utalványt nyerhet;

b) mindenki több utalványt is nyerhet!

Az a) esetben *visszatevés nélküli mintavételről* van szó: annak a valószínűsége, hogy k darab könyvutalványt nyugdíjas korú nyer meg: $\dfrac{\binom{75}{k}\cdot\binom{175}{20-k}}{\binom{250}{k}}$.

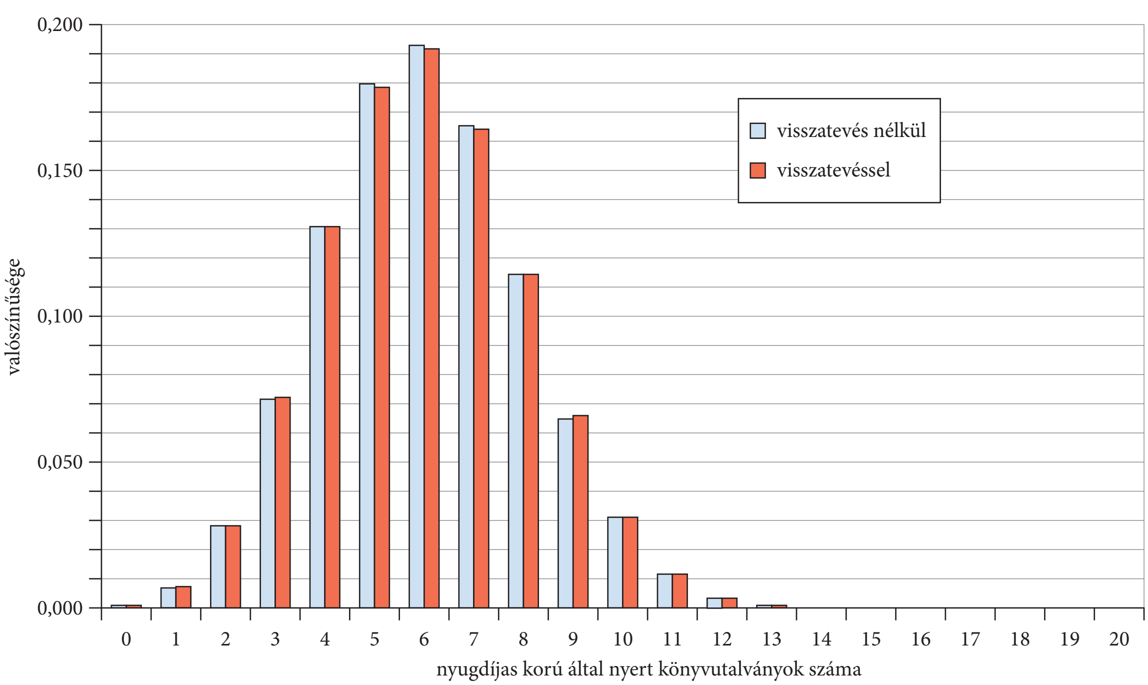
A b) esetben minden egyes könyvutalvány kisorsolásánál 0,3 annak a valószínűsége, hogy nyugdíjas korú nyeri az utalványt, és 0,7 annak a valószínűsége, hogy nem nyugdíjas korú. Annak a valószínűsége, hogy k darab könyvutalványt nyugdíjas korú nyer meg: $\binom{20}{k}\cdot 0{,}3^{k}\cdot 0{,}7^{20-k}$.

Oszlopdiagramon ábrázolhatjuk az egyes *k* értékekhez tartozó valószínűségeket.



Megfigyelhető, hogy már viszonylag kis populációszám (250) esetén sem jelentős az eltérés a kétféle mintavétellel kapott valószínűségek eloszlása között.

Ha a társaság létszáma 250 helyett 2500 lenne, és változatlanul 30% lenne a nyugdíjas korúak aránya, akkor a 20 könyvutalvány kétféle kisorsolására az alábbi valószínűségeloszlást kapnánk:



Láthatóan szinte eltűnik a kétféle sorsolási módszer közötti különbség.

40 Gyakorlás

CSOPORTMUNKA

Dolgozzatok csoportokban!

I. FELADATSOR

1. Zsuzsi 7 jegyű mobiltelefonszáma különböző számjegyekből áll, és az első számjegy nem nulla. Amikor Ildikó felhívta Zsuzsit, feltűnt neki, hogy a mobiltelefonján a három oszlop közül csak kettőnek a nyomógombjaira volt szükség. Ezekre is úgy, hogy először az egyik oszlopban lévő nyomógombokat kellett valamilyen sorrendben megnyomnia, ezután pedig egy másik oszlop nyomógombjai következtek valamilyen sorrendben. Hány ilyen telefonszám lehetséges?

(A 2011. évi középszintű érettségi 14. feladata.)

2. Egy kockajátékban egy **menet** abból áll, hogy szabályos dobókockával **kétszer dobunk** egymás után. Egy dobás 1 pontot ér, ha négyest vagy ötöst dobunk, egyébként a dobásért nem jár pont.
A **menetet** úgy pontozzák, hogy a két dobásért járó pontszámot összeadják.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy **menetben** 1 pontot szerzünk, és azt az első dobásért kapjuk?

b) Minek nagyobb a valószínűsége,
– annak, hogy egy **menetben** szerzünk pontot, vagy
– annak, hogy egy **menetben** nem szerzünk pontot?

(A 2010. évi középszintű érettségi 15. feladata.)

II. FELADATSOR

1. Négyen kártyáznak a 32 lapos magyar kártyával. Először jól megkeverik a lapokat, és lefordítva, hátlapjukkal felfelé egy húzópakliba rendezik. Az első játékos felhúzza magának az első 8 lapot.

a) Az első játékos megnézi a lapjait, azonnal elárulja a többieknek, hogy csupa zöld lapot húzott. Bence hangosan megjegyzi, hogy akkor olyan esemény következett be, amelynek a valószínűsége szinte 0.

b) Ezután a második játékos húz fel 8 lapot, nézi meg a lapjait, és elárulja, hogy minden lapja figura. Bence hitetlenkedve csóválja a fejét, mert szerinte, ha már tudjuk, hogy az első csupa zöld lapot húzott, akkor annak a valószínűsége, hogy a maradék lapokból a következő csupa figurát húz, még 0,001-nél is kisebb.

c) A harmadik játékos is húz 8 lapot. Ő sem mutatja meg a többieknek a lapjait, de megmondja, hogy az ő 8 lapja között pontosan 3 figura van. Bence most helyeslően bólogat: úgy véli, hogy az ilyen lapok választásának a valószínűsége közelítőleg 0,25 volt, tehát semmi meglepő nem történt.

d) Hány figura maradt a negyedik játékosnak?

Végezz számításokat, ellenőrizd Bence kijelentéseinek helyességét!

2. Egy más alkalommal négy kártyázó szabályszerűen kiosztja a 32 lapot, mindenkinek nyolcat-nyolcat.

a) Csilla azt reméli, hogy csupa zöld lapot kap. Mennyi ennek a valószínűsége?

b) Janka szeretné, ha csupa figurát kapna. Mennyi ennek a valószínűsége?

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 8 lap között pontosan 3 figura lesz?

d) Miben különbözik a 2. feladat az 1.-től?

III. FELADATSOR

1. Egy tesztlap készítői 10 különböző kérdést szeretnének feltenni.

a) Hányféle lehet a kérdések sorrendje?

A tesztlap elkészült, kinyomtatták. A 10 kérdés mindegyikére igennel vagy nemmel lehet válaszolni.

b) Hány különböző módon tölthető ki egy kinyomtatott tesztlap?

Dönci nem készült fel a tesztlap kitöltésére, ezért véletlenszerűen válaszol a tíz kérdés mindegyikére.

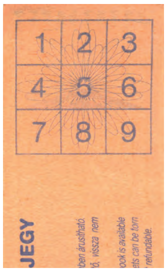
c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Döncinek egyetlen jó válasza sem lesz?

d) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Dönci pontosan 5 kérdésre ad jó választ?

A tesztlap alkotói azt szeretnék, hogy csak azokat a tesztlapokat fogadják el sikeresen kitöltöttként, amelyeken legalább 8 jó válasz van.

e) Mekkora a valószínűsége, hogy Dönci sikeresen tölti ki a tesztlapot?

2. A tömegközlekedési eszközökön jegyet kell érvényesíteni. A jegyen 9 számjegy van, 1-től 9-ig. A járművön egy készülék kilyukasztja, érvényesíti a jegyet.



a) Hány különböző lyukasztás lehetséges, ha a jegyen 3 lyuknak kell lennie?

b) Ha egy jegyen csak 3 lyuk lehet, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy az összes lehetséges módon kilyukasztott jegyek közül egyet véletlenszerűen kiválasztva azon legalább 2 prímszám is ki van lyukasztva?

c) Hány különböző lyukasztás lehetséges, ha a jegyen legalább 2, de legfeljebb 5 lyuknak kell lennie?

d) Egy jegyen 5 lyuk szerepel, ezek középpontosan szimmetrikusan helyezkednek el. Hány különböző lehetőség van erre?

HÁZI FELADAT

1. Az iskola 12. évfolyamára 126 tanuló jár, közülük kétszer annyi látogatta az iskolanap rendezvényeit, mint aki nem látogatta. Az *Iskolaélet* című kiadványt a rendezvényeket látogatók harmada, a nem látogatóknak pedig a fele olvasta. Egy újságíró megkérdez két találomra kiválasztott diákot az évfolyamról, hogy olvasták-e az *Iskolaélet*et. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a két megkérdezett diák közül az egyik látogatta az iskolanap rendezvényeit, a másik nem, viszont mindketten olvasták az *Iskolaélet*et?
(A 2010. májusi középszintű érettségi 16. d) feladata.)

2. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a jövő héten az 5-ös lottóban

a) a kihúzott számok között lesz a 20;

b) a kihúzott számok között lesz a 20 is és a 90 is;

c) a kihúzott számok között lesz a 20 is, a 30 is és a 90 is;

d) csupa 0-ra végződő számot húznak ki?

3. Egy szellemi vetélkedő döntőjébe 20 versenyzőt hívnak be. A zsűri az első három helyezettet és két további különdíjast fog rangsorolni. A rangsorolt versenyzők oklevelet és jutalmat kapnak.

a) Az öt rangsorolt versenyző mindegyike ugyanarra a színházi előadásra kap egy-egy jutalomjegyet. Hányféle kimenetele lehet ekkor a versenyen a jutalmazásnak?

b) A dobogósok három különböző értékű könyvutalványt, a különdíjasok egyike egy színházjegyet, a másik egy hangversenyjegyet kap. Hányféle módon alakulhat ekkor a jutalmazás?

c) Ha már eldőlt, kik a rangsorolt versenyzők, hányféle módon oszthatnak ki nekik jutalmul öt különböző verseskötetet?

(A 2006. februári középszintű érettségi 18. feladata alapján.)

41 Gyakorlás; tudáspróba

FELADAT

1. Hányféleképpen választhatja ki a tanár a három felelőt egy 17 fős csoportban, ha
a) írásban felelnek, mind ugyanazt a feladatot kapja;
b) szóban felelnek, mind más feladatot kap?

2. **a)** Egy tízforintost ötször feldobva mekkora annak a valószínűsége, hogy több lesz a fej, mint az írás?
b) Egy százforintost négyszer feldobva mekkora annak a valószínűsége, hogy több lesz a fej, mint az írás?

3. Bencének 26 osztálytársa van, ma 3-an hiányoznak. A matematikatanár véletlenszerűen kiválaszt 2 felelőt. Egyiküknek egy feladatot kell megoldania, a másikuk elméleti kérdést kap. Mennyi a valószínűsége, hogy
a) Bence lesz az egyik felelő;
b) Bence felel az elméleti anyagból;
c) Bence ma nem felel?

4. Oldd meg a 3. feladatot azzal a változtatással, hogy ma 3 tanuló felel, ketten más-más feladatot kapnak, a harmadik pedig elméleti kérdést kap!

5. Hány
a) 1 elemű;
b) 3 elemű;
c) 5 elemű;
d) 7 elemű;
e) 9 elemű;
f) 11 elemű
részhalmaza van egy 12 elemű halmaznak?
g) Hány részhalmaza van összesen egy 12 elemű halmaznak?

6. Péterék osztályában 27-en vannak, közülük 15 lány. Öttagú küldöttséget kell választaniuk az iskola diákönkormányzatának ülésére.
a) Hányféleképpen állítható össze az öttagú küldöttség?
b) Hányféleképpen állítható össze az öttagú küldöttség úgy, hogy legyen fiú a küldöttségben?
c) Hányféleképpen állítható össze az öttagú küldöttség úgy, hogy több legyen a lány közöttük, mint a fiú?

TUDÁSPRÓBA I.

1. Számítsd ki számológéppel!
a) $\frac{15! - 14!}{6!}$ **b)** $\frac{15! - 14!}{13!}$

2. Egyre több régi film jelenik meg DVD-n. A nagyszülők gyűjteményében található régi filmeket táblázatba foglaltuk.

Háború előtti filmek			Háború utáni filmek			
magyar	angol	amerikai	magyar	olasz	csehszlovák	orosz
12	2	10	17	8	6	5

Amikor Tekla meglátogatja nagyszüleit, sokszor kiválaszt egy-két régi filmet a DVD-s fiókból.

Mennyi a valószínűsége, hogy ha találomra kivesz három filmet, akkor

a) mindhárom magyar film lesz;
b) nem lesz köztük magyar film;
c) lesz köztük magyar film;
d) legalább az egyik háború előtti lesz;
e) az egyik film amerikai, a másik kettő pedig csehszlovák lesz;
f) lesz köztük háború előtti és háború utáni film is?

3. A 2000-es évek első évtizedében évente átlagosan 100-nál is több műholdat állítottak pályára. Ez azonban korántsem kockázatmentes dolog, a statisztikák szerint a műholdak kb. 7%-a már a fellövés során megsemmisül.

Ha elfogadjuk, hogy minden fellövésnél ennyi az esélye a megsemmisülésnek, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy a következő 10 műhold közül a fellövésnél

a) pontosan kettő semmisül meg;
b) legfeljebb kettő semmisül meg?

4. Két szabályos dobókockát egyszerre feldobva mekkora a valószínűsége, hogy a dobott pontok szorzata néggyel osztható lesz?

TUDÁSPRÓBA II.

1. Számítsd ki számológéppel!

a) $\dfrac{13! - 12!}{7!}$ **b)** $\dfrac{15! + 14!}{13!}$

2. Egy busztársaság nyilvántartása szerint az elmúlt évben 60 buszuk közül 3-at kellett kisebb-nagyobb motorhiba miatt javítani, 10-en kellett gumihibát javítani, ráadásul további 2 buszon mindkét hibatípus előfordult.
Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott buszt az elmúlt évben

a) motorhiba miatt javítottak?
b) nem kellett gumihiba miatt kivenni a forgalomból?

3. Két szabályos dobókockát feldobva mekkora a valószínűsége, hogy a dobott pontok szorzata hattal osztható lesz?

4. A hét minden napján nyitva tartó sarki bolt egyik polcán hétféle dobozos müzli közül válogathatunk: van A, B, C, D, E, F és G típusú müzli. Leveszünk egymás után három dobozt, és azokat a kosarunkba tesszük.

a) Hányféle sorrendben vehetjük le a három dobozt, ha mind különböző, illetve ha egyformák is lehetnek?
b) A kosárban három doboz müzli van, mindegyik más típusú. Hányféle lehet a kosár tartalma?

Az E típusú müzlit gyártó cég reklámja szerint az ő müzlis dobozaik közül „Hétből három ajándékot is rejt!”.

c) Véletlenszerűen kiválasztva egy E típusú müzlis dobozt, mekkora annak a valószínűsége, hogy abban lesz ajándék?

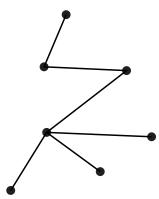
A bolt polcait mindennap újra feltöltik, így a müzlis dobozok sohasem „fogynak el”.

d) Mekkora annak a valószínűsége, hogy ha a hét minden napján véletlenszerűen vásárolunk egy-egy E típusú müzlit, akkor a hét közül pontosan három dobozban lesz ajándék?

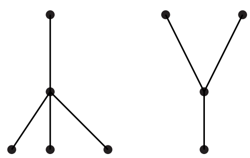
Témazáró feladatgyűjtemény

1. Jellemezd a gráfokat! Hány csúcsuk, hány élük van? Mennyi az egyes csúcsok fokszáma?
Van a gráfok között egyszerű gráf?

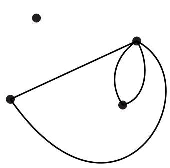
a)



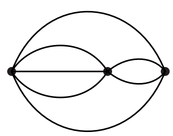
d)



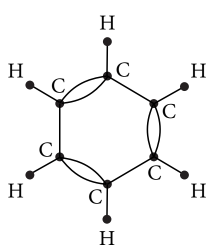
b)



e)



c)



2. Rajzolj olyan 7 pontú, egyszerű gráfot, melyben a csúcsok fokszámai:
a) 0; 0; 0; 1; 2; 2; 3 **c)** 1; 2; 3; 3; 3; 3; 4.
b) 1; 2; 3; 3; 3; 3; 3

3. Hány éle van annak a gráfnak, melyben a fokszámok a következők?
a) 1; 2; 3; 3; 4; 7 **b)** 2; 4; 4; 4; 5; 5

4. Igazold, hogy nincs olyan egyszerű gráf, melyben a csúcsok fokszámai a következők:
a) 1; 2; 3; 3 **b)** 1; 2; 3; 4 **c)** 0; 1; 2; 3.

5. Igazold, hogy minden 12 pontú egyszerű gráfnak biztosan van két olyan csúcsa, melyek fokszáma megegyezik!

6. Egy gyártási folyamat során három fázison megy keresztül a termék. Az első fázisban négy marógép dolgozik egymással párhuzamosan, melyek ugyanazt a feladatot végzik. A második fázisban egy finommechanikai gép végez egy rövid műveletet, ezt csak egy gép végzi. A harmadik fázisban három csomagológép dolgozik egymással párhuzamosan a terméken.
a) Hányféle különböző gyártási úton készülhet el a termék, ha tudjuk, hogy egy margógép dolgozik rajta, majd a finommechanikai gép, majd egy csomagológép? Szemléltesd gráfon a gyártási folyamatot!
b) Hányadrészére csökken a gyártási utak száma, ha egy marógép és egy csomagológép is meghibásodik?
c) Hányadrészére csökkenhet a gyártási utak száma, ha valamelyik két gép meghibásodik (de nem tudjuk, hogy melyik)?

7. Egy hattagú társaságban mindenkinek pontosan 3 ismerőse van. Szemléltess gráffal egy ilyen ismertségi rendszert (az ismeretségek kölcsönösek)!

8. Rajzolj egy gráfot, mely a kocka csúcsait és éleit szemlélteti!

9. Dönci a fagyizóban 5-féle ízű fagylalt közül választhat. Az egyik nap 2 gombócot, egy másik napon 3 gombócot kér, tölcsérbe. Készíts gráfot a következő döntésekről:
a) Hányféle 2-gombócos fagylaltot rendelhet?
b) Hány különböző 3 gombócos fagyit kérhet, ha tudjuk, hogy az 5 közül a kókuszt nem szereti, ezért ebből nem kér, és úgy döntött, hogy 3 különböző ízű gombócot választ?

10. A mozi pénztára előtt sorban állnak jegyért Balázs, Erzsi, Gellért, Klári és Sanyi.
a) Hányféleképpen állhatnak sorba?
b) Hányféleképpen állhatnak a sorban, ha tudjuk, hogy Gellért az első?
c) Hányféle lehet a sorrend, ha tudjuk, hogy felváltva állnak sorban a fiúk és a lányok?

11. A cukrászdában 7-féle sütemény kapható. Hányféleképpen választhatunk ki ezek közül három különbözőt, ha a sütemények sorrendje nem számít?

12. **a)** Hány különböző, 8 hosszúságú kód készíthető a 0 és 1 számjegyekből?
b) Hány olyan 8 hosszúságú kód készíthető a 0 és 1 számjegyekből, amely egyessel kezdődik?

13. Egy közvélemény-kutatáson 10 kérdésre kell válaszolni, mindegyikre igent vagy nemet.

a) Hányféle különböző kitöltése lehet ennek a tesztnek?

b) Hány olyan kitöltése van a tesztnek, amelyben pontosan 8 igen válasz szerepel?

14. A Heimlich & Co. társasjátékban 8 különböző színű kártyalap van. Mindenki húz egy kártyát, de nem mutatja meg a többieknek. A játék során mind a 8 színű bábut mozgatják a játékosok, s úgy kell lépkedni, hogy ne derüljön ki, hogy ki melyik színnel van, de közben mégis a saját színű bábu érje el a legjobb eredményt. Bence, Dönci és Gyuri arról beszélgetnek, vajon hányféle kiosztás lehetséges, ha csak hárman játszanak (mindhárman 1-1 kártyát húznak a 8 közül). S hányféle leosztás van akkor, ha heten játszanak? És ha nyolcan?

15. Bence osztályából egy négyfős csapat indult a robotikavetélkedőn: Bence, Dönci, Kató és Juli. A vetélkedőn háromféle feladatot kell megoldaniuk, egy időben, egymással párhuzamosan dolgozva. Egyikük tölti a tesztet, másikuk egy számítási feladatot old meg, s ketten egy modellt kell összeállítsanak.

a) Hányféleképpen oszthatják ki egymás között a 3 feladatot?

b) Hányféleképpen oszthatják ki a feladatokat, ha nem a két fiú állítja össze a modellt?

Ábrázold gráffal a megoldásokat!

16. Hajni osztályából hatan arra vállalkoztak, hogy színpadra visznek egy jelenetet. A 4 lány és a 2 fiú olyan darabot választottak, amelyben 4 női és 2 férfi szereplő van. Hány különböző szereposztás alkotható, ha a fiúk férfi szereplőt, a lányok női szereplőt játszanak?

17. A 7-et szeretnénk 3 pozitív egész szám összegére bontani. Ábrázold gráffal, hányféle felbontás létezik, ha a tagok sorrendje is számít! Ezek között hány különböző felbontás található, ha a tagok sorrendjétől eltekintünk?

18. Számold ki:

a) $4! + 6!$, $\quad 3! + 7!$, $\quad 2! + 5!$

b) $\dfrac{3! + 4!}{3!}$, $\quad \dfrac{4! + 5! + 7!}{3!}$, $\quad \dfrac{6! + 8!}{5!}$

19. Számold ki:

a) $\binom{5}{4}$, $\binom{9}{2}$, $\binom{11}{10}$, $\binom{320}{318}$, $\binom{5110}{1}$;

b) $\binom{6}{3}$, $\binom{8}{5}$, $\binom{10}{3}$, $\binom{9}{4}$, $\binom{11}{7}$.

20. A Mastermind egy kétszemélyes logikai társasjáték. 8 színben találhatók benne a „gombok”. Ezekből rak ki az egyik játékos egy 4 gombból álló titkos kódot. A másik játékos találgat. Az első játékos értékeli a társa tippjeit: annyi fekete „gyufaszálat” rak, ahány tipp jó helyen van, s annyi fehér „gyufaszálat”, ahány gombra igaz, hogy az előbbieken kívül megfelelő a színe, de nincs jó helyen. Ezen információk alapján kell kitalálni a titkos kódot.

a) Hányféle kód rakható ki a 8 színből?

b) Hányféle kód rakható ki, ha a gombok között nem lehet több azonos színű?

c) Ha kitaláltuk a négy színt, akkor a négy színből hányféle kód rakható ki, ha egy szín nem fordulhat elő többször?

d) Ha kitaláltuk a négy színt (piros, kék, zöld, sárga), hányféle négyszínű kód rakható ki, amelyben a piros gomb nincs a kék mellett?

21. Hány 6 jegyű szám írható fel az 1, 3 és 8 számjegyekkel? Ezek között mennyi páratlan?

22. Hány 6 jegyű szám írható fel a 0, 3 és 8 számjegyekkel? Ezek között mennyi páratlan?

23.

a) Hány 5 jegyű szám írható fel a hatos számrendszerben?

b) Mennyi ezek közül a legnagyobb és a legkisebb szám a tízes számrendszerben?

c) Ezek között hány olyan van, amelyik páros?

d) Hány olyan 5 jegyű szám írható fel a hatos számrendszerben, amelynek minden számjegye különböző?

24. A hatos számrendszerben hány olyan szám van, amelyik legfeljebb ötjegyű?

25.

a) Hány nyolcjegyű jelszó készíthető a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyekből és az x, y, z, v betűkből, ha a jelszóban lehetnek számjegyek is, betűk is, tetszőleges sorrendben, s akár ismétlődhetnek is?

b) Ugyanezekből a karakterekből olyan nyolcjegyű jelszót kell készíteni, amelyben az első 4 karakter betű, a második 4 karakter számjegy. Ekkor hány különböző megoldást találhatunk?

c) Ugyanezekből a karakterekből olyan nyolcjegyű jelszót kell készíteni, amelyben az első 4 karakter betű, a második 4 karakter számjegy, és minden karaktere különböző. Ekkor hány különböző megoldást találhatunk?

26. A hatos számrendszerben hány olyan szám van, amelynek minden számjegye különböző, és legfeljebb ötjegyű?

27. **a)** Hányféleképpen állhat sorba Hajni és 8 osztálytársa, ha tudjuk, hogy Hajni és Juli szomszédosak egymással?

b) Hányféleképpen állhatnak sorba ők kilencen, ha tudjuk, hogy Hajni a harmadik?

c) Hányféleképpen állhatnak sorba, ha Hajni nem az utolsó?

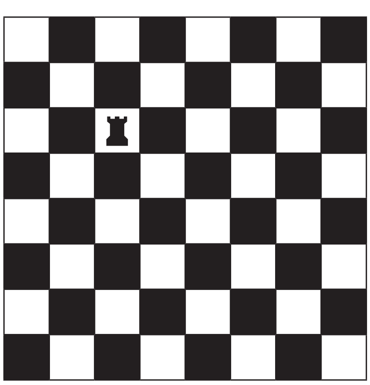
28. Egy városban azon gondolkodnak, hogy újfajta buszjegyeket vezetnek be. Az új buszjegy nem 3×3-as formátumú lesz, hanem 4×4-es: 1-től 16-ig szerepelnek rajta a számok, az ábra szerint.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

a) Ha ezek közül pontosan hármat lyukaszt ki a lyukasztó, akkor hány különböző lyukasztás történhet?

b) Ha két vagy három lyukat lyukaszt a gép, akkor hányféle lyukasztás történhet?

29. A sakktáblán az ábra szerint elhelyezünk egy bástyát.



a) Ha véletlenszerűen elhelyezünk a tábla valamelyik üres mezőjére egy másik bábut, mennyi a valószínűsége, hogy úgy tettük le, hogy ütésben áll?

b) Hogyan változik ez a valószínűség, ha eredetileg máshová helyeztük a bástyát?

30. Ha 10 gyerek, köztük Bence és Dönci sorba áll, mennyi a valószínűsége, hogy ők ketten nem kerülnek egymás mellé?

31. A Catan telepesei című társasjátékban két dobókockával dobunk egyszerre. Ha a dobott pontok összege hét, akkor senki sem jár jól, hanem a szerencsétlenséget okozó „rabló” nevű bábut kell mozgatni. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobás után a „rabló” lép?

32. Véletlenszerűen húzunk hármat a T, T, T, T, T, É, É, É betűk közül. Mennyi a valószínűsége, hogy ki tudjuk rakni belőlük a TÉT szót?

33. Mennyi a valószínűsége, hogy két dobókockával dobva

a) a dobott számok összege 1?

b) a dobott számok összege 2?

c) a dobott számok összege 3?

d) a dobott számok összege 7?

e) a dobott számok összege 2 vagy 7?

34. A társasjátékban Bence bábuja 5 mezővel áll Dönci bábuja mögött.

a) Két kockával dobhat, s a dobott pontok összegét leléptheti. Mennyi a valószínűsége, hogy megelőzi Döncit?

b) Két kockával dobhat, s bármelyik dobása eredményét leléptheti, de csak az egyiket, nem az összegüket. Mennyi a valószínűsége, hogy megelőzi Döncit?

35. Két dobókockával dobunk egymás után. Mennyi a valószínűsége, hogy a második kockával ugyanazt dobjuk, mint ez elsővel?

36. A totón 13+1 mérkőzésre lehet tippelni, mindegyikre háromfélét: 1, 2 vagy x.

a) Hány különböző módon tölthető ki a totószelvény?

b) Véletlenszerűen kitöltve a totószelvényt mennyi a valószínűsége, hogy 13 találatunk van?

c) Véletlenszerűen kitöltve a totószelvényt mennyi a valószínűsége, hogy 12 találatunk van?

37. Csilla a Honfoglaló játékot játssza. Élvezi a játékot, pedig még sok kérdésre nem tudja a választ, s ilyenkor véletlenszerűen tippel. Inkább nem kér segítséget. Ha 3 egymás utáni választós kérdésre nem tudja a választ, s ezért véletlenszerűen jelöli meg a négy lehetséges válasz közül az egyiket, mekkora annak a valószínűsége, hogy pontosan két választ eltalál? Mekkora annak a valószínűsége, hogy legalább két választ eltalál?

38. A pókerjáték során a következő három lapot osztották nekünk: pikk király, kőr dáma, treff tízes.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy a további két lap kiosztása után „sor" lesz a kezünkben?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy „1 pár" lesz a kezünkben?

39. A pókerjátékban az első három lapunk a káró nyolcas, kőr nyolcas, treff kilences.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy a további két lap kiosztása után „drill" lesz a kezünkben?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy „két pár" lesz a kezünkben?

c) Mennyi a valószínűsége, hogy „full" lesz a kezünkben?

40. A társasjátékban Csilla bábuja pontosan 15 mezővel áll a cél előtt. Pontosan 16-ot kell lépnie ahhoz, hogy célba érjen. Ha többet lép, „visszapattan", s játékban marad. Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 3 dobásból célba tud érni? (Készíts a célba érés dobássorozatáról gráfot!)

41. A 32 lapos magyar kártyából 6 lapot húzunk.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan 2 király kerül a kezünkbe?

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább 2 király kerül a kezünkbe?

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 2 király kerül a kezünkbe?

42. Az egyik héten (2015 első játékhetében) azt figyelte meg Bence, hogy a hatos lottón a kihúzott számok között a legkisebb a 37-es volt. Elgondolkodott azon, vajon mennyi annak a valószínűsége, hogy a legkisebb kihúzott szám a 37-es. Majd azon gondolkodott, hogy mennyi annak a valószínűsége, hogy minden szám nagyobb, mint 36. (A hatos lottón 45 számból húznak ki 6 számot.) Mekkorák ezek a valószínűségek?

43. Bence és Dönci a következő játékot játsszák. Készítettek 3 különleges dobókockát. Az egyiknek öt oldalán 4 pont van, egy oldalán 1 pont. A másiknak öt oldalán 3 pont van, egy oldalán 6 pont. A harmadiknak három oldalán 2 pont van, három oldalán 5 pont. Mindketten húznak egy-egy dobókockát. Dobnak, s az nyer, aki a nagyobbat dobja. Bence azt javasolja, hogy ne véletlenszerűen húzzák a dobókockát, hanem mindketten válasszanak. Dönci beleegyezik, azzal a feltétellel, hogy Bence választ elsőnek. Vajon hogyan gondolkodott Dönci? Számold ki, mekkora valószínűséggel nyernek az egyes kockák a többi kocka ellen!

44. Érettségi feladat, 2007. május – 3 pont
A 100-nál kisebb és hattal osztható pozitív egész számok közül véletlenszerűen választunk egyet. Mekkora valószínűséggel lesz ez a szám 8-cal osztható? Írja le a megoldás menetét!

45. Érettségi feladat, 2008. május – 12 pont
Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek felhasználásával ötjegyű számokat készítünk az összes lehetséges módon (egy számjegyet többször is felhasználhatunk). Ezek között hány olyan szám van,

a) amely öt azonos számjegyből áll;

b) amelyik páros;

c) amelyik 4-gyel osztható?

46. Érettség feladat 2007. május – 12 pont
A városi középiskolás egyéni teniszbajnokság egyik csoportjába hatan kerültek: András, Béla, Csaba, Dani, Ede és Feri. A versenykiírás szerint bármely két fiúnak pontosan egyszer kell játszania egymással. Eddig András már játszott Bélával, Danival és Ferivel. Béla játszott már Edével is. Csaba csak Edével játszott, Dani pedig Andráson kívül csak Ferivel. Ede és Feri egyaránt két mérkőzésen van túl.

a) Szemléltesse gráffal a lejátszott mérkőzéseket!

b) Hány mérkőzés van még hátra?

c) Hány olyan sorrend alakulhat ki, ahol a hat versenyző közül Dani az első két hely valamelyikén végez?

47. Érettségi feladat, 2009. október – 12 pont
Béla egy fekete és egy fehér színű szabályos dobókockával egyszerre dob. Feljegyzi azt a kétjegyű számot, amelyet úgy kap, hogy a tízes helyiértéken a fekete kockával dobott szám, az egyes helyiértéken pedig a fehér kockával dobott szám áll. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a feljegyzett kétjegyű szám

a) négyzetszám;

b) számjegyei megegyeznek;

c) számjegyeinek összege legfeljebb 9?

42 Hatványozás

BEVEZETŐ

Egy családban a nagyszülők unokájuk jövőjéről gondolkoznak:

– Most még csak 8 éves lesz, de egyszer majd lesz 18 is!

– Igaz, és ha segíteni akarjuk, azt jobb most rögtön elkezdeni. Ha össze tudnánk adni 500 000 forintot, és betennénk a bankba 6%-os kamatos kamatra, akkor 10 év alatt talán meg is duplázódna!

Számítsuk ki, hány forint lenne a lejáratkor a bankbetéten, ha 500 000 forintot évi 6%-os kamatos kamatra és 10 éves futamidőre kötnénk le! Valóban megduplázódna az összeg?

Megoldás

Az évi 6%-os kamatos kamat azt jelenti, hogy a betét év eleji értékéhez minden év végén hozzáadják a 6%-át. Ezt a megnövelt értéket úgy is megkaphatjuk, hogy az év eleji értéket megszorozzuk 1,06-dal.

Ki kell tehát számítanunk az

$$500\,000 \cdot \underbrace{1{,}06 \cdot 1{,}06 \cdot \ldots \cdot 1{,}06}_{10 \text{ tényező}} = 500\,000 \cdot 1{,}06^{10}$$

értéket, ami egész forintra kerekítve 895 424 Ft.

Az eredeti összeg tehát nem duplázódna meg.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Számológép segítségével próbáljunk becslést adni arról, hogy legalább mekkora kamatláb esetén duplázódna meg 10 év alatt a kezdeti 500 000 Ft-os tőke!

Megoldás

Meg kell oldanunk az $500\,000 \cdot x^{10} = 1\,000\,000$ vagy az ezzel egyenértékű $x^{10} = 2$ egyenletet. Ezt egyelőre csak próbálgatással tudjuk megtenni. Az x értékének 1,07 körüli, de ennél kissé nagyobb számnak kell lennie.

$1{,}07^{10} \approx 1{,}967$, $1{,}08^{10} \approx 2{,}159$, vagyis 7%-os kamatlábnál még nem, de 8%-osnál már több mint duplájára nőne az eredeti összeg.

Próbáljuk meg a 7,5%-os kamatlábat is: $1{,}075^{10} \approx 2{,}061$.

További próbálkozásokkal azt kapjuk, hogy kb. évi 7,2%-os kamatos kamat mellett duplázódik meg a kezdeti összeg 10 év alatt. A keresett legkisebb megfelelő kamatlábat csak újabb próbálkozásokkal tudnánk pontosabban megadni.

2. Számológép segítségével adjunk becslést arra, hogy évi 6%-os kamatláb mellett legalább hány év alatt duplázódna meg a kezdeti 500 000 Ft-os tőke!

Megoldás

Meg kell oldanunk az $500\,000 \cdot 1{,}06^{x} = 1\,000\,000$ vagy a vele egyenértékű $1{,}06^{x} = 2$ egyenletet. Egyelőre ezt is csak próbálgatással tudjuk megoldani. Az x értéke nyilvánvalóan egy 10-nél nagyobb egész szám. $1{,}06^{11} \approx 1{,}898$, $1{,}06^{12} \approx 2{,}012$, azaz 11 év alatt még nem, de 12 év alatt már több mint duplájára nőne az eredeti összeg.

ELMÉLET

Bankbetétek esetében a *tőke*, a *kamatláb* és az *idő* játszik szerepet.

Ha A forintot n évre (ciklusra) kötünk le p%-os kamatláb esetén, akkor a megnövekedett összeget az $A_n = A\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ képlettel számíthatjuk ki.

Ha A-t és p-t ismerjük, akkor itt egyszerű hatványozási és szorzási feladatról van szó. Ha azonban az n-et vagy a p-t keressük, akkor egyelőre kísérletezésre kell szorítkoznunk.

FELADAT

1. 600 ezer forintot fektettünk be 3 évre, évi 6,5%-os kamatos kamatra.

a) Három év után mennyivel nőtt a befektetett pénzünk?

b) A 3 év eltelte után kivesszük a pénzünket, s ekkor 15% kamatadót számolnak fel. Ez azt jelenti, hogy a kamat (növekmény) 15%-át adóként kell befizetni az államnak. Ezt csak akkor számolják fel, amikor kivesszük a pénzt, addig a kamatozást nem befolyásolja. Mennyi pénzt kapunk kézhez, ha nincs más költség?

2. A benzin árát 5-ször egymás után felemelték úgy, hogy az új ár minden alkalommal az előző ár 106%-a lett.

a) Hányszorosára nőtt a benzin ára az első áremelés előtti árhoz viszonyítva?

b) Hány százalékkal nőtt a benzin ára az első áremelés előtti árhoz viszonyítva?

3. Hány százalékos kamatos kamat esetén nőne 10 év alatt az eredeti tőke

a) a másfélszeresére;

b) a kétszeresére;

c) a háromszorosára?

Számológéped segítségével adj minél jobb becslést!

4. Írd fel egyetlen hatványként!

a) $1{,}06^2 \cdot 1{,}06^3$; $\quad \dfrac{1{,}2^5}{1{,}2^2}$; $\quad 10^2 \cdot 0{,}7^2$

b) $\dfrac{7^5 \cdot 7^6}{7^3}$; $\quad (2^3)^3$

5. Írd fel egyetlen hatványként! ($a \neq 0$ és $y \neq 0$)

a) $x^5 \cdot x^3$; $\quad \dfrac{y^8}{y^3}$; $\quad a^3 \cdot b^3$

b) $\dfrac{a^2 \cdot a^6}{a^5}$; $\quad (c^4)^2$; $\quad (x^5)^2 \cdot (x^3)^4$

HÁZI FELADAT

1. Befektettünk 1,5 millió forintot.

a) Ha minden évben 18%-os gyarapodást érünk el az előző évi állományhoz képest, akkor 5 év alatt mennyire szaporodik fel a tőkénk?

b) Legalább hány százalékos éves gyarapodás esetén garantált az, hogy 5 év alatt megduplázódik a tőkénk? Használd a számológépedet!

c) Ha minden évben 18%-os gyarapodást érünk el, akkor hány év kell ahhoz, hogy a tőkénk megháromszorozódjék? Számológéped segítségével keresd meg a választ!

2. **a)** Hány év alatt nőne kétszeresére a pénzünk éves 7,5%-os kamatláb esetén?

b) Ha a pénzünk kivételekor 16% kamatadót kell fizetni az államnak, akkor hány év után duplázódna meg a pénzünk, éves 7,5%-os kamatláb esetén?

3. A Földnek 1830-ban körülbelül 1 milliárd lakosa volt. A népesség növekedését egy matematikai modell évi 1,1% körüli értéknek feltételezi. A modell szerint hány lakosa volt a Földnek

a) 1900-ban; **c)** 1960-ban;

b) 1930-ban; **d)** 1990-ben?

Vesd össze a modellt a valósággal!

RÁADÁS

Folytassuk az órai első feladatot! 600 ezer forintot fektetünk be, évi 6,5%-os kamatos kamatra. A pénz kivételekor 15% kamatadót vonnak le az állam számára. Legalább hány teljes évig kell a bankban tartani a pénzt, ha azt szeretnénk, hogy a kézhez kapott összeg több legyen, mint a befektetett tőke kétszerese, ha nincs más költség?

43 Növekedés és fogyás

BEVEZETŐ

Részlet egy újságcikkből: „A XX. század utolsó két évtizedében a személyi számítógépek árának csökkenésével az eladott darabszám robbanásszerű növekedésnek indult. A 80-as évek közepétől kezdődően a világon használatban lévő személyi számítógépek száma évente mintegy 16%-kal nőtt. Az utóbbi években azonban lassulni látszik a növekedés, a 2010-es adat (mintegy 1,4 milliárd darab) már erősen elmarad a várakozásoktól…”

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. 1990-ben körülbelül 100 millió darab számítógépet használtak a világon. Számítsuk ki a számítógépek várt darabszámát 2010-ben! Csakugyan elmarad a valós adat a várakozástól?

Megoldás

A számítógépek N darabszámát (millió darabban) az $N(t) = 100 \cdot 1{,}16^t$ képlettel számíthatjuk ki, ahol t az 1990 óta eltelt évek száma. 2010-ben, tehát 20 évvel később, $N(20) = 100 \cdot 1{,}16^{20} \approx 1946$ millió, azaz körülbelül 1,946 millárd számítógépet várnánk. A tényleges 1,4 milliárd ettől valóban jócskán elmarad.

2. Megközelítőleg hány millió számítógépet használhattak az 1988-as évben?

Megoldás

1988-hoz képest 2 év telt el 1990-ig. Jelöljük x-szel, hogy hány millió darab számítógép lehetett 1988-ban.

$100 = x \cdot 1{,}16^2$. Ebből $x = \frac{100}{1{,}16^2} \approx 74{,}3$ millió darab.

Megjegyzés: Úgy is gondolkodhattunk volna, hogy ha egy esemény 2 évvel korábban volt, akkor t helyére (-2)-t helyettesítünk.

FELADAT

1. Már korábban tanultuk: $2^{-1} = \frac{1}{2}$; $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$.
Írd fel közönséges tört alakban!

a) 2^{-3}; 3^{-3}; 4^{-2}; 18^{-1}

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$; $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$

2. Egy vírusos járvány során a betegség többnyire egyhetes lefolyása alatt minden beteg átlagosan további 3 személyt fertőz meg, de aki egyszer átesik a betegségen, annál kialakul a védettség, így többször már nem fertőződik meg. A járvány egy adott hetében 2430 beteget regisztrálnak.

a) Hány betegre kell felkészülni a mostantól számított 4. héten?

b) Hány beteg volt 4 héttel ezelőtt?

KIDOLGOZOTT FELADAT

3. Egy új autó az első 3 évben évente átlagosan 20%-ot veszít az előző évi értékéből, majd ezután az éves csökkenés mértéke 12% körüli szintre változik.

a) Mennyit érhet most a család 9 éves autója, amit 6 évvel ezelőtt 3 évesen, 2,5 millió forintért vettek?

b) Mennyibe kerülhetett a kocsi újonnan?

Megoldás

a) Az éves 12%-os értékvesztés azt jelenti, hogy az autó értéke minden évben az előző évi érték 88%-a, vagyis 0,88-szorosa. Egy t éve vásárolt autó értékét ezek szerint az $E(t) = A \cdot 0{,}88^t$ képlettel számolhatjuk ki, ahol A az autó vásárláskori értéke. Esetünkben ez $E(6) = 2\,500\,000 \cdot 0{,}88^6 \approx 1\,161\,000$ forint.

b) Most a vásárlás időpontjához képest 3 évvel *korábbi* eseményre kérdezünk, ezért $t = -3$. A képlet alapján $E(-3) = 2\,500\,000 \cdot 0{,}8^{-3} \approx 4\,883\,000$ volt az autó értéke újonnan.
Másképp is számolhatunk: ha az új autó értéke x Ft, akkor háromévesen $x \cdot 0{,}8^3$ Ft-ot ér. Az
$x \cdot 0{,}8^3 = 2\,500\,000$
egyenletet megoldva
$x \approx 4\,883\,000$ Ft.

FELADAT

3. Tóth úr egy 3,5 millió forintos új autó vásárlását fontolgatja.

a) Hány forintot veszít az értékéből 3 év alatt az autó, ha elfogadjuk, hogy értéke minden évben az előző évi értékének 20%-ával csökken?

b) Ha Tóth úr egy („márkásabb”) 4 éves használt autót venne 2,5 millió forintért, akkor ennek hány forinttal csökkenne az értéke 3 év alatt (feltételezve, hogy az autó értéke minden évben az előző évi értékének 12%-ával csökken)?

c) Mennyi lehetett a b)-beli használt autó értéke új korában, ha 3 éves koráig évente 20%-kal, majd azt követően évente 12%-kal csökkent az értéke, s jelenlegi ára 2,5 millió Ft?

4. Zsebszámológép használata nélkül állapítsd meg, melyik érték nagyobb, mint 1, melyik kisebb, mint 1!

a) $1{,}89^5$; $0{,}94^6$; $1{,}45^{-2}$; $0{,}99^{-3}$

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-6}$; $\left(\frac{7}{6}\right)^{-5}$; $\frac{1{,}3^{-4}}{1{,}4}$; $(0{,}7^{-5})^{-2}$; $\frac{1{,}2}{0{,}8^9}$

5. Egy tartályban 63 liter 90%-os alkohol van. Kiöntik a harmadrészét, és vízzel pótolják.

a) Hány liter tiszta alkohol volt eredetileg a keverékben, és mennyi maradt az eljárás végén?

b) Hány liter tiszta alkohol lesz a keverékben, ha ezt az eljárást 12-szer végzik el egymás után?

HÁZI FELADAT

1. Egy ravasz üzlettulajdonos a kezdetben 1000 Ft-os nadrág árát hetente az előző heti ár 5%-ával növeli, gondolván, hogy ezt úgysem veszik észre. Az alább megadott táblázat segítségével vizsgáld meg, hogy hányszorosára nőtt, illetve mennyivel nőtt a nadrág ára az eredeti 1000 forintos árhoz képest! A füzetedben dolgozz!

Ennyi hét után	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
Ennyiszeresre nőtt az ár				$\approx 2{,}65$						
Ennyivel nőtt az ár (Ft)		≈ 630								

2. Számolj zsebszámológéppel! Mennyi a 0,9-nek a hatodik, a hatvanadik és a hatszázadik hatványa?

3. Írd fel egyetlen hatványként!

a) $5^{-3} \cdot 5^6$; $\frac{5^{-3}}{5^6}$; $(3^{-5})^2$

b) $\frac{7^{-5} \cdot 7^4}{7^2}$; $\frac{3^{-4}}{3^2 \cdot 3^{-5}}$; $(2^{-4})^3 \cdot (2^7)^2$

44 Számok n-edik gyöke

KIDOLGOZOTT FELADAT

Legalább hány százalékos növekedést kell évente mutatnia annak a befektetésnek, amivel

a) 5; **b)** 10

év alatt meg akarjuk háromszorozni a T forintnyi tőkénket?

Megoldás

Ha évi p%-os a növekedés, akkor minden évben $\left(1+\frac{p}{100}\right)$-szorosára nő az év eleji összeg. Jelöljük q-val az $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ számot! Ekkor 5 év alatt q^5-szeres, 10 év alatt q^{10}-szeres a növekedés.

a) A $T \cdot q^5 = 3T$, vagy egyszerűbben (a T pozitív számmal osztva) a $q^5 = 3$ egyenletet kell megoldanunk. Azt a számot, amelynek az ötödik hatványa 3, így jelöljük: $\sqrt[5]{3}$. Ennek közelítő értékét sok zsebszámológépen az $\boxed{\sqrt[x]{\ }}$ gomb segítségével kaphatjuk meg az $\boxed{5}$, $\boxed{\sqrt[x]{\ }}$, $\boxed{3}$ jelsorozattal.
(*Megjegyzés:* Egyes számológépek a $\boxed{\sqrt[x]{\ }}$ gomb helyett az $\boxed{x^{1/y}}$ gombot használják. Ezeken a $\boxed{3}$, $\boxed{x^{1/y}}$, $\boxed{5}$ jelsorozatot kell begépelni.)
Az eredmény: $q \approx 1{,}246$. Mivel $q = 1 + \frac{p}{100}$, ezért $\frac{p}{100} \approx 0{,}246$, $p \approx 24{,}6$.
Tehát 5 év alatt évi 24,6%-os növekedés esetén 3-szorozódik meg a befektetett tőke.

b) Hasonlóan: a $q^{10} = 3$ egyenlet megoldása után kaphatjuk meg a tízéves periódusra vonatkozó kamatot. Azt a pozitív számot, amelynek a tizedik hatványa 3, így jelöljük: $\sqrt[10]{3}$. Ennek közelítő értékét zsebszámológépen a $\boxed{1}$ $\boxed{0}$, $\boxed{\sqrt[x]{\ }}$, $\boxed{3}$ jelsorozattal kapjuk meg: $q = \sqrt[10]{3} \approx 1{,}116$. Ebből $\frac{p}{100} \approx 0{,}116$, $p \approx 11{,}6$.
Tehát 10 év alatt évi 11,6%-os növekedés esetén 3-szorozódik meg a befektetett tőke.

ELMÉLET

Definíció: Ha az a pozitív szám, és n az 1-nél nagyobb természetes szám, akkor van egyetlen olyan pozitív szám, amelynek az n-edik hatványa az a.
Ezt a számot az a szám n-edik gyökének nevezzük, és így jelöljük: $\sqrt[n]{a}$ (olvasd: *enedik gyök a*).

Az $\sqrt[n]{a}$ kifejezésben a az *alap*, n a *gyökkitevő*.

Például

$\sqrt[3]{216} = 6$, mert $6^3 = 216$, $\sqrt[5]{0{,}03125} = 0{,}5$, mert $0{,}5^5 = 0{,}03125$.

Megjegyzések

– A $\sqrt[2]{64}$ (második gyök 64) jelölés helyett a megszokott négyzetgyökjelet használjuk: $\sqrt[2]{64} = \sqrt{64} = 8$.
– A $\sqrt[3]{64}$-et harmadik gyök 64-nek olvassuk, de elterjedt a „köbgyök” 64 szóhasználat is: $\sqrt[3]{64} = 4$.

– A negatív számok *páratlan* pozitív egész kitevőjű hatványa negatív szám. Ennek megfelelően értelmezhetjük a negatív számok 1-nél nagyobb páratlan egész kitevőjű gyökét.
Például
$(-7)^3 = -343$, ezért $\sqrt[3]{-343} = -7$.
– A negatív számok *páros* egész kitevőjű gyökét nem értelmezzük, mert a valós számok páros kitevőjű hatványa nem lehet negatív.
Például
$\sqrt[6]{-64}$ értelmetlen, mert nincs olyan valós szám, amelynek a hatodik hatványa (-64) lenne.
– A 0 pozitív egész kitevőjű gyökét is értelmezzük, mégpedig így: $\sqrt[n]{0} = 0$ $(n > 1)$.

FELADAT

1. Add meg a definíció alapján a következő számokat!
a) $\sqrt{100}$; $\sqrt[3]{-1000}$; $\sqrt[3]{1\,000\,000}$; $\sqrt[6]{1\,000\,000}$.
b) $\sqrt[3]{1}$; $\sqrt[3]{-125}$; $\sqrt[10]{1024}$; $\sqrt[4]{625}$; $\sqrt[3]{0{,}001}$; $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$; $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$.

2. Add meg a zsebszámológéped segítségével a következő számok közelítő értékét!
a) $\sqrt[3]{10}$; $\sqrt[3]{60}$; $\sqrt[3]{120}$; $\sqrt[3]{920}$; $\sqrt[3]{1000}$; $\sqrt[3]{10\,000}$.
b) $\sqrt[4]{10}$; $\sqrt[4]{60}$; $\sqrt[4]{120}$; $\sqrt[4]{920}$; $\sqrt[4]{1000}$; $\sqrt[4]{10\,000}$.

3. A bűvös kocka térfogata 216 cm^3. Mekkora a felszíne?

4. Egy víztorony (hidroglóbusz) gömb alakú tartályának teljes térfogata 113 m^3.
a) Mekkora a gömb sugara?
b) Hány m^2 alumínium szükséges a burkolat elkészítéséhez?

(Az R sugarú gömb térfogatát a $V = \frac{4\pi}{3}R^3$, felszínét az $A = 4\pi R^2$ képlettel számíthatjuk ki.)

5. Egy vállalat piaci részesedése minden évben azonos százalékkal csökkenve 8 év alatt a felére esett. Hány százalékos az éves piacvesztés?

HÁZI FELADAT

1. Add meg a definíció alapján a következő számokat!
a) $\sqrt{0{,}49}$; **b)** $\sqrt[4]{256}$; **c)** $\sqrt[3]{27}$; **d)** $\sqrt[5]{3^4 \cdot 3^6}$. **e)** $\sqrt[3]{1}$;

2. Egy kocka térfogata 42 cm^3. Válaszd ki az alábbiak közül a kocka felszínét!
a) $6 \cdot \sqrt{42}\ cm^2$;
b) $6 \cdot \sqrt[3]{42}\ cm^2$;
c) $6 \cdot (\sqrt[3]{42})^2\ cm^2$.

3. Vízi élőhelyek – az akváriumtól a Balatonig – egyik nagy problémája az algásodás. Megfelelő fény- és hőmérsékleti viszonyok mellett az algával borított terület nagysága akár 1-2 nap alatt megduplázódhat. Egy kerti tóban mindennap ugyanannyiszorosára növekedett az algával borított terület nagysága, míg végül a kezdetben 1,5 m^2-en észlelhető alga egy hét alatt teljesen beborította a 26 m^2-es tavat. Számítsd ki, hogy naponta hányszorosára növekedett az algás terület!

45 Racionális számok a kitevőben I.

BEVEZETŐ

Egy korábbi tanulmány szerint a világ népessége 2011. június végén közelítőleg 6,98 milliárd fő volt, és ez a szám évente körülbelül az 1,1%-ával növekszik. Így az ENSZ becslései szerint a földi lakosok száma 2011. október végén lépte át a 7 milliárdot.
Számoljunk!
Ha t-vel jelöljük a 2011. június vége óta eltelt egész évek számát, akkor a világ népességét az $N(t) = 6{,}98 \cdot 1{,}011^t$ képlettel számolhatjuk (milliárd főben).

2011. június végétől 2011. október végéig azonban csak 4 hónap, azaz $\frac{1}{3}$ év telik el. Vajon használható-e a képlet a $t = \frac{1}{3}$ esetén? Mit jelenthet az, hogy $1{,}011^{\frac{1}{3}}$?

KIDOLGOZOTT FELADAT

A Bevezetőben említett modell szerint egyenlő időtartamok alatt *ugyanannyiszorosára* változik a népesség. Ha egy év alatt 1,011-szeres a növekedés, akkor hányszoros a növekedés $\frac{1}{3}$ év alatt?

Megoldás

Jelöljük x-szel, hogy hányszorosára nő a népesség $\frac{1}{3}$ év alatt. Ekkor a kezdeti népesség $\frac{1}{3}$ év múlva x-szeres, további $\frac{1}{3}$ év múlva már $(x \cdot x)$-szeres, és még további $\frac{1}{3}$ év múlva már $(x \cdot x \cdot x)$-szeres. Egy év alatt háromszor telik el az $\frac{1}{3}$ év, ezért a kezdeti népesség az x^3-szeresére nő.
Ezt kaptuk: $x^3 = 1{,}011$; és ebből: $x = \sqrt[3]{1{,}011} \approx 1{,}0037$.

Megjegyzés

A modell szerint tehát 2011. október végén a Föld népessége $6{,}98 \cdot 1{,}0037 \approx 7{,}006$ (milliárd fő) volt.

A gondolatmenet alapján értelmet adhatunk az $1{,}011^{\frac{1}{3}}$ kifejezésnek: $1{,}011^{\frac{1}{3}} \approx \sqrt[3]{1{,}0037}$.

Ez azt is jelenti, hogy $\left(1{,}011^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 1{,}011$.

ELMÉLET

Definíció: Ha a egy nemnegatív szám, és n egy 1-nél nagyobb pozitív egész szám, akkor $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Például: $32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32} = 2$; $6{,}25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$; $0{,}0016^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{0{,}0016} = 0{,}2$; $0^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{0} = 0$.

FELADAT

1. Számológép nélkül határozd meg a hatványok értékét! Töltsd ki a táblázatot!

$16^{\frac{1}{2}}$	$8^{\frac{1}{3}}$	$1000^{\frac{1}{3}}$	$81^{\frac{1}{2}}$	$81^{\frac{1}{4}}$

2. Add meg az alábbi hatványok és gyökök értékét!

a)

$4^{\frac{1}{2}}$	$0{,}04^{\frac{1}{2}}$	$(17^2)^{\frac{1}{2}}$	$1024^{\frac{1}{10}}$	$0{,}125^{\frac{1}{3}}$

b)

$\sqrt{0{,}01}$	$\sqrt[3]{0{,}008}$	$\sqrt{0{,}81}$	$\sqrt[4]{0{,}0001}$	$\sqrt{1{,}21}$

3. A kerti tavacska felszínét tavirózsák is díszítik. Egy matematikai modell szerint ha kezdetben 8 m^2-es felületet fednek be a tavirózsa levelei, akkor ez a terület hetenként mindig ugyanannyiszorosára, 1,3-szeresére növekszik.

a) Ha a megfigyelés kezdete óta eltelt hetek számát h-val jelöljük, akkor melyik összefüggés felel meg a fentiekben leírt modellnek?

A) $F(h) = 8 \cdot 1{,}3 \cdot h$; C) $F(h) = 8 \cdot (1{,}3 \cdot 7)^h$;

B) $F(h) = 8 \cdot 1{,}3^h$; D) $F(h) = 8 + 1{,}3^h$.

b) Egészítsük ki a modellt azzal a feltételezéssel, hogy a levelek által befedett terület mindennap a k-szorosára növekszik! Ezt a kiegészítést figyelembe véve töltsd ki az alábbi táblázatot a füzetedben!

Eltelt napok száma	0	1	2	3	4	5	6	7
Befedett terület (m^2)	8	$8 \cdot k$						$8 \cdot 1{,}3 =$

c) Mennyi a táblázatban szereplő k értéke?

d) Mekkora a befedett terület a hét egyes napjain?

4. A legtöbb hangszer esetében az egymást követő félhangok magasságának (frekvenciájának) hányadosa állandó. Egy adott alaphang frekvenciájának a nála egy oktávval, azaz 12 félhanggal magasabb hang frekvenciája éppen kétszerese.

a) Hányszorosa az alaphang frekvenciájának a rá következő félhang frekvenciája?

b) Hányszorosa az alaphang frekvenciájának az ún. „kvint” frekvenciája, ha a kvint 7 félhanggal magasabb az alaphangnál?

5. Add meg az alábbi hatványok értékét!

$(7^4)^{\frac{1}{2}}$	$(11^6)^{\frac{1}{3}}$	$(17^2)^{\frac{1}{2}}$	$(23^3)^{\frac{1}{3}}$	$(2^{12})^{\frac{1}{4}}$

HÁZI FELADAT

1. Add meg az alábbi hatványok értékét!

a) $64^{\frac{1}{3}}$; **c)** $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$; **e)** $\sqrt[10]{9^5}$.

b) $0{,}027^{\frac{1}{3}}$; **d)** $(\sqrt{10})^4$; **f)** $1024^{\frac{1}{5}}$

2. Egy egyszerű modell szerint Magyarország népessége a 2000-es évek első évtizedében minden évben az előző évi népesség 0,2%-ával csökkent. A 2011-es népszámlálás adatai alapján 2011. október 1-jén, a népszámlálás „eszmei időpontjában” kerekítve 9 982 000 fő volt.

a) Mutasd meg, hogy a népszámlálástól számított x év elteltével a népesség $9982 \cdot 0{,}998^x$ ezer fő lesz!

b) Feltételezve, hogy a fenti tendencia folytatódott, számítsd ki az ország lakosainak számát 2013. január 1-jén (ezer főre kerekítve)!

3. Bizonyos sípokat megfújva azt hallhatjuk, hogy az alaphangon túl egy vagy több sokkal magasabb hang, az úgynevezett felharmonikus hangok is megszólalnak. (Az alaphangot szokás első felharmonikusnak nevezni.) Az egyvonalas zenei C hang frekvenciája közelítőleg 261,6 Hz. A hozzá tartozó második felharmonikus hang frekvenciája ennek kétszerese, azaz 523,2 Hz, a harmadik felharmonikus hang frekvenciája pedig háromszorosa, azaz körülbelül 784 Hz. Számold ki a számológéped segítségével, hogy hány félhang távolságra található ez a felharmonikus az alaphangtól! Használd az órai 4. feladat eredményét!

46 Racionális számok a kitevőben II.

BEVEZETŐ

Előző órán láttuk, hogy a Föld népességét az $N(t) = 6{,}98 \cdot 1{,}011^t$ képlettel számolhatjuk (milliárd főben), ahol t-vel jelöltük a 2011. június vége óta eltelt évek számát. Vajon mit mond ez az összefüggés a 2011. február végi, $\frac{2}{3}$ év utáni népességszámról? Mit jelenthet a $1{,}011^{\frac{2}{3}}$ kifejezés? Hányszorosára nőtt a modell szerint a Föld népessége 2011. február végére, $\frac{2}{3}$ év elteltével?

Foglaljuk táblázatba, hogyan alakult a világ népessége 2011. június vége és 2012. június vége között!

Időpont	2011. június	2011. október	2011. február	2011. június
Népesség (milliárd fő)	6,98	$6{,}98 \cdot x$	$6{,}98 \cdot x^2$	$6{,}98 \cdot x^3 = 6{,}98 \cdot 1{,}011$

Láttuk, hogy $x = 1{,}011^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1{,}011}$. Február végére tehát x^2-szeresére, azaz $(\sqrt[3]{1{,}011})^2$-szeresére nőtt. A modell szerint ezt a szorzótényezőt jelöljük a $1{,}011^{\frac{2}{3}}$ hatványalakkal. Ezt kaptuk: $1{,}011^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{1{,}011})^2$.

ELMÉLET

Definíció: Ha $a \geq 0$, p és q pedig pozitív egész szám, de $q \neq 1$, akkor az $a^{\frac{p}{q}}$ hatványt így értelmezzük: $a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$.
Vagy másképp: $a^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{a})^p$.

Például: $32^{\frac{3}{5}} = (\sqrt[5]{32})^3 = 2^3 = 8$.

Értelmezzük a negatív törtkitevőjű hatványokat is! Figyeld meg a következő átalakítást: $32^{-\frac{3}{5}} = \left(32^{\frac{3}{5}}\right)^{-1} = \frac{1}{32^{\frac{3}{5}}} = \frac{1}{8}$.

Definíció: A negatív törtkitevőjű hatvány legyen egyenlő az ellentett kitevőjű hatvány reciprokával!

Például: $81^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{81^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{9}$.

FELADAT

1. Számítsd ki a következő hatványokat a törtkitevőjű hatványra adott értelmezés alapján!

a) $25^{\frac{3}{2}}$; **b)** $64^{\frac{3}{2}}$; **c)** $9^{\frac{3}{2}}$; **d)** $27^{\frac{2}{3}}$; **e)** $8^{\frac{5}{3}}$; **f)** $125^{\frac{4}{3}}$.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Igazoljuk, hogy

a) $28^{\frac{1}{3}} \cdot 28^{\frac{1}{3}} = 28^{\frac{2}{3}}$; **b)** $28^{\frac{2}{3}} \cdot 28^{\frac{4}{3}} = 28^2$!

Megoldás

a) $28^{\frac{1}{3}} \cdot 28^{\frac{1}{3}} = \left(28^{\frac{1}{3}}\right)^2$, ami a definíció miatt valóban $28^{\frac{2}{3}}$-nal egyenlő.

b) A törtkitevőjű hatványok definíciója miatt:
$28^{\frac{2}{3}} \cdot 28^{\frac{4}{3}} = \left(28^{\frac{1}{3}}\right)^2 \cdot \left(28^{\frac{1}{3}}\right)^4$.

Egy a szám egész kitevőjű hatványairól tanultuk, hogy $a^2 \cdot a^4 = a^{2+4} = a^6$.

Most $a = 28^{\frac{1}{3}}$.

Ezért $\left(28^{\frac{1}{3}}\right)^2 \cdot \left(28^{\frac{1}{3}}\right)^4 = \left(28^{\frac{1}{3}}\right)^{2+4} = \left(28^{\frac{1}{3}}\right)^6$.

Ez pedig – szintén a definíció miatt – valóban $28^{\frac{6}{3}}$-nal, vagyis 28^2-nel egyenlő.

ELMÉLET

A 9. osztályos tankönyvben egész kitevők esetére fogalmaztuk meg a hatványozás azonosságait.
Bizonyítható, hogy ezek változatlan formában érvényben maradnak a pozitív számok racionális kitevőjű hatványai esetében is (azaz érvényesül az úgynevezett *permanenciaelv*).
Tehát ha $a > 0$, $b > 0$, továbbá m és n racionális számok, akkor

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a^m : a^n = a^{m-n}, \quad (a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m, \quad (a : b)^m = a^m : b^m, \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

Például

$8^{\frac{5}{3}} = (2^3)^{\frac{5}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{5}{3}} = 2^5 = 32$, vagy $6{,}25^{\frac{1}{3}} \cdot 6{,}25^{\frac{1}{6}} = 6{,}25^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 6{,}25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$.

FELADAT

2. Írd fel egyetlen hatványként!

a) $(\sqrt[3]{10})^6$; $\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^6$; $8^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{2}{3}}$; $16^{\frac{3}{2}} \cdot 16^{-1}$

b) $\left(4^{\frac{7}{3}}\right)^{\frac{6}{7}}$; $\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}$; $5^{\frac{5}{7}} \cdot 5^{-\frac{5}{7}}$; $\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}$

3. Figyeld meg a következő átalakításokat:

$\sqrt[15]{7^6} = (7^6)^{\frac{1}{15}} = 7^{\frac{6}{15}} = 7^{\frac{2}{5}} = (7^2)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{7^2}$!

Ennek mintájára írd fel kisebb gyökkitevővel a $\sqrt[8]{6^2}$; $\sqrt[20]{3^{10}}$; $\sqrt[36]{7^{54}}$ számokat!

4. Mutasd meg, hogy az alábbi műveletek eredménye egész szám!

$27^{\frac{4}{3}}$; $81^{\frac{3}{4}}$; $36^{0,4} \cdot 36^{0,6}$; $5^{1,8} \cdot 25^{-0,4}$.

5. Írd a kifejezéseket egyetlen törtkitevős hatvány alakba!

a) $10^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{10^3} \cdot \sqrt[3]{10}$

b) $2^{\frac{-4}{5}} \cdot 4^{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt[10]{0{,}5^4}$

c) $\left(\sqrt[6]{3^{\frac{2}{5}}}\right)^{10}$

HÁZI FELADAT

1. A hatványozás azonosságainak felhasználásával végezd el a következő számításokat!

a) $7^{\frac{2}{5}} \cdot 7^{\frac{8}{5}}$;

b) $\dfrac{0{,}5^{\frac{9}{4}}}{0{,}5^{\frac{5}{4}}}$;

c) $(225 \cdot 196)^{\frac{1}{2}}$;

d) $\left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{1}{4}}$;

e) $\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{2}}$;

f) $4^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{3}}$.

2. Végezd el a következő számításokat, és az eredményt írd egyetlen hatvány formájában!

a) $\sqrt[18]{3^6}$;

b) $\sqrt[4]{3^8}$;

c) $\sqrt[5]{7^2} \cdot 7^{\frac{1}{5}}$;

d) $(\sqrt[3]{5})^9$;

e) $(\sqrt[5]{9})^{\frac{1}{2}}$;

f) $(\sqrt[4]{8})^{\frac{2}{3}}$.

RÁADÁS

A hatványozás azonosságaiból következnek a gyökvonás azonosságai is:

– Ha a és b pozitív szám, n pedig 1-nél nagyobb egész szám, akkor

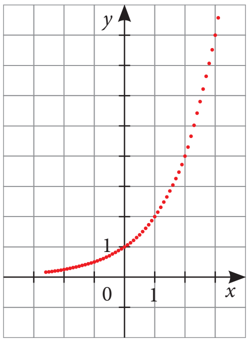
$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad \text{és} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

– Ha a pozitív szám, m és n pedig 1-nél nagyobb egész szám, akkor $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

47 Exponenciális függvények

BEVEZETŐ

Számológép segítségével ábrázoltuk azt az $x \mapsto 2^x$ hozzárendelési szabályú függvényt, amelynek értelmezési tartománya a $\{-2{,}6; -2{,}5; -2{,}4; \dots; 3{,}1\}$ halmaz.



A grafikon 58 pontból áll. A függvény szigorúan növekedő, értékkészlete 58 elemű halmaz, amelynek a legkisebb eleme a $2^{-2{,}6} \approx 0{,}165$, a legnagyobb eleme pedig a $2^{3{,}1} \approx 8{,}574$.

Ha az $x \mapsto 2^x$ hozzárendelési szabállyal másik értelmezési tartományon értelmezett függvényt tekintünk, akkor az előbb megfogalmazott jellemzők közül biztosan nem változik meg az, hogy a kapott függvény *szigorúan monoton növekedő* lesz.

A mi eddigi tapasztalataink csak azt teszik lehetővé, hogy az $x \mapsto 2^x$ hozzárendelési szabályhoz a racionális számok halmazának valamely részhalmazát (esetleg magát a racionális számok halmazát) válasszuk értelmezési tartományként.

Felsőbb matematikai ismeretek birtokában a **hatvány fogalma kiterjeszthető** azokra az esetekre is, amelyekben a **kitevőben irracionális szám** áll. A kiterjesztés megőrzi a szigorú növekedést.

Például

Tudjuk, hogy a π irracionális szám, és $3{,}141 < \pi < 3{,}142$ igaz. A 2^π hatványt úgy **kell** értelmezni, hogy

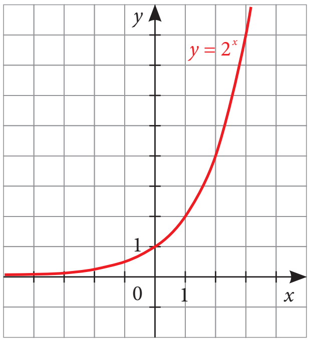
$2^{3{,}141} < 2^\pi < 2^{3{,}142}$ igaz legyen, azaz

$8{,}821 < 2^\pi < 8{,}827$ teljesüljön.

Természetesen nemcsak a példánkban megemlített határokra, hanem **bármely két racionális számra** is **teljesülnie kell**, hogy ha $r_1 < \pi < r_2$ igaz, akkor $2^{r_1} < 2^\pi < 2^{r_2}$ is teljesül.

Számold ki számológép segítségével 2^π értékének 3. tizedesjegyét!

ELMÉLET



A valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto 2^x$ függvényt *kettes alapú exponenciális függvénynek* nevezzük. A bevezetésben említett értelmezés következménye, hogy ennek a függvénynek a grafikonja folytonos vonallal rajzolható.

A *kettes alapú exponenciális* függvény legfontosabb tulajdonságai a következők:

– értelmezési tartománya a valós számok halmaza;
– értékkészlete a pozitív valós számok halmaza;
– szigorúan növekedő;
– nincs legnagyobb és nincs legkisebb értéke;
– nincs zérushelye.

FELADAT

1. Ábrázold 10-10 pont megadásával a következő függvényeket, és add meg a legfontosabb tulajdonságaikat is!

a) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ x \mapsto 3^x$; **b)** $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ x \mapsto 0{,}5^x$; **c)** $h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ x \mapsto 1{,}5^x$;

d) Az ábrázolt függvények segítségével határozd meg, melyik két egész szám közé esnek a következő számok! Zsebszámológéppel ellenőrizd az eredményeket!

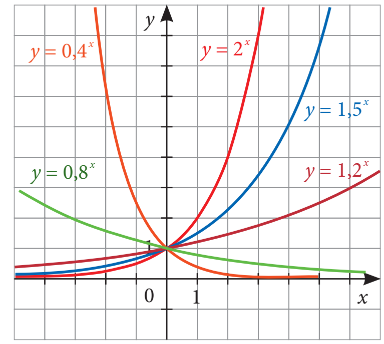
$3^{\frac{7}{8}}$; $3^{-\frac{3}{5}}$; $0{,}5^{-\frac{5}{4}}$; $1{,}5^{\frac{3}{2}}$

ELMÉLET

Definíció: Ha a pozitív szám, de nem egyenlő az 1-gyel, akkor a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto a^x$ hozzárendelési szabályú függvényt a alapú *exponenciális függvénynek* nevezzük.

Az exponenciális függvények fontos tulajdonságai:

- értékkészletük a pozitív valós számok halmaza;
- szigorúan monoton függvények: ha $a > 1$, akkor az exponenciális függvény szigorúan növekedő, ha $0 < a < 1$, akkor szigorúan csökkenő;
- nincs szélsőértékük;
- nincs zérushelyük.



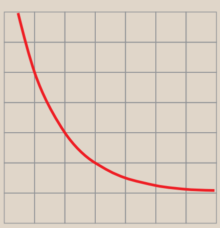
Megjegyzés

Az $x \mapsto 1^x$ függvény mindegyik függvényértéke 1, tehát állandó függvény. Az exponenciális függvények szinte minden lényeges tulajdonságukban különböznek ettől a függvénytől. Emiatt – bár formailag elfogadható lenne – ezt a függvényt nem soroljuk az exponenciális függvények közé.

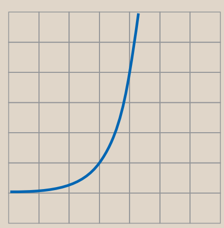
FELADAT

2. Az alábbi ábrákon három exponenciális függvény grafikonja látható. Rajzold be a koordinátatengelyeket, és add meg a függvények hozzárendelési szabályát, ha a rajzokon a négyzetháló négyzeteinek oldalhossza 1 egység!

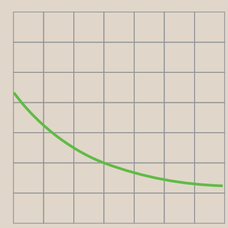
a)



b)



c)



3. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a függvényeket!

$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ x \mapsto \left(\frac{3}{4}\right)^x$, $\quad g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ x \mapsto \left(\frac{4}{3}\right)^x$, $\quad h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ x \mapsto \left(\frac{3}{4}\right)^{-x}$, $\quad k\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ x \mapsto \left(\frac{4}{3}\right)^{-x}$

HÁZI FELADAT

1. Adott az $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ x \mapsto 0{,}25^x$.

a) Számítsd ki a következő függvényértékeket!
$f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(-5)$, $f(5)$.

b) Milyen kapcsolat van az $f(a)$ és az $f(-a)$ függvényértékek között?

c) Ábrázold az f függvényt!

d) Olvasd le a függvénygrafikonról a $0{,}25^x = 3$ egyenlet megoldását! Ellenőrizd a megoldásodat számológép segítségével!

2. A hatványozás azonosságainak felhasználásával végezd el a következő számításokat:

a) $\left(64^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}$ **b)** $5^{\frac{2}{5}} \cdot 5^{\frac{2}{3}}$ **c)** $(169 \cdot 81)^{\frac{1}{2}}$

3. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a megadott exponenciális függvényeket!

$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ x \mapsto 3^x$,

$g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^x$,

$h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ x \mapsto 3^{-x}$

Megoldásaidat függvényábrázoló programmal is ellenőrizheted.

48 Exponenciális folyamatok

BEVEZETŐ

A korábbiakban vizsgáltuk, hogy a bankba tett pénzünk mennyisége hogyan „függ az időtől", illetve megnéztük azt is, hogyan változik a Föld népessége „az idő függvényében". Az időben lejátszódó folyamatok matematikai leírásakor általában olyan függvényeket alkalmazunk, amelyeknek az értelmezési tartománya a folyamat lejátszódása közben múló idő mérőszámát tartalmazza.

Például ha a bankba tett 250 ezer forint évi 4%-os kamatos kamattal gyarapszik, akkor t év múlva a bankszámlánkon lévő pénz mennyisége $250 \cdot 1{,}04^t$ ezer forint lesz. Ebben az esetben a $t \mapsto 250 \cdot 1{,}04^t$ hozzárendelési szabállyal megadott függvényről van szó, amelynek értelmezési tartománya a természetes számok halmazának egy részhalmaza. Mivel a szóban forgó függvénynél az $x \mapsto 1{,}04^x$ növekedő exponenciális függvény a kiindulási alap, ezért azt szoktuk mondani, hogy a bankba tett pénz *az idő múlásával exponenciálisan növekszik* (ha a kamatfeltételek nem változnak).

ELMÉLET

Ha egy mennyiség időbeli változását a $t \mapsto N_0 \cdot k^t$ ($N_0, k > 0, k \neq 1$) hozzárendelési szabályú függvény adja meg, akkor azt mondjuk, hogy a mennyiség exponenciálisan változik az időben. Ha a függvény növekedő, akkor a vizsgált mennyiség exponenciálisan növekszik, ha a függvény csökkenő, akkor exponenciálisan csökken az időben.

Az N_0 számot **kezdeti érték**nek is szokás nevezni, ez adja meg ugyanis a $t = 0$ helyen (például időbeli változások felírásakor a vizsgálat kezdetén) felvett értéket. A k számot **növekedési tényező**nek szoktuk nevezni, ez időbeli változások esetén szemléletesen azt adja meg, hogy egységnyi idő elteltével hányszorosára változik a vizsgált mennyiség.

Ha $1 < k$, akkor a fenti hozzárendeléssel megadott exponenciális függvényünk szigorúan növekvő.
Ha $0 < k < 1$, akkor a fenti hozzárendeléssel megadott exponenciális függvényünk szigorúan csökkenő.

Például
$E(t) = 0{,}38 \cdot 1{,}22^t$ egy exponenciálisan növekedő folyamatot jellemez.
$F(t) = 5{,}67 \cdot 0{,}79^t$ egy exponenciálisan csökkenő folyamatot jellemez.
$G(t) = 3{,}8 \cdot 1{,}25^{-t}$ egy exponenciálisan csökkenő folyamatot jellemez, ugyanis $1{,}25^{-t} = (1{,}25^{-1})^t = 0{,}8^t$.

FELADAT

1. Exponenciálisan növekedő vagy csökkenő folyamatot írnak le a következő hozzárendelések? Mennyi a növekedési tényező?

a) $t \mapsto 4^t$;
b) $t \mapsto 4^{-t}$;
c) $t \mapsto 4^{2t}$;
d) $t \mapsto 4^{\frac{t}{2}}$.

2. Exponenciálisan növekedő vagy exponenciálisan csökkenő folyamatot írnak-e le a következő hozzárendelések? Mennyi a kezdeti érték és a növekedési tényező?

a) $t \mapsto 6{,}2 \cdot 1{,}15^t$;
b) $t \mapsto 6{,}2 \cdot 1{,}15^{-2 \cdot t}$;
c) $t \mapsto 10^{23} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4 \cdot t}$;
d) $t \mapsto 6 \cdot 10^{23} \cdot 2^{3 \cdot t}$;
e) $t \mapsto 3{,}8 \cdot 0{,}8^{-t}$;
f) $t \mapsto 2{,}1 \cdot 5^{-1{,}2 \cdot t}$.

3. Az osztódással szaporodó baktériumok száma – rövid alkalmazkodási periódus után, és mindaddig, amíg ezt a környezet lehetővé teszi – exponenciális növekedést mutat.

Egy 1 ml-es laboratóriumi mintában a kutatók egy adott időpontban körülbelül 120 millió baktériumot számoltak, egy óra múlva 180 milliót.

a) Írj fel egy olyan képletet, amely az első mérés idejétől eltelt idő függvényében megadja a baktériumok számát!

b) Hány baktérium volt ebben a tenyészetben az első mérés után 3 órával, illetve fél órával?

c) Hány baktérium volt ebben a tenyészetben az első mérés előtt 3 órával?

4. Bár Magyarország lakosainak számáról a 2001-es és a 2011-es népszámlálás közötti időszakban nem állt rendelkezésünkre teljesen pontos adat, azonban egy modell szerint szerint az ország lélekszáma az adott időszakban minden évben az előző évi szám 0,2%-ával csökkent. Az alábbi állítások közül válaszd ki az(oka)t, amely(ek) *elméletileg* helyesen becsli(k) a 2006-os adatot! A helytelen számítások esetében magyarázd meg, mi a hiba!

A) 2001-től 2006-ig a népesség évente 0,2%-kal, azaz összesen 1%-kal csökkent.

B) A népesség minden évben az előző évi 0,998-szerese, a 2006-os lélekszám tehát a 2001-es adat $0{,}998^5$-szerese.

C) A 2006-os adatot a 2011-esből $0{,}998^{-5}$-nel való szorzással kaphatjuk meg, mivel 2006 öt évvel 2011 *előtt* volt.

D) Egy adott évben a népesség a következő évi népesség 100,2%-a, ezért a 2006-os lélekszám a 2011-esnek $1{,}002^5$-szerese.

HÁZI FELADAT

1. Exponenciálisan növekedő vagy csökkenő folyamatot írnak le a következő hozzárendelések? Mennyi a kezdeti érték és a növekedési tényező?

a) $t \mapsto 2{,}25 \cdot 5^{-t}$

b) $t \mapsto 3 \cdot 10^{23} \cdot 0{,}4^{-t}$

c) $t \mapsto 0{,}0134 \cdot 0{,}5^{2t}$

d) $t \mapsto 1270 \cdot 0{,}3^{\frac{t}{2}}$

2. Egy exponenciális folyamatban a kezdeti érték 360 000, egy óra múlva ez a mennyiség 345 000.

a) Írj fel egy hozzárendelési szabályt, amely leírja a folyamatot, és amelyben az időt (t) órában mérjük!

b) A kezdeti értéktől számítva 3,5 óra múlva mekkora értéket mérhetünk?

3. Egy város lakossága 1900-ban 20 ezer fő volt, majd 2000-ig a $t \mapsto 20 \cdot 1{,}026^t$ szabálynak megfelelően **exponenciálisan** növekedett (itt t az 1900 óta eltelt évek számát jelöli).

a) Mennyi lett a lakosság 2000-ben?

b) Hány lakosa volt ennek a városnak 1920-ban, 1940-ben, 1960-ban és 1980-ban?

c) Mennyi lett volna a város lakossága 1920-ban, 1940-ben, 1960-ban és 1980-ban, ha a lakosság száma **lineáris** növekedéssel érte volna el az a)-ban kiszámított értéket?

d) Készíts táblázatot és grafikont a b) és a c) feladat eredményei alapján!

e) Akár a grafikon, akár a számológéped segítségével becsüld meg, hogy ezzel a növekedési tényezővel számolva mikor érné el a város lakossága a 400 ezer főt!

49 Felezési idő

BEVEZETŐ

Apa egyik reggel belázasodott. A háziorvos tanácsára délben bevett egy Algopyrint. Este a nagyszülők érkeztek vendégségbe a családhoz, Gyula papa egy üveg bort hozott a felnőtteknek.

– Nem lehet, sajnálom, pedig szívesen megkóstolnám – mondta apa. – Délben bevettem egy Algopyrint, és arra nem szabad alkoholt inni.

– Meddig nem ihatsz bort? – kérdezte kíváncsian a fia.

– Amíg ki nem ürül a gyógyszer a szervezetemből.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. A szervezetünkbe juttatott bizonyos gyógyszerek mennyisége a beviteltől számítva az idő függvényében exponenciálisan csökken. A csökkenés mértéke a gyógyszertől, de a szervezettől is függ.

Egy mérés során megállapították, hogy az Algopyrin hatóanyagának mennyisége a bevételtől számított t óra múlva az $m(t) = m_0 \cdot 0{,}83^t$ függvénnyel írható le, ahol m_0 jelenti a kezdeti mennyiséget. (Ez egy darab Algopyrin tabletta esetén 500 mg metamizol-nátrium.)

a) Vizsgáljuk meg, hogy az 500 mg hatóanyagot tartalmazó tabletta hány óra elteltével veszíti el a hatóanyag-mennyiség felét!

b) Vizsgáljuk meg ugyanezt abban az esetben is, ha a tablettát eltörve csak egy 300 mg hatóanyagot tartalmazó darabot szedünk be!

Megoldás

a) Írjuk fel a problémát egyenlet formájában!

A vizsgált függvény: $m(t) = m_0 \cdot 0{,}83^t$. Azt a t értéket keressük, amelyre igaz, hogy a kezdeti 500 mg hatóanyagból már csak 250 mg maradt meg.

Tehát: $250 = 500 \cdot 0{,}83^t$.

Mindkét oldalt 500-zal osztva: $0{,}5 = 0{,}83^t$.

Határozzuk meg t értékét minél pontosabban!

Néhány t értéket behelyettesítve:

$0{,}83^2 \approx 0{,}689$, $0{,}83^3 \approx 0{,}572$, $0{,}83^4 \approx 0{,}474$,

azaz 4 óra után már csak valamivel kevesebb mint a hatóanyag fele marad a szervezetünkben. Valamikor 3 és 4 óra között feleződik tehát a hatóanyag mennyisége.

Ennél pontosabb eredményt kaphatunk, ha t helyére nem kizárólag egész számokat, hanem az előző becsléshez közeli racionális számokat helyettesítünk be. Erről egy táblázatot is készíthetünk:

t	3,5	3,6	3,7	3,8
$0{,}83^t$	0,521	0,511	0,502	0,493

A táblázat alapján nagyjából 3,8 óra a feleződéshez szükséges idő. További közelítést is végezhetünk:

t	3,71	3,72	3,73
$0{,}83^t$	0,501	0,500	0,499

Tehát három jegy pontossággal azt mondhatjuk, hogy a bevételtől számítva 3,72 óra elteltével ürül ki a szervezetből a hatóanyag fele.

b) A kezdeti érték ezúttal 300 mg. A megoldandó egyenletünk: $150 = 300 \cdot 0{,}83^t$. Az egyenlet mindkét oldalát 300-zal osztva ismét a $0{,}5 = 0{,}83^t$ egyenlethez jutunk. A táblázattal tehát már nem is kell bajlódnunk, hiszen ennek továbbra is $t \approx 3{,}72$ óra a megoldása.

Vegyük észre, hogy a $0{,}5 = 0{,}83^t$ egyenlet közvetlenül is felírható a feladatból. A függvényünk hozzárendelési szabályában a $0{,}83^t$ érték éppen azt jelenti, hogy *ennyiszeresére* változott t idő elteltével a kezdeti hatóanyag mennyisége. Mi azt a t értéket keressük, amikor ez a változás „feleződés”, tehát 0,5-szeres változás. Ezt fejezi ki a fent leírt egyenlet.

Kijelenthetjük tehát, hogy függetlenül a kezdeti érték mennyiségétől a hatóanyag feleződéséhez szükséges idő 3,72 óra. Ezt az időtartamot a hatóanyag **felezési idejének** szoktuk nevezni.

FELADAT

1. **a)** Számold ki, hogy ha apa pontban délben vette be az Algopyrint, akkor a hatóanyag hány %-a volt még a szervezetében este hét órakor!

b) Hány óra elteltével csökken a hétórai mennyiséghez képest felére a hatóanyag?

c) Körülbelül mikor marad 5 mg-nál kevesebb hatóanyag a szervezetben?

d) Az eredeti, 500 mg mennyiségű hatóanyaghoz viszonyítva mennyi idő alatt csökken a hatóanyag mennyisége a nyolcadára, tizenhatodára?

2. Egy szerszámgép értéke exponenciálisan csökken, az érték felezési ideje 4,5 év. Hány év alatt csökken az értéke az eredetinek a 12,5%-a alá?

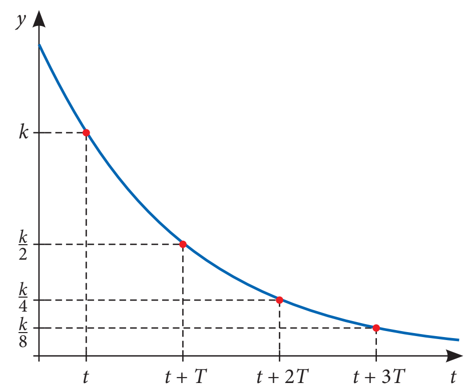
ELMÉLET

Az időben exponenciálisan csökkenő mennyiségeknél gyakran használt fogalom a *felezési idő*. Ez azt az időtartamot jelenti, amely alatt a mennyiség értéke a kezdeti érték felére csökken. A felezési időt legtöbbször T-vel jelölik. Tanulmányozd a mellékelt grafikont!

Megjegyzések

– A T a vizsgált folyamatra jellemző állandó szám, vagyis nem függ a kezdeti értéktől.

– A felezési idő fogalma fontos és gyakran használatos a radioaktivitás vizsgálatakor.



FELADAT

3. Megadunk néhány exponenciális folyamatot leíró hozzárendelési szabályt. A képletekben t-vel jelöljük az első méréstől eltelt időt, órában mérve. Állapítsd meg, mennyi a felezési idő!

a) $f(t) = 340 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$

b) $g(t) = 2{,}4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$

c) $h(t) = 54 \cdot 2^{-\frac{t}{5}}$

4. Az elhalt szerves anyagokban a radioaktív szénatomok (^{14}C) száma az időben exponenciálisan csökken. A radioaktív (szén) ^{14}C izotóp felezési ideje 5730 év. A kezdetben $6 \cdot 10^{12}$ számú ^{14}C atomot tartalmazó anyagban körülbelül hány év alatt csökken a radioaktív szénatomok száma $3{,}75 \cdot 10^{11}$ körüli értékre?

HÁZI FELADAT

1. Egy mennyiség időbeli változását az $M(t) = 58 \cdot 0{,}9^t$ képlet írja le. Mennyi a kezdeti érték [vagyis a $t = 0$-hoz tartozó $M(0)$ értéke], és körülbelül mennyi a felezési idő ebben a folyamatban?

2. A 2011. március 11-i fukushimai atomerőmű-balesetben nagy mennyiségű radioaktív jód (^{131}I) és cézium (^{137}Cs) került ki a környezetbe. Ezek az izotópok stabilabb, már nem radioaktív leányelemekre bomlanak. A bomlás folyamata exponenciális. A jód felezési ideje körülbelül 8 nap, míg a céziumé 30 év.

a) Számold ki, hogy hány nap, illetve hány év elteltével marad meg a kezdeti jód és cézium mennyiségének kevesebb mint 0,5%-a!

b) Hány százaléka maradt meg a kezdeti jód- és céziummennyiségnek négy év elteltével?

3. Egy mennyiség időbeli változását az $M(t) = 28{,}9 \cdot 2^{-\frac{t}{8}}$ képlet írja le. Mennyi a kezdeti érték [$M(0)$] és a felezési idő ebben a folyamatban?

50 A logaritmus fogalma

KIDOLGOZOTT FELADAT

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $x = 2^{10}$ **b)** $2187 = y^7$ **c)** $128 = 2^w$

Megoldás

Mindhárom feladat a hatványfogalomhoz kapcsolódik. Az a) feladatban a *hatvány értéke* az ismeretlen, a b) feladatban a *hatvány alapja*, a c)-ben pedig a *hatvány kitevője*.

a) Mivel $2^{10} = 1024$, ezért $x = 1024$.

b) Egyetlen pozitív szám van, amelynek a hetedik hatványa 2187, mégpedig a $\sqrt[7]{2187}$ vagy más jelöléssel a $2187^{\frac{1}{7}}$. Ha fejből nem tudjuk, hogy $3^7 = 2187$, akkor számológépünk segítségével is megkaphatjuk ugyanezt az eredményt. Tehát $y = 3$.

c) Azt a kitevőt kell megadnunk, amelyre a 2-t hatványozva 128-at kapunk. Tudjuk, hogy $2^7 = 128$, ezért $w = 7$.

ELMÉLET

Azt a kitevőt, amelyre a 2-t hatványozva 128-at kapunk, a 128 *kettes alapú logaritmusának* nevezzük, és így jelöljük: $\log_2 128$. Ezzel a jelöléssel a kidolgozott feladat c) részének megoldása: $w = \log_2 128 = 7$.

Ezt az elnevezést használva: a 64 *kettes alapú logaritmusa* 6, hiszen $2^6 = 64$; a 0,125 *kettes alapú logaritmusa* pedig (−3), hiszen $2^{-3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$. Az új jelöléssel: $\log_2 64 = 6$ és $\log_2 0{,}125 = -3$.

Hasonlóan értelmezhetjük például a *tízes alapú logaritmust* is. A 100 *tízes alapú logaritmusa* 2, hiszen $10^2 = 100$, a 0,000 01 tízes alapú logaritmusa pedig (−5), mert $10^{-5} = 0{,}000\,01$. Az új jelöléssel: $\log_{10} 100 = 2$ és $\log_{10} 0{,}000\,01 = -5$.

FELADAT

1. Írd fel logaritmusjelöléssel is az alábbi egyenletek megoldását!
Például $2^x = 0{,}25$, tehát $x = \log_2 0{,}25 = -2$.

a) $2^x = 32$; **b)** $2^x = \frac{1}{16}$; **c)** $2^x = \sqrt[3]{2}$; **d)** $10^x = 100\,000\,000$; **e)** $10^x = \sqrt[7]{100}$; **f)** $10^x = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

ELMÉLET

Definíció: Legyen $a > 0$; $b > 0$ és $b \neq 1$.
Azt a kitevőt, melyre az a számot emelve a b számot kapjuk, a ***b* szám *a* alapú logaritmusának** nevezzük.
Jele: $\log_a b$. Így olvassuk: „*a alapú logaritmus b*”.

Megjegyzések:

1. A logaritmus tehát minden esetben hatványkitevőt jelöl, a hatvány alapja a logaritmus alapjával azonos.
2. Az $a^x = b$ egyenlet megoldása tehát $\log_a b$ ($a > 0$; $b > 0$ és $b \neq 1$).

3. A definíció ezzel a képlettel is megadható: $a^{\log_a b} = b$, ahol $a > 0$, $a \neq 1$ és $b > 0$.

4. Mit állíthatunk a-ról és b-ről az $\log_a b$ képletben?

- Az 1 számnak minden hatványa 1, ezért az 1-es alapú logaritmust nem értelmezzük.
- Nem értelmeztük a 0 negatív hatványait és a nulladik hatványát sem. Emiatt a 0 alapú logaritmust sem értelmezzük.
- Nem értelmeztük a negatív számok racionális, illetve irracionális hatványait sem, ezért negatív szám sem lehet a logaritmus alapszáma.

A logaritmus alapszáma csak pozitív szám lehet, és nem lehet 1. Tehát: $a > 0$ és $a \neq 1$.

Pozitív szám minden hatványa is pozitív, ezért a **b szám is csak pozitív lehet: $b > 0$.**

FELADAT

2. *Minta:* $6{,}25 = 2{,}5^2$, tehát $\log_{2,5} 6{,}25 = 2$.
Melyek a hiányzó számok?

a) $169 = 13^2$, tehát $\log_{13} \ldots = 2$

b) $343 = 7^3$, tehát $\log_{\ldots} 343 = \ldots$

c) $4 = 16^{\frac{1}{2}}$, tehát $\log_{\ldots} \ldots = \frac{1}{2}$

d) $8 = 2^{\ldots}$, tehát $\log_2 \ldots = 3$

e) $0{,}25 = \ldots^{-1}$, tehát $\log_4 \ldots = \ldots$

f) $\ldots = \ldots^{\ldots}$, tehát $\log_5 625 = 4$

3. Mennyi

a) $\log_3 1$; $\log_3 3$; $\log_3 9$; $\log_3 27$; $\log_3 81$;

b) $\log_3 \frac{1}{3}$; $\log_3 \frac{1}{9}$; $\log_3 \frac{1}{27}$; $\log_3 \frac{1}{81}$?

4. Írd át az alábbi egyenleteket hatványalakba, és számítsd ki, melyik számot jelöli a k betű!

a) $\log_k 25 = 2$; **b)** $\log_5 k = 3$; **c)** $\log_4 4 = k$.

5. Bence megoldotta a 4. feladatot. Eredményei: a) 5 és (−5); b) 125; c) 0. Döntsd el, jók-e a válaszai!

6. Mennyi
$2^{\log_2 5}$; $7^{\log_7 8}$; $9^{\log_9 0{,}6}$; $0{,}4^{\log_{0,4} 7}$?

7. Számítsd ki!

a) $\log_2 2 + \log_2 4 + \log_4 2 + \log_4 4$;

b) $\log_{0,5} 2 + \log_{0,5} 4 + \log_{0,5} 8$;

c) $\log_3 3 \cdot \log_3 2 \cdot \log_3 1$.

HÁZI FELADAT

1. Van-e értelme a $\log_2 a$ jelnek, és ha van, akkor melyik számot jelöli? A füzetedben dolgozz!

a	−8	−2	0	1	2	8	32	64	128	256	1024	2048
$\log_2 a$												

2. Melyik számnak a 3-as alapú logaritmusa a 0, az 1, a 3, a 9?

3. Számítsd ki!

a) $\log_4 4$, $\log_4 1$, $\log_4 2$, $\log_4 \frac{1}{4}$;

b) $\log_9 3$, $\log_9 \frac{1}{3}$, $\log_9 9$, $\log_9 1$, $\log_9 81$;

c) $5^{\log_5 3}$, $6^{\log_6 \frac{2}{3}}$, $0{,}5^{\log_{0,5} 8}$.

4. Számítsd ki!

a) $\log_4 64 + \log_5 \frac{1}{25}$; **b)** $\log_{64} 4 - \log_{25} 5$.

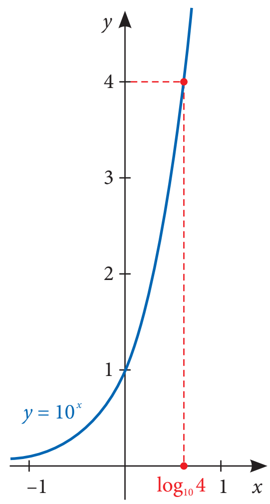
51 A tízes alapú logaritmus használata

BEVEZETŐ

Minden pozitív szám felírható a 10 hatványaként, hiszen a tízes alapú exponenciális függvény értékkészlete a pozitív valós számok halmaza.

Ha például a 4-et akarjuk a 10 hatványaként megadni, akkor szükségünk van a 4-nek a tízes alapú logaritmusára, arra a *kitevőre*, amelyre a 10-et hatványozva 4-et kapunk:
$4 = 10^{\log_{10} 4}$.

A zsebszámológép segítségével egyszerűen meghatározhatjuk egy pozitív szám tízes alapú logaritmusát a log vagy a lg billentyű segítségével.



A számológépen a log 4 = billentyűkombináció után a kijelzőn megjelenő szám: 0,60205999…, tehát $\log_{10} 4 \approx 0{,}60206$, vagy hatványalakban: $4 \approx 10^{0{,}60206}$.

A tízes alapú logaritmusra – a gyakori használat miatt – külön jelölést vezetünk be: a $\log_{10}$ helyett az lg szimbólumot használjuk. Például $\log_{10} 4 = \lg 4 \approx 0{,}60206$.

FELADAT

1. Zsebszámológéped segítségével töltsd ki a táblázat üres helyeit a füzetedben!

a)

k	350	100	$350 \cdot 100$	$350 : 100$
$\lg k$				

b)

p	6200	620	62	6,2	0,62	0,062
$\lg p$						

KIDOLGOZOTT FELADAT

Hány év alatt háromszorozódik meg az évi 15%-os kamatos kamattal gyarapodó tőke?

Megoldás

Ha a tőke értéke $A \neq 0$, és x év alatt a háromszorosára gyarapszik, akkor $A \cdot 1{,}15^x = 3 \cdot A$.

Meg kell oldanunk az $1{,}15^x = 3$ egyenletet, vagyis meg kell mondanunk, hogy mennyi a $\log_{1,15} 3$ kitevő.

Írjuk fel az 1,15-öt és a 3-at is 10 hatványaként!

$1{,}15 = 10^{\lg 1{,}15}$ és $3 = 10^{\lg 3}$. Ezeket az eredeti egyenletbe írva azt kapjuk, hogy $\left(10^{\lg 1{,}15}\right)^x = 10^{\lg 3}$.

A hatvány hatványára vonatkozó azonosságot alkalmazva: $10^{x \cdot \lg 1{,}15} = 10^{\lg 3}$.

A bal oldalon és a jobb oldalon is a 10 egy-egy hatványa áll. Mivel a 10-es alapú exponenciális függvény szigorúan monoton, ezért az egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha a kitevők is egyenlők: $x \cdot \lg 1{,}15 = \lg 3$.

Ebből $x = \dfrac{\lg 3}{\lg 1{,}15} \approx 7{,}86$.

Tehát a tőke 8 év alatt háromszorozódik meg.

Megjegyzés

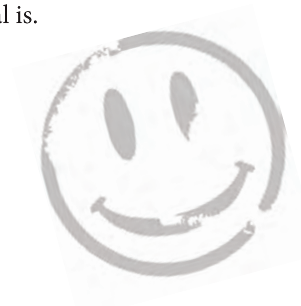
A feladat megoldásából adódik, hogy

$\log_{1{,}15} 3 = \dfrac{\lg 3}{\lg 1{,}15} \approx 7{,}86$, vagyis $1{,}15^{7{,}86} \approx 3$.

ELMÉLET

Bármely alapú logaritmust kiszámíthatunk 10-es alapú logaritmus alkalmazásával is.

Tetszőleges $a > 0$, $a \neq 1$ és $b > 0$ esetén belátható, hogy $\log_a b = \dfrac{\lg b}{\lg a}$.



Például

$\log_3 20 = \dfrac{\lg 20}{\lg 3} \approx 2{,}7268$, tehát $3^{2{,}7268} \approx 20$;

$\log_{0{,}2} 15 = \dfrac{\lg 15}{\lg 0{,}2} \approx -1{,}6826$, tehát $0{,}2^{-1{,}6826} \approx 15$.

FELADAT

2. Tízes alapú logaritmus segítségével számold ki zsebszámológéppel!

$\log_2 5$; $\log_{1{,}05} 0{,}2$; $\log_6 703$; $\log_{4{,}5} 21$

3. Zsebszámológép nélkül határozd meg a pontos értékét!

a) $\log_5 \dfrac{1}{25}$, $\log_{25} 5$, $\log_{\frac{1}{5}} 5$, $\log_{\frac{1}{5}} 25$;

b) $\log_4 \dfrac{1}{64}$, $\log_4 1$, $\log_{\frac{1}{4}} \dfrac{1}{64}$, $\log_{\frac{1}{4}} 1$.

4. Két leckével korábban közelítéssel oldottuk meg a $0{,}83^t = 0{,}5$ egyenletet. Oldjuk meg logaritmus segítségével!

a) Fejezd ki az egyenletből a t ismeretlent 0,83 alapú logaritmussal!

b) Alakítsd át a kapott eredményt úgy, hogy csak 10-es alapú logaritmusok szerepeljenek!

c) Add meg az egyenlet gyökét ezredre kerekítve!

5. Rendezd az egyenleteket olyan alakba, hogy a bal oldalon csak egy hatványalak szerepeljen, majd logaritmus segítségével oldd meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $8{,}5 \cdot 10^x = 212{,}5$;

b) $4{,}55 \cdot 1{,}2^x = 3{,}64$;

c) $4{,}2^{-2x} = 5{,}3$;

d) $6^{x+2} = 30$.

HÁZI FELADAT

1. Számológéped segítségével számítsd ki az alábbiakat!

a) $\log_{100} 50$;

b) $\log_{0{,}1} 2$;

c) $\log_5 8{,}7$;

d) $\lg 5 + \lg 2$.

2. Korábban az $1{,}06^x = 2$ egyenletet közelítéssel oldottuk meg.

a) Fejezd ki az egyenletből a x-et 1,06 alapú logaritmussal!

b) Alakítsd át a kapott eredményt úgy, hogy csak 10-es alapú logaritmusok szerepeljenek!

c) Add meg az egyenlet gyökét ezred pontossággal!

3. Az M mennyiség időben exponenciálisan csökken; a folyamatot az $M(t) = 10^5 \cdot 1{,}24^{-t}$ összefüggéssel írhatjuk le. Számítsd ki, mennyi ebben a folyamatban a kezdeti érték – az $M(0)$ –, és mennyi a felezési idő!

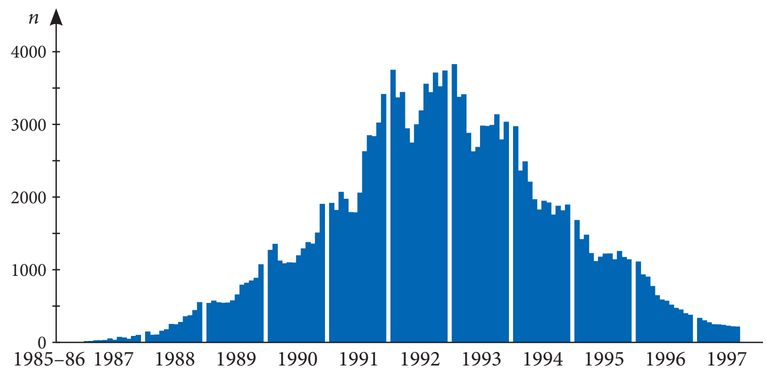
4. Oldd meg az alábbi egyenleteket!

a) $10^{3x} = 8{,}4$;

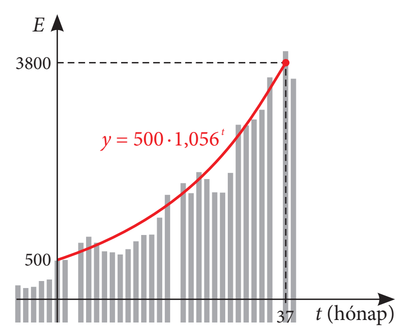
b) $2^{-x} = 17$.

52 Hatvány, gyök, logaritmus

KIDOLGOZOTT FELADAT



Idézet egy cikkből, az angliai marhavészről:
„A történet 1985-ben kezdődött, amikor az első 17 állat megbetegedését jelentették az angol állategészségügyi hatóságok. […] Ekkor még nem gyanakodtak az egész szigetországra kiterjedő járványra, az esetek száma azonban 1988-tól exponenciálisan emelkedni kezdett. […] A diagramon a szivacsos agysorvadásban (BSE) megbetegedett szarvasmarhák számának alakulása látható, Nagy-Britanniában, a járvány kezdetétől (1985–86) 1997-ig. A függőleges oszlopok havi bontásban adják meg a diagnosztizált új esetek számát.” (Forrás: *www.termeszetvilaga.hu/orvosi_nobeldijak/prion.html*)



A havonta diagnosztizált új esetek számát 1988 vége és 1992 eleje között az $E(t) = 500 \cdot 1{,}056^t$ összefüggéssel modellezhetjük. Itt a $t = 0$ esetnek az 1988. decemberi szám felel meg, és t legfeljebb 37 lehet (1992 januárjáig 37 hónap telik el).

a) A modell szerint hány új esetet diagnosztizáltak 1991 januárjában?

b) A modell szerint melyik hónapban diagnosztizáltak 3000 új megbetegedést?

Megoldás

a) 1988 végétől 1991 januárjáig 25 hónap telt el, tehát $E(25) = 500 \cdot 1{,}056^{25} \approx 1950$. A modell szerint 1991 januárjában közelítőleg 1950 új esetet diagnosztizáltak.

b) Meg kell oldanunk a $3000 = 500 \cdot 1{,}056^t$ *exponenciális egyenletet*.
Egyszerűsítés után: $1{,}056^t = 6$, amiből $t = \log_{1{,}056} 6$.
Számológéppel: $\log_{1{,}056} 6 = \dfrac{\lg 6}{\lg 1{,}056} \approx 33$.
A matematikai modellünk szerint 1988 végétől számítva közelítőleg 33 hónap után, vagyis 1991 szeptemberében érhette el a 3000-et az adott hónapban diagnosztizált új megbetegedések száma.

FELADAT

1. Számológép nélkül add meg a következő műveletek eredményét!

a) $\lg 1000 + \lg \sqrt{10} + \lg \sqrt[4]{10} + \lg 0{,}001$

b) $\log_2 0{,}5 - \log_2 \sqrt{2} + \log_2 2^{-3}$

c) $2^{\log_2 5} \cdot 2^{\log_2 10}$

2. **a)** A kidolgozott feladatban megadott matematikai modell szerint az exponenciális szakaszban hány százalékkal nőtt havonta az újonnan diagnosztizált esetek száma?

b) A kidolgozott feladat grafikonja szerint 1992-ben megállt az új esetek számának növekedése. Hány új megbetegedés diagnosztizálását jósolná a matematikai modell 1992 decemberére, 1993 decemberére, illetve 1994 decemberére, ha nem vennénk figyelembe a modell érvényességi körét ($0 \le t \le 37$)?

c) A kidolgozott feladat matematikai modellje szerint melyik hónapban érte el az újonnan regisztrált esetek száma az 1500-at? Hasonlítsd össze a diagramról leolvasható értéket és a kapott eredményt!

3. Magyarország népessége 1980-ban 10,71 millió fő volt, 2010-ben pedig 10 millió. Tételezzük fel, hogy a népesség exponenciálisan csökken.

a) Évente hányszorosra változik a népesség, és ez hány százalékos csökkenést jelent?

b) Ha ilyen ütemben csökken a népesség, várhatóan melyik évben éri el a 9 millió főt?

HÁZI FELADAT

1. A kidolgozott feladatban az $E(t) = 500 \cdot 1{,}056^t$ képlet szerint számítottuk ki a t-edik hónapban újonnan diagnosztizált megbetegedések számát. Hányszorosára nőtt ez a szám az alkalmazott modell szerint

a) 1989 januárja és decembere között;

b) 1990 januárja és decembere között;

c) 1989 januárja és 1990 decembere között?

2. A kidolgozott feladat diagramjának 1992 decemberétől 1996 decemberéig terjedő szakaszát exponenciálisan csökkenőnek feltételezve a folyamatot a $B(t) = 3800 \cdot 0{,}945^t$ összefüggés írja le.

a) Hány új megbetegedést regisztráltak 1995 szeptemberében a modell szerint?

b) Mennyi ebben a folyamatban a „felezési idő”?

3. Számológép nélkül add meg, milyen számot jelentenek a betűk!

a) $\log_2 A = 0$; $\log_2 B = -1$

b) $\log_C 9 = 2$; $\log_D 9 = 0{,}5$; $\log_E 9 = -2$

RÁADÁS

Határozzuk meg a grafikon alapján, hogy milyen összefüggéssel modellezhető a kidolgozott feladatban bemutatott folyamat!
A kidolgozott feladat diagramja alapján az 1988. végi közel havi 500-ról 1992 elejére – azaz 37 hónap alatt – közel havi 3800-ra növekedett az újonnan diagnosztizált esetek száma. Az exponenciális növekedés azt jelenti, hogy minden egyes hónapban az előző havinak ugyanannyiszorosára változott az új esetek száma.
Jelöljük ezt a növekedési tényezőt q-val! Ha az 1988. végi állapot felel meg a $t = 0$ helyzetnek, akkor $E(t) = 500 \cdot q^t$, ahol a t változót hónapokban adjuk meg.

$E(37) = 3800 = 500 \cdot q^{37}$, rendezve: $q^{37} = 7{,}6$. Ebből $q = 7{,}6^{\frac{1}{37}} = \sqrt[37]{7{,}6} \approx 1{,}056$.
A havonta diagnosztizált új esetek számát tehát modellezhetjük az $E(t) = 500 \cdot 1{,}056^t$ összefüggéssel. A képletben a t az 1988 vége óta eltelt hónapok számát jelenti.

53 A logaritmus azonosságai

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy bizonyos algafaj telepének felülete évente megkétszereződik, ha komolyabb környezeti hatások nem érik. Válaszoljuk meg minél egyszerűbben az alábbi kérdéseket:

a) Hány év múlva nő a telep az eredeti méret ötszörösére?

b) Hány év múlva nő a telep az eredeti méret tízszeresére?

c) Hány év múlva nő a telep az eredeti méret ötvenszeresére?

d) Hány év múlva nő a telep az eredeti méret százhuszonötszörösére?

Megoldás

A telep méretét a $T(n) = T_0 \cdot 2^n$ összefüggéssel adhatjuk meg, ahol n az eltelt évek száma.

a) Arra vagyunk kíváncsiak, hogy a 2^n szorzótényező mikor jelent ötszörös növekedést. Tehát meg kell oldanunk a $2^n = 5$ egyenletet. Felírhatjuk logaritmus segítségével is a megoldást: $n = \log_2 5 \approx 2{,}32$. Tehát kb. 2,32 évnek kell eltelnie.

b) Ezúttal a $2^n = 10$ egyenletet kell megoldanunk. A logaritmus segítségével kifejezhető ismét n értéke:

$$n = \log_2 10 = \frac{\lg 10}{\lg 2} \approx 3{,}32.$$

c) Megoldhatjuk a $2^n = 50$ egyenletet is, de az előző két feladat megoldásának ismeretében azonnal megválaszolhatjuk a kérdést. Hiszen tudjuk, hogy 2,32 év elteltével megötszöröződik az algatelep felülete, 3,32 év elteltével pedig megtízszereződik. Ha tehát 2,32 évet várunk, majd ezután még 3,32 évet, akkor a megötszöröződött felület tízszeresre növekedve összességében ötvenszeres méretet jelent a kezdetihez képest, és éppen erre voltunk kíváncsiak.

A fenti gondolatmenet szerint tehát:

$$\log_2 5 + \log_2 10 = \log_2 50\,.$$

d) Ezúttal a $2^n = 125$ egyenletet kellene megoldanunk. Vegyük észre, hogy $125 = 5^3$, tehát háromszor kell eltelnie a megötszöröződéshez szükséges időnek, vagyis a 2,32 évnek. Eszerint körülbelül 6,96 év elteltével nő a felület mérete a kezdeti méret 125-szörösére.

Gondolatmenetünket ezúttal is kifejezhetjük a logaritmus segítségével. Eszerint:

$$\log_2 5^3 = 3 \cdot \log_2 5.$$

ELMÉLET

A logaritmus azonosságainak nevezzük a következő általános összefüggéseket:

Legyen $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $k \in \mathbf{R}$, és az utolsó azonosságban $c \neq 1$.

1. Szorzat logaritmusára vonatkozó azonosság: $\boldsymbol{\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c}$.
2. Hatvány logaritmusára vonatkozó azonosság: $\boldsymbol{\log_a b^k = k \cdot \log_a b}$.
3. Hányados logaritmusára vonatkozó azonosság: $\boldsymbol{\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c}$.
4. Áttérés új alapszámra: $\boldsymbol{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$.

Például:

$\log_2 12 = \log_2 3 + \log_2 4$, $\quad \log_5 3^4 = 4 \cdot \log_5 3$

$\log_4 2/3 = \log_4 2 - \log_4 3$, $\quad \log_3 41 = \dfrac{\log_2 41}{\log_2 3}$

Összetettebb kifejezések logaritmusát is felírhatjuk a megismert azonosságok alapján, például:

$$\lg \frac{3 \cdot 5 \cdot \sqrt{11}}{2 \cdot 7^3} = \lg 3 + \lg 5 + \frac{1}{2} \cdot \lg 11 - \lg 2 - 3 \cdot \lg 7.$$

Az összeg logaritmusára semmilyen azonosság nem vonatkozik. Külön kiemeljük, hogy $\lg(x+y) \neq \lg x + \lg y$. Például $\lg(20+80) = \lg 100 = 2$, ugyanakkor $\lg 20 + \lg 80 \approx 3{,}2041$, tehát $\lg(20+80) \neq \lg 20 + \lg 80$.

FELADAT

1. Számítsd ki számológép használata nélkül, a logaritmus azonosságainak segítségével!

a) $\log_6 2 + \log_6 3$;

b) $\log_6 12 + \log_6 3$;

c) $\log_6 144 - \log_6 4$;

d) $\log_6 8 - \log_6 48$.

2. Ne használj számológépet! Melyik szám 5-ös alapú logaritmusa a

a) $4 \cdot \log_5 2$;

b) $3 \cdot \log_5 \frac{4}{7}$;

c) $6 \cdot \log_5 12 - \log_5 12^4$;

d) $\frac{2}{3} \cdot \log_5 8 - 3 \cdot \log_9 1$?

3. Végezd el a következő számításokat számológép használata nélkül!

a) $\lg 125 + 3 \cdot \lg 2$;

b) $2 \cdot \log_{49} 7 + \log_{49} \frac{1}{7}$;

c) $\log_9 36 - 2 \cdot \log_9 2$;

d) $2 \cdot \log_7 3 - \log_7 63$.

4. Számítsd ki a következő hatványok értékét!

a) $7^{\log_7 2 - \log_7 3}$

b) $5^{2 \cdot \log_5 3 + 0{,}5 \cdot \log_5 4}$

c) $25^{\log_5 7}$; $5^{\log_{25} 16}$

5. Számológép használata nélkül határozd meg:

$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 = ?$

HÁZI FELADAT

1. Mennyi a következő számok 10-es alapú logaritmusa?

a) 1 000 000; 100 000; 1000; 100; 10; 1; 0,1; 0,001.

b) $\sqrt{10}$; $\sqrt{1000}$; $\sqrt[3]{10}$; $\sqrt[3]{100}$; $\sqrt[5]{10}$; $\sqrt[5]{1000}$.

2. Ne használj számológépet! Melyik szám 6-os alapú logaritmusa a

a) $0{,}5 \cdot \log_6 81$; $3 \cdot \log_6 \left(\frac{1}{2}\right)$

b) $4 \cdot \log_6 11 - \log_6 11^3$

c) $\log_6 4 + \log_6 2 + \log_6 3$

d) $\log_6 1 \cdot \log_6 13$?

3. Mennyi a V, ha

a) $\lg V = \lg 8 - \lg 2$;

b) $\lg V = 3 \cdot \lg 2 + \lg 10\,000$;

c) $\lg V = 1 - \lg 2$;

d) $\lg V = \frac{\lg 8}{\lg 2}$;

e) $\lg V = \frac{\lg 27}{3}$;

f) $\lg V = \lg 4 + \lg \pi - \lg 3 + 3 \cdot \lg R$, ahol $R > 0$?

EMELT SZINT

Igazoljuk számológép használata nélkül, hogy $\log_3 5 + \log_3 10 = \log_3 50$!

Megoldás

$5 \cdot 10 = 50$. Írjuk fel az egyenlőségben szereplő számokat 3-as alapú logaritmus segítségével: $3^{\log_3 5} \cdot 3^{\log_3 10} = 3^{\log_3 50}$.

A hatványozás azonossága szerint a bal oldal átalakítható: $3^{\log_3 5} \cdot 3^{\log_3 10} = 3^{\log_3 5 + \log_3 10}$. Összevetve a két egyenlőséget bal oldaluk megegyezik, ezért a jobb oldaluk is egyenlő. Ez csak úgy teljesülhet, ha a két kitevő egyenlő (az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt), azaz: $\log_3 5 + \log_3 10 = \log_3 50$.

FELADAT

Igazold az előbbi gondolatmenet mintájára, hogy ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $k \in \mathbf{R}$ esetén):

a) $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$;

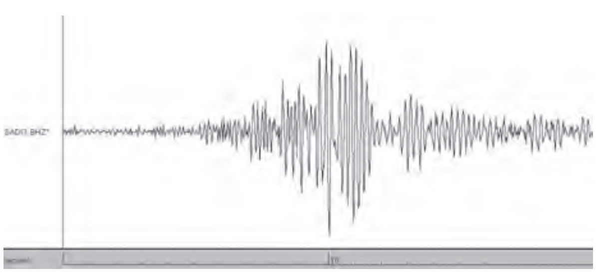
b) $\log_a b^k = k \cdot \log_a b$!

54 Logaritmusfüggvények

BEVEZETŐ

A természetben lejátszódó folyamatok, a fizikai és kémiai tulajdonságok jellemzése szempontjából **nélkülözhetetlen a logaritmus fogalma**. Lássunk erre néhány mindennapi példát!

1. A földrengés erősségét a Richter-skála alapján is szokták jellemezni. A földrengés *magnitúdóját* úgy határozzák meg, hogy a földrengés epicentrumától 100 km-re lévő *szabvány szeizmográf* által rajzolt *szeizmogramban* megmérik a műszer által jelzett legnagyobb kitérést mikrométerben (10^{-6} m-ben), és annak tízes alapú logaritmusát veszik. Ha például a műszer legnagyobb kitérése 1 cm $= 10^4$ mikrométer, akkor a földrengés a Richter-skála szerint $\lg 10^4 = 4$-es erősségű. (A „*seismos*” szó görögül rázkódást, rengést jelent.)
Általában: Ha a szabványos műszer mutatójának legnagyobb kitérése x mikrométer, akkor a földrengés erőssége a Richter-skálán éppen $\lg x$.



2. A kozmetikumok világában, olykor még a „tudományoskodó” reklámokban is találkozunk a pH-érték kifejezéssel. A pH egy olyan szám, mely egy adott oldat savasságát vagy lúgosságát jellemzi. Híg vizes oldatokban a pH-érték az oxóniumion-koncentráció tízes alapú logaritmusának ellentettjével egyenlő, azaz $\mathrm{pH} = -\lg x$, ahol x jelöli a koncentráció értékét (oxóniumion $= H_3O^+$). A tiszta víz pH-ja 7, a savas közegé 7-nél kisebb, a lúgosé 7-nél nagyobb.

3. A hangosság szintjét úgy jellemzik, hogy megadják azt, hogy a vizsgált hangforrás intenzitása hányszorosa a $10^{-12}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$-nek. Ha a hangforrás intenzitása x-szer akkora, mint a $10^{-12}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$, akkor a hangforrás hangossága $\lg x$ bel (B), vagy inkább a szokásos módon megadva $10 \cdot \lg x$ decibel (dB). (W a watt mértékegység rövidítése.)

A fenti és más egyéb gyakorlati problémák teljes áttekintéséhez fontos, hogy ne csak az egyes logaritmusértékeket ismerjük, hanem egyszerre lássuk az összes pozitív számnak egy adott alapú logaritmusát. Ezért vizsgáljuk most a *logaritmusfüggvényeket* is.

FELADAT

1.

a) Mekkora annak a földrengésnek a Richter-skála szerinti erőssége, amelynél a szabvány szeizmográf legnagyobb kitérése 0,5 cm?

b) Hányszor akkora a szabvány szeizmográf legnagyobb kitérése az 5-ös erejű földrengésnél, mint a 4-es erejűnél?

c) Mekkora az oxóniumion-koncentráció abban a vizes oldatban, amelynek a pH-értéke 4-gyel egyenlő?

d) Hány decibel hangosságú az a hangforrás, amelynek intenzitása $1\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$?

2. Tekintsük az $f: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R};\ x \mapsto \log_2 x$ függvényt (a *kettes alapú logaritmusfüggvényt*)!

a) Töltsd ki a táblázat üres mezőit a füzetedben!

x	0,25	0,5	1	2	3	4	8	10	16
$\log_2 x$									

b) Ábrázold a táblázat alapján kapott pontokat, majd vázold az *f* függvény grafikonját!

c) Jellemezd a kettes alapú logaritmusfüggvényt a következő szempontok szerint: értelmezési tartomány, értékkészlet, zérushely, monotonitás, szélsőérték!

ELMÉLET

Ha $a > 0$ és $a \neq 1$, akkor a pozitív valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto \log_a x$ hozzárendelési szabályú függvényt „*a alapú logaritmusfüggvénynek*” nevezzük.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Ábrázold közös koordináta-rendszerben a kettes alapú logaritmusfüggvényt és a kettes alapú exponenciális függvényt! Figyeld meg, milyen kapcsolat van a két grafikon között!

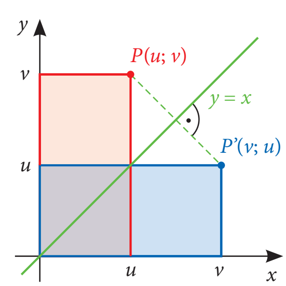
Megoldás

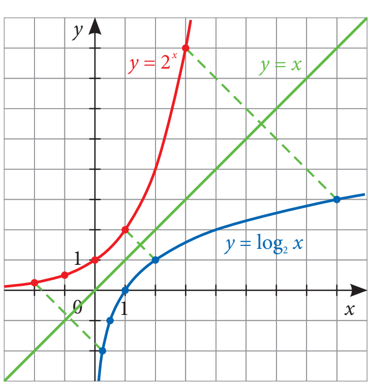
A két grafikon egymás tükörképe. Az $y = x$ egyenesre tükrözve megkaphatjuk a logaritmusfüggvényből az exponenciális függvényt, és viszont.

Először nézzünk néhány pontot táblázatba foglalva:

Pont az exponenciális függvényen	$(-2;\ 0{,}25)$	$(-1;\ 0{,}5)$	$(0;\ 1)$	$(1;\ 2)$	$(3;\ 8)$	$(p;\ 2^p)$
Pont a logaritmusfüggvényen	$(0{,}25;\ -2)$	$(0{,}5;\ -1)$	$(1;\ 0)$	$(2;\ 1)$	$(8;\ 3)$	$(2^p;\ p)$

Ha a koordináta-rendszer egy tetszőleges $P(u;\ v)$ pontját tükrözzük az $y = x$ egyenesre, akkor a két koordináta felcserélésével kapott $P'(v,\ u)$ ponthoz jutunk.





Láthatjuk, hogy a táblázat pontjaira igaz, hogy ha egy $P(u;\ v)$ pont rajta van az exponenciális függvény grafikonján, akkor a $P'(v;\ u)$ pont rajta van a logaritmusfüggvény grafikonján, és viszont. Ez az állítás a grafikonok minden pontjára igazolható, ezáltal bizonyítható, hogy a két grafikon egymás tükörképe.

FELADAT

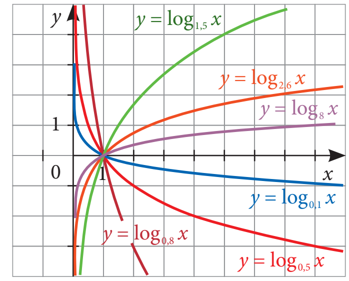
3. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a következő függvényeket:

$f: x \in \mathbf{R},\ x \mapsto 3^x$, $\quad g: x \in \mathbf{R}^+,\ x \mapsto \log_3 x$, $\quad h: x \in \mathbf{R}^+,\ x \mapsto \log_{\frac{1}{3}} x$!

ELMÉLET

Ha az $x \mapsto a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbf{R})$ exponenciális függvény grafikonját tükrözzük a koordináta-rendszer $y = x$ egyenletű egyenesére, akkor az $x \mapsto \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbf{R}^+)$ logaritmusfüggvény grafikonját kapjuk. Ennek alapján a logaritmusfüggvények legfontosabb tulajdonságai a következők:

- értelmezési tartományuk a pozitív valós számok halmaza;
- értékkészletük a valós számok halmaza;
- szigorúan monoton függvények: ha $a > 1$, akkor a logaritmusfüggvény szigorúan növekedő, ha $0 < a < 1$, akkor szigorúan csökkenő;
- nincs szélsőértékük;
- zérushelyük az 1.



Megjegyzés

Ha az *f* függvény grafikonjából a *g* függvény grafikonja az $y = x$ egyenletű egyenesre történő tükrözéssel is megkapható, akkor az *f* és a *g* függvényeket egymás *inverz függvényeinek* nevezzük. Az „*a* alapú exponenciális függvény” inverz függvénye az „*a* alapú logaritmusfüggvény”.

HÁZI FELADAT

1. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a megadott két-két függvényt! A függvények értelmezési tartománya mindegyik esetben a pozitív valós számok halmaza.

a) $x \mapsto \log_2 x$ és $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x$;

b) $x \mapsto \log_3 x$ és $x \mapsto -\log_3 x$;

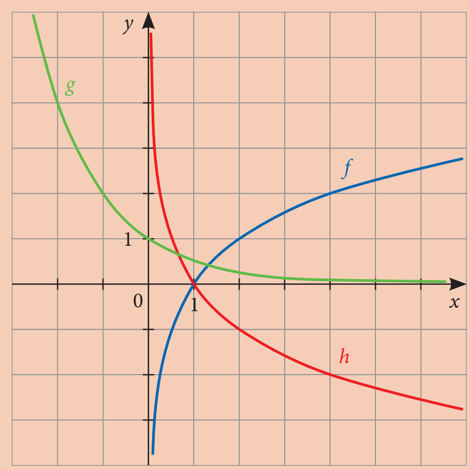
c) $x \mapsto \log_2 (2 \cdot x)$ és $x \mapsto \log_2 \frac{x}{2}$;

d) $x \mapsto \log_{\frac{1}{3}} x$ és $x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

2. Állítsd párba azokat a hozzárendelési szabályokat, amelyek ugyanazt a függvényt adják meg (azonos értelmezési tartomány esetén)!

$x \mapsto \dfrac{\log_2 x}{2}$	$x \mapsto 1 + \log_2 x$
$x \mapsto \log_2 (2x)$	$x \mapsto \log_2 \dfrac{x}{8}$
$x \mapsto 3 + \log_2 x$	$x \mapsto \log_2 (8x)$
$x \mapsto -3 + \log_2 x$	$x \mapsto \log_2 \sqrt{x}$

3. Az ábrán szereplő *f*, *g*, *h* függvények hozzárendelési szabálya: $x \mapsto 0{,}5^x$, $x \mapsto \log_2 x$, $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x$.



a) Állítsd párba a függvények nevét és hozzárendelési szabályát!

b) Melyik kettő inverze egymásnak a megadott függvények közül?

c) Melyik függvénynek van zérushelye, melyiknek van szélsőértéke?

Megoldásaidat függvényábrázoló programmal is ellenőrizheted.

EMELT SZINT

1. Bizonyítsuk be, hogy a kettes alapú logaritmusfüggvény és a kettes alapú exponenciális függvény egymás tükörképe az $y = x$ egyenesre nézve!

Megoldás

Az állítás bizonyításához azt kell megmutatnunk, hogy ha a $P(u;\ v)$ pont rajta van az exponenciális függvény grafikonján, akkor a két koordináta megcserélésével kapott $P'(v;\ u)$ pont rajta lesz a logaritmusfüggvény grafikonján, és ez fordítva is így van.

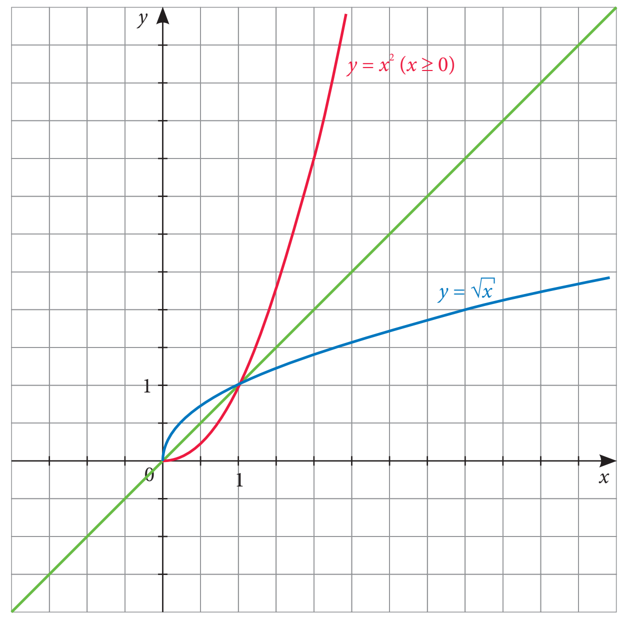
Tekintsük először az exponenciális függvény egy P pontját.

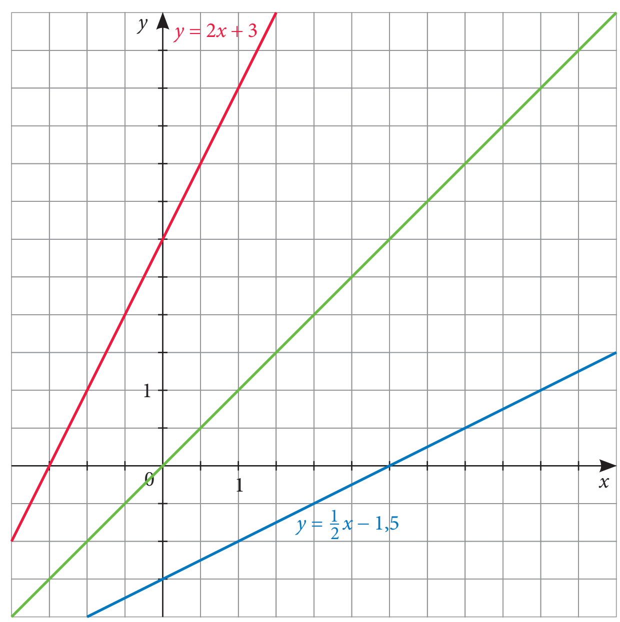
Az exponenciális függvény grafikonjának egyenlete: $y = 2^x$, ezért egy pontjának koordinátái: $P(u;\ 2^u)$. Ennek a P pontnak tükörképe: $P'(2^u;\ u)$. Rajta van-e vajon ez a P' pont a logaritmusfüggvény grafikonján? A logaritmusfüggvény grafikonjának egyenlete: $y = \log_2 x$. A logaritmusfüggvény $x = 2^u$ helyhez tartozó pontjának második koordinátája: $y = \log_2 (2^u)$. A logaritmus definíciója miatt $\log_2 (2^u) = u$. A logaritmusfüggvény egy pontja tehát a $(2^u\ ;\ u)$ pont, ami nem más, mint P'. Az exponenciális függvény egy pontjának tükörképe tehát rajta van a logaritmusfüggvény grafikonján.

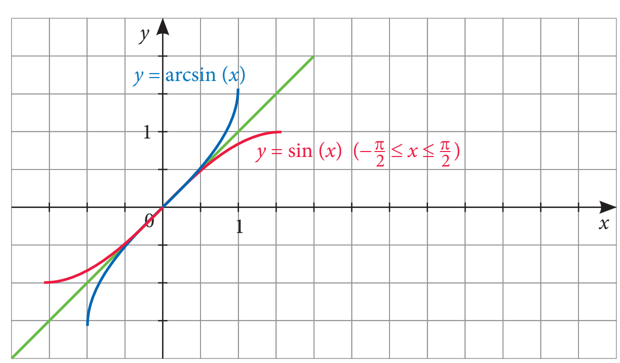
Vizsgáljuk most a másik irányt! A logaritmusfüggvény egy pontja: $Q(u;\ \log_2 u)$. Ennek tükörképe: $Q'(\log_2 u;\ u)$. Rajta van-e ez a Q' pont az exponenciális függvény grafikonján? Az exponenciális függvény $\log_2 u$ helyen felvett értéke: $2^{\log_2 u}$. A logaritmus definíciója szerint $2^{\log_2 u} = u$. Az exponenciális függvény egy pontja a $(\log_2 u;\ u)$ pont, ami nem más, mint Q'. A logaritmusfüggvény egy pontjának tükörképe tehát rajta van az exponenciális függvény grafikonján.
Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

2. Más függvények inverz függvényeit is meghatározhatjuk az előbbi módszer segítségével. Egy függvénynek csak akkor értelmezhető az inverze, ha minden helyettesítési értéket csak egy helyen vesz fel. (Az ilyen függvényeket kölcsönösen egyértelmű vagy injektív leképzésnek szoktuk nevezni.) A valós számok halmazán értelmezett x^2 függvénynek nincs inverze (nem lenne eldönthető például, hogy 9-hez 3-at vagy (-3)-at rendel az inverz függvény), de a $[0;\ \infty[$ intervallumon értelmezett x^2 függvénynek már van, ez pedig a $\sqrt{x}$ -függvény.

Néhány függvény és az inverze:







55 Exponenciális egyenlőtlenségek

KIDOLGOZOTT FELADAT

Tőzsdei elemzők megállapították, hogy egy jelen pillanatban 2000 Ft-ot érő részvény értéke az idővel exponenciálisan növekedett, és ez a tendencia várhatóan egy ideig még folytatódik. A részvény értékének alakulását az $f(x) = 2000 \cdot 1{,}002^x$ képlettel modellezik, ahol x az eltelt napok számát jelöli.

Egy szakértő szerint 2300–2400 Ft közötti áron már érdemes eladni a részvényt, mert ezután a növekedés nagy valószínűséggel csökkenésbe fog átfordulni.
A modell segítségével számítsuk ki, hogy legalább és legfeljebb hány napot várjunk az eladással!

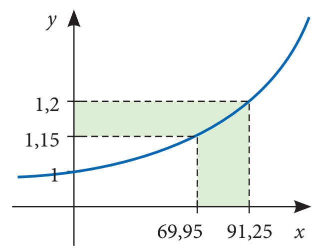
Megoldás

Meg kell találnunk a $2300 < 2000 \cdot 1{,}002^x < 2400$ feltételnek eleget tevő x értékeket. Egyszerűbb egyenlőtlenségeket vizsgálhatunk, ha 2000-rel osztjuk a kettős egyenlőtlenség mindhárom részét: $1{,}15 < 1{,}002^x < 1{,}2$.
Ábrázoljuk a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto 1{,}002^x$ függvényt! Mivel pontos adatokat nem a grafikonról fogunk leolvasni, egy egyszerű vázlat is elég.

A következő megfigyeléseket tehetjük:

1. Az $x \mapsto 1{,}002^x$ függvény szigorúan növekedő, mert az exponenciális függvény alapja 1-nél nagyobb szám.

2. Ahhoz, hogy megállapíthassuk, az x-nek melyik értéke esetében lesz a függvény értéke éppen 1,15, meg kell oldanunk az $1{,}002^x = 1{,}15$ egyenletet.



Ezt kétféleképpen is megtehetjük:

a) Használhatjuk a logaritmus definícióját és a tízes alapra áttérés képletét:
$$x = \log_{1{,}002} 1{,}15 = \frac{\lg 1{,}15}{\lg 1{,}002} \approx 69{,}95.$$

b) Ha két pozitív szám egyenlő, akkor egyenlő a tízes alapú logaritmusuk is. Tehát most $\lg 1{,}002^x = \lg 1{,}15$.
A hatvány logaritmusára vonatkozó azonosságnak megfelelően $x \cdot \lg 1{,}002 = \lg 1{,}15$, amiből
$$x = \frac{\lg 1{,}15}{\lg 1{,}002} \approx \frac{0{,}0607}{0{,}000868} \approx 69{,}95.$$

Látható, hogy mindkét módszerrel ugyanazt az eredményt kapjuk: a függvény értéke megközelítőleg $x = 69{,}95$ esetén lesz egyenlő 1,15-dal.
Hasonlóképpen az $1{,}002^x = 1{,}2$ egyenlet megoldása $x = \log_{1{,}002} 1{,}2 = \dfrac{\lg 1{,}2}{\lg 1{,}002} \approx 91{,}25$, vagyis az 1,2-hez tartozó x érték megközelítőleg 91,25.

3. A grafikonról most már leolvashatjuk, hogy az eladásig 69,95 napnál több, de 91,25 napnál kevesebbnek kell eltelnie.

4. Figyelembe véve, hogy „egész napokról” szól a feladat, $2300 < 2000 \cdot 1{,}002^x < 2400$ pontosan akkor teljesül, ha $70 \le x \le 91$, tehát legkorábban a 70. napon, legkésőbb pedig a 91. napon kell eladnunk a részvényt, ha a modell „jóslata” szerint akarunk cselekedni.

FELADAT

1. Ábrázold a koordináta-rendszerben az $x \mapsto 1{,}2^x$ függvényt! Olvasd le a grafikonról, mely valós számokra teljesül a következő:

a) $1{,}2^x \geq 1{,}44$;

b) $1{,}2^x < 1$.

2. Egy webáruház üzemeltetői a létrehozás utáni első hónapban úgy tapasztalták, hogy a napi vásárlások száma az eltelt idővel exponenciálisan növekedett, nagyjából az $N(x) = 10 \cdot 1{,}08^x$ függvény szerint, ahol N az adott napi vásárlások száma, x pedig a nyitás óta eltelt napok száma.

a) Számítsd ki, hogy a nyitás utáni hányadik napon lépte át először a vásárlások száma a napi 100-at!

b) Az exponenciálisan növekedő szakasz után a vásárlások napi száma más hasonló boltok tapasztalatai alapján várhatóan 1250–1750 között fog állandósulni. Számítsd ki, hogy ezek alapján legalább és legfeljebb hány napig tarthat az exponenciálisan növekedő szakasz!

3. Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket az exponenciális függvény tulajdonságainak felhasználásával!

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 8$; **b)** $1 \leq 1{,}5^x \leq 10$.

4. Egy ország 40 évesnél idősebb, 75 évesnél fiatalabb lakosainak kor szerinti megoszlását a $P(x) = 50 \cdot 0{,}94^x$ függvénnyel modellezték, ahol x az életkor (években), $P(x)$ pedig az adott korú lakosok száma (millió főben).

Például az 53 évesek száma (millió főben):

$P(53) = 50 \cdot 0{,}94^{53} \approx 1{,}88$,

a 70 éveseké pedig

$P(70) = 50 \cdot 0{,}94^{70} \approx 0{,}66$.

Számítsd ki, hogy hány évesek a 40 évesnél idősebb emberek azon csoportjai, amelyeknek a modell szerint egymilliónál több tagjuk van!

HÁZI FELADAT

1. A ^{14}C radioaktív szénizotóp felezési ideje 5730 év. Legfeljebb milyen régi az a csontmaradvány, amelynek ^{14}C-tartalma még több mint 15%-a az eredeti értéknek?

a) Add meg a választ felezési periódusokban!

b) Add meg a választ években!

2. Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket az exponenciális függvény tulajdonságainak felhasználásával!

a) $3^x \leq 2187$;

b) $0{,}06 < 0{,}6^x < 6$.

EMELT SZINT

Oldd meg az egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

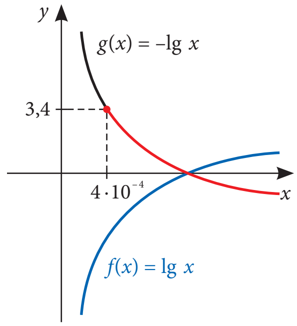
a) $3^{2x+3} < 3^{5-2x}$; **b)** $\left(\frac{3}{4}\right)^{3x-7} \leq \frac{4}{3}$; **c)** $1{,}4^{x^2-5x+6} \geq 1$

56 Egyenlőtlenség logaritmussal

KIDOLGOZOTT FELADAT

Híg vizes oldatok savasságát vagy lúgosságát a pH-értékkel szokás jellemezni, amely az oxóniumion-koncentráció tízes alapú logaritmusának ellentettjével egyenlő, azaz pH $= -\lg x$ (x jelöli a koncentráció értékét $\frac{\text{mol}}{\text{liter}}$-ben).
Mekkora az oxóniumion-koncentráció abban az oldatban, amelynek pH-értéke legfeljebb 3,4 ?

Megoldás
Meg kell oldanunk a $-\lg x \le 3{,}4$ logaritmusos egyenlőtlenséget.
Ehhez először oldjuk meg a $-\lg x = 3{,}4$ egyenletet!
$\lg x = -3{,}4$



$x = 10^{-3{,}4}$
$x \approx 4 \cdot 10^{-4}$

Készítsünk vázlatot, amelyen a $g\colon x \mapsto -\lg x,\ \ x \in \mathbf{R}^{+}$ függvény grafikonján bejelöljük az összetartozó értékeket! A grafikonról leolvasható, hogy a $-\lg x \le 3{,}4$ egyenlőtlenség megoldása $x \ge 4 \cdot 10^{-4}$, azaz a legfeljebb 3,4 pH-értéknek megfelelő koncentráció legalább $4 \cdot 10^{-4}\ \frac{\text{mol}}{\text{liter}}$.

Megjegyzés
Habár – ahogyan a grafikon is sugallja – a pH-érték elvileg lehet negatív, ennyire erős savakkal a mindennapi életben általában nem találkozunk. Ezenkívül különböző okok miatt a 0–14 tartományon kívüli pH-értékek mérése elvileg és technikailag is bizonytalan.

FELADAT

1. Oldd meg az egyenlőtlenségeket a logaritmusfüggvény tulajdonságainak felhasználásával!
a) $\log_2 x \ge 100$;
b) $-1 < \log_{0,1} x < 1$.

2. A tízes alapú logaritmus segítségével meghatározhatjuk, hogy egy szám a tízes számrendszerben hány jegyű.
Tudjuk, hogy $\lg 100\,000 = 5$ és $\lg 1\,000\,000 = 6$. Ha egy n egész számról tudjuk, hogy hatjegyű, akkor $100\,000 \le n < 1\,000\,000$. Ekkor a logaritmusfüggvény monotonitása miatt $5 \le \lg n < 6$.
a) Hány jegyű az az n egész szám, melyre $\lg n \approx 7{,}81$?
b) Hány jegyű szám a tízes számrendszerben a 20^{80} hatvány?

3. Ha az egylépcsős rakétát (állandó) $u\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ kezdősebességgel hagyja el a kiáramló gáz, akkor a rakéta elméletileg elérhető legnagyobb sebessége attól függ, hogy a rakéta kezdeti tömege hányszorosa az üzemanyag elégetése után megmaradó tömegének. A végsebességet a $v(k) = 2{,}303 \cdot u \cdot \lg k$ összefüggés adja meg $\frac{\text{m}}{\text{s}}$-ban, ahol a $k > 1$ szám a kezdeti tömeg és a megmaradt tömeg hányadosa.
a) A II. világháborús német „csodafegyver", az egylépcsős V–2 („fau–kettő") rakéta egyik változatából $2\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$ sebességgel áramlott ki a gáz, és a rakéta megmaradt tömege a kezdeti tömegének megközelítőleg 31%-a volt. Mekkora lehetett ennek a rakétának az elméleti végsebessége?
b) Legfeljebb hány százaléka lehet a végső tömeg a kezdeti tömegnek, ha az egylépcsős rakétát $2{,}3\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$ sebességgel hagyja el a kiáramló gáz, és legalább $2{,}8\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$ elméleti végsebességet akarnak elérni?

HÁZI FELADAT

1. Rajzold meg az $x \mapsto \log_3 x$ $(x \in \mathbf{R}^+)$ függvény grafikonját! Szemléltesd az ábrán a következő egyenlőtlenségek megoldáshalmazát!

a) $\log_3 x > 1$;
b) $\log_3 x < 1$;
c) $\log_3 x > -1$;
d) $\log_3 x < 2$.

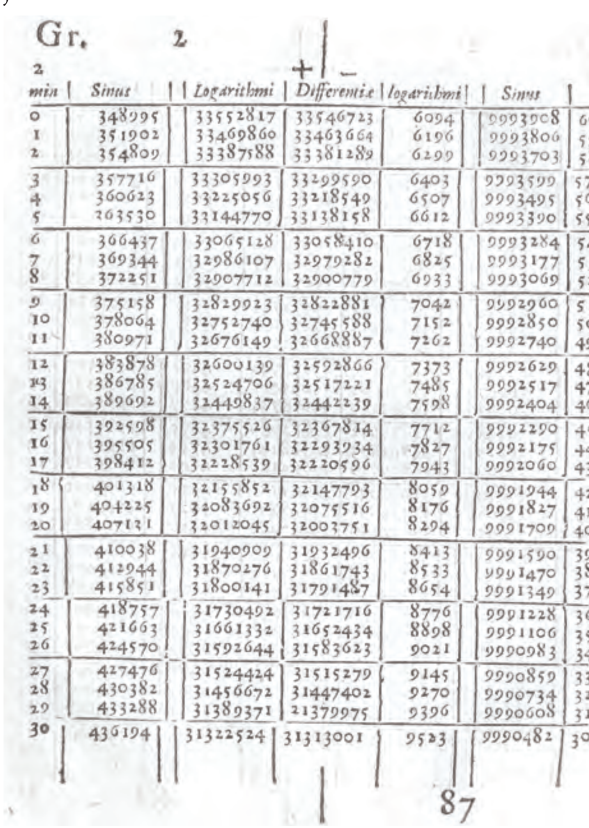
2. Az 1. házi feladat eredményeit felhasználva oldd meg a következő kettős egyenlőtlenségeket!

a) $1 < \log_3 x < 2$;
b) $-1 < \log_3 x < 1$;
c) $-1 < \log_3 x < 2$.

3. Egy érdekes matematikai közelítés, hogy az n darab tagból álló $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$ sor összege logaritmikusan növekszik, közelítő értéke pedig $S_n \approx \log_e n$, ahol e az úgynevezett Euler-féle szám, melynek értéke körülbelül: $e \approx 2{,}718$.
Közelítőleg hány tagból állhat a fenti sor összege (tehát mennyi az n értéke), ha az összeg 4,9 és 5,0 között van?

RÁADÁS

A XVI–XVII. században, a nagy földrajzi felfedezések korában a hosszú tengeri utak során a navigáció létfontosságú eszközei voltak a csillagászati táblázatok. E táblázatok elkészítéséhez azonban elképesztő mennyiségű számítás – elsősorban szorzások és osztások – elvégzésére volt szükség. Nem csoda hát, hogy a kor matematikusai és csillagászai fáradhatatlanul keresték a módszereket, amelyek e műveletek elvégzését felgyorsítanák.
Az első komoly eredményt a trigonometriai azonosságokra épülő ún. *Prosthaphaeresis-módszer* hozta, majd 1614-ben John Napier skót matematikus közzétette *Mirifici logarithmorum canonis descriptio (Csodálatos logaritmustáblázat leírása)* című munkáját, amelyben módszerének magyarázata mellett egy 90 oldalas logaritmustáblázatot is közölt. Bár e táblázat használata még meglehetősen nehézkes volt, 1617-ben Napier kollégája, az angol Henry Briggs kiadta az első könnyen kezelhető, tízes alapú logaritmustáblázatot.
A Napier által kidolgozott eljárás, melyet többek között Tycho Brahe és Johannes Kepler is használt, a sokjegyű számok szorzását és osztását a táblázatból kikeresett logaritmusok összeadására és kivonására egyszerűsítette, majd az így kapott összeg, illetve különbség alapján újra csak a táblázat segítségével lehetett visszakeresni az eredeti művelet végeredményét. A logaritmusokon alapuló számítási módszer sikerességét jellemzi, hogy a táblázat csak a XX. század utolsó évtizedeiben elterjedő elektronikus zsebszámológépekkel tűnt el végleg a mindennapok matematikájából.



Gr. 2

2

min	Sinus	Logarithmi	+ Differentiæ –	logarithmi	Sinus	
0	348995	33552817	33546723	6094	9993908	60
1	351902	33469860	33463664	6196	9993806	59
2	354809	33387588	33381289	6299	9993703	58
3	357716	33305993	33299590	6403	9993599	57
4	360623	33225056	33218549	6507	9993495	56
5	363530	33144770	33138158	6612	9993390	55
6	366437	33065128	33058410	6718	9993284	54
7	369344	32986107	32979282	6825	9993177	53
8	372251	32907712	32900779	6933	9993069	52
9	375158	32829923	32822881	7042	9992960	51
10	378064	32752740	32745588	7152	9992850	50
11	380971	32676149	32668887	7262	9992740	49
12	383878	32600139	32592866	7373	9992629	48
13	386785	32524706	32517221	7485	9992517	47
14	389692	32449837	32442239	7598	9992404	46
15	392598	32375526	32367814	7712	9992290	45
16	395505	32301761	32293934	7827	9992175	44
17	398412	32228539	32220596	7943	9992060	43
18	401318	32155852	32147793	8059	9991944	42
19	404225	32083692	32075516	8176	9991827	41
20	407131	32012045	32003751	8294	9991709	40
21	410038	31940909	31932496	8413	9991590	39
22	412944	31870276	31861743	8533	9991470	38
23	415851	31800141	31791487	8654	9991349	37
24	418757	31730492	31721716	8776	9991228	36.
25	421663	31661332	31652434	8898	9991106	35
26	424570	31592644	31583623	9021	9990983	34
27	427476	31524424	31515279	9145	9990859	33
28	430382	31456672	31447402	9270	9990734	32
29	433288	31389371	21379975	9396	9990608	31
30	436194	31322524	31313001	9523	9990482	30

87

Napier logaritmustáblázatának egyik oldala

57 Exponenciális egyenletek

KIDOLGOZOTT FELADAT

Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi *exponenciális* egyenleteket!

a) $5 \cdot 8^{2x-3} = 320$

b) $3 \cdot 5^{x} + 2 \cdot 5^{x+1} - 75 \cdot 5^{x-2} = 2$

c) $4 \cdot 7^{x} - 21 = 0$

Megoldás

a) Mindkét oldalt 5-tel elosztva: $8^{2x-3} = 64$.
A 64 a 8-nak a 2. hatványa, tehát $8^{2x-3} = 8^{2}$.
A 8-as alapú exponenciális függvény szigorúan monoton, ezért $2x - 3 = 2$, amiből $x = \frac{5}{2}$.
Az egyenletnek tehát a 2,5 lehet az egyetlen megoldása.
Ellenőrzés:
$5 \cdot 8^{2 \cdot 2{,}5-3} = 5 \cdot 8^{5-3} = 5 \cdot 8^{2} = 5 \cdot 64 = 320$,
tehát a 2,5 valóban megoldása a feladatnak.

b) Az 5 alapú hatványok kitevője rendre x, $x + 1$ és $x - 2$.
Az azonos alapú hatványok szorzására, osztására vonatkozó azonosságok között fordult elő, hogy a kitevőben összeg, illetve különbség állt, tehát ezt a megfigyelést használjuk most:
$5^{x+1} = 5^{x} \cdot 5^{1} = 5 \cdot 5^{x}$;
$5^{x-2} = 5^{x} : 5^{2} = \frac{1}{25} \cdot 5^{x}$.
Ezért a $3 \cdot 5^{x} + 2 \cdot 5^{x+1} - 75 \cdot 5^{x-2} = 2$ egyenlet így alakítható át:
$3 \cdot 5^{x} + 2 \cdot 5 \cdot 5^{x} - 75 \cdot \frac{1}{25} \cdot 5^{x} = 2$,
$3 \cdot 5^{x} + 10 \cdot 5^{x} - 3 \cdot 5^{x} = 2$.
A bal oldalon most már elvégezhető az összeadás és a kivonás: $10 \cdot 5^{x} = 2$, ami írható $5^{x} = \frac{1}{5} = 5^{-1}$ alakban.
Ebből (az 5-ös alapú exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt) $x = -1$ adódik.
Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy a (-1) valóban megoldása az eredeti egyenletnek.

c) Az egyenletet célszerű a $7^{x} = 5{,}25$ alakra rendezni. Az egyenlet megoldása: $x = \log_7 5{,}25$.
Ennek közelítő értéke az $\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}$ összefüggés felhasználásával kiszámítható:
$\log_7 5{,}25 = \frac{\lg 5{,}25}{\lg 7} \approx 0{,}8522$.
Ellenőrzés:
$4 \cdot 7^{0{,}8522} - 21 \approx 4 \cdot 5{,}2504 - 21 \approx 0{,}002 \neq 0$.
Világos, hogy a 0,8522 racionális szám nem megoldása az eredeti egyenletnek, de nem is ezt állítottuk. Azt mondtuk, hogy a megoldás négy tizedesjegyre kerekítve 0,8522.

FELADAT

1. Oldd meg az alábbi exponenciális egyenleteket!

a) $5 \cdot 3^x + 8 \cdot 3^x = 117$

b) $2{,}8 \cdot 5^{x^2-7} = 70$

2. Oldd meg a következő exponenciális egyenleteket!

a) $5^x \cdot 25^x \cdot 125^x = 0{,}008$

b) $3^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot 9^{3x} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^x = \frac{1}{81}$

3. **a)** $3^x + 2 \cdot 3^{x+1} + 3^{x+2} = \frac{16}{3}$

b) $3 \cdot 2^x - 5 \cdot 2^{x+3} + 2^{x+5} = -1{,}25$

4. Oldd meg az alábbi exponenciális egyenleteket!

a) $8{,}2 \cdot 3{,}7^{-2x+5} = 41$

b) $1420 \cdot 2^{-\frac{x}{15}} = 284$

HÁZI FELADAT

1. Az alábbi egyenletek közül melyiknek nincs megoldása a valós számok halmazán? Miért?

a) $3 \cdot 2^x + 6 = 0$

b) $3 \cdot x^2 + 6 = 0$

c) $3 \cdot \sqrt{x+6} = 0$

d) $3 \cdot |x-1| + 6 = 0$

e) $3 \cdot \sin x + 6 = 0$

f) $3 \cdot \sin(x+6) = 0$

2. Oldd meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $9^x = \sqrt[3]{3^7}$;

b) $13^{x^2-x-12} = 1$;

c) $4^{3x} \cdot 32^x = 16^5$.

3. Oldd meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $2 \cdot 7^{2x+1} - 49 \cdot 7^{2x-1} = 1$

b) $1070 = 428 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{x}{50}}$

EMELT SZINT

KIDOLGOZOTT FELADAT

Oldjuk meg a $9^x - 7 \cdot 3^x - 18 = 0$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás

Az órán tanult egyik módszer sem működik. Észrevehetjük azonban, hogy $9^x = (3^2)^x = (3^x)^2$. Ha bevezetjük az $a = 3^x$ új ismeretlent, akkor az $a^2 - 7a - 18 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk.

Ennek megoldásai:

$a_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2 \cdot 1}$, ebből $a_1 = 9$, $a_2 = -2$. Meg kell határoznunk az egyes a értékekhez tartozó x értékeket:

I. $a_1 = 9 = 3^x$, amiből $x = 2$ az exponenciális függvény monotonítása miatt.

II. $a_2 = -2 = 3^x$. Ennek az egyenletnek nincs megoldása, hiszen $3^x > 0$ bármely x valós szám esetén.

Tehát az egyenlet egyetlen megoldása: $x = 2$. Ellenőrizzük a megoldás helyességét:

$9^2 - 7 \cdot 3^2 - 18 = 81 - 63 - 18 = 0$.

FELADAT

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $9^x - 2 \cdot 3^x = 3$;

b) $4^x + 16 = 17 \cdot 2^x$;

c) $2 \cdot 8^{2x} + 7 \cdot 8^x - 4 = 0$.

58 Egyenletek logaritmussal

FELADAT

1. Alkalmazd a logaritmus azonosságait! Alakítsd egyetlen logaritmussá a kifejezéseket!

a) $3 \cdot \log_2 5 + 0{,}5 \cdot \log_2 3 - \frac{2}{3} \log_2 6$

b) $\log_4 6 + 1$

c) $2 \cdot \lg a + 3 \cdot \lg b - 0{,}5 \cdot \lg c \quad (a, b, c > 0)$

d) $\log_4 10 + \log_2 5$

KIDOLGOZOTT FELADAT

Oldjuk meg az alábbi *logaritmusos egyenleteket* a valós számok halmazán!

a) $\lg(x-2) = 2 - \lg 5$; **b)** $\lg(x-2) - \lg x = 2$;
c) $2\lg(x+1) - \lg x^2 = \lg 1{,}44$.

Megoldás

A logaritmusos egyenletek megoldását kezdhetjük annak megállapításával is, hogy mely számok tartoznak az egyenlet értelmezési tartományába.

a) Az egyenlet értelmezési tartománya a 2-nél nagyobb számok halmaza, hiszen az $(x-2)$-nek pozitív számnak kell lennie.
A jobb oldalon a 2 helyett írhatunk lg 100-at:
$\lg(x-2) = \lg 100 - \lg 5$.
A logaritmus azonosságai miatt ez így alakítható tovább: $\lg(x-2) = \lg \frac{100}{5}$, vagy $\lg(x-2) = \lg 20$.
A tízes alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton, ezért $x - 2 = 20$, vagyis $x = 22$.
Igaz, hogy $22 \in]2; +\infty[$, és az átalakítások az értelmezési tartományban ekvivalensek voltak. Az egyenlet egyetlen megoldása tehát a 22.
Az ekvivalencia vizsgálata helyett behelyettesítéssel igazolhatjuk, hogy a 22 gyöke az egyenletünknek: $\lg(22-2) = 2 - \lg 5$ igaz, mert a bal oldal értéke lg 20, a jobb oldalé pedig
$2 - \lg 5 = \lg 100 - \lg 5 = \lg \frac{100}{5} = \lg 20.$

b) A logaritmusok miatt egyrészt $x > 2$, másrészt $x > 0$ szükséges, tehát az egyenlet értelmezési tartománya most is $]2; +\infty[$.
Ezen a halmazon – felhasználva, hogy a 2 helyett ismét lg 100-at írhatunk – az egyenlet így is alakítható:
$\lg \frac{x-2}{x} = \lg 100$.
Ismét a tízes alapú logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $\frac{x-2}{x} = 100$.
A kapott egyenletet a mérlegelvvel oldjuk meg: $x - 2 = 100x$, amiből $99x = -2$, vagyis $x = -\frac{2}{99}$ adódik.
A $\left(-\frac{2}{99}\right)$ nem eleme az értelmezési tartománynak, tehát nem megoldása az egyenletnek. Más megoldása az egyenletnek nem lehet, tehát nincs megoldása.

c) Csak a pozitív számoknak van logaritmusuk, ezért kell, hogy az $(x+1)$ is és az x^2 is pozitív legyen, vagyis egyrészt $x > -1$, másrészt $x \neq 0$. Ezért az egyenlet értelmezési tartománya: $]-1; +\infty[\setminus \{0\}$.
Kezdhetjük úgy is az egyenlet megoldását, hogy mindkét oldalhoz hozzáadjuk a $\lg x^2$-et:
$2\lg(x+1) = \lg 1{,}44 + \lg x^2$.
A hatvány és a szorzat logaritmusára vonatkozó azonosság szerint ez azt jelenti, hogy
$\lg(x+1)^2 = \lg(1{,}44x^2)$.
A tízes alapú logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $(x+1)^2 = 1{,}44x^2$.
A négyzetre emelést elvégezve, majd az egyenletet nullára rendezve: $0{,}44x^2 - 2x - 1 = 0$.
A másodfokú egyenlet megoldóképletével két gyököt kapunk: $x_1 = -\frac{5}{11}$ és $x_2 = 5$.

Mindkét szám eleme az értelmezési tartománynak. Mivel az értelmezési tartományon az átalakításaink ekvivalensek voltak, ezért mindkét szám megoldása az eredeti egyenletnek.

(Az utolsó mondat helyett természetesen a két szám behelyettesítésével is igazolhatjuk, hogy mindkettő megoldása az eredeti egyenletnek.)

FELADAT

2. Melyik valós számot helyettesíthetjük az x helyére, hogy igaz legyen az állítás?

a) $\log_2(x+10)=1$

b) $\log_3(x+10)=2$

c) $\log_4(x+10)=0{,}5$

d) $\log_5(x+10)=0$

3. Határozd meg a következő egyenletek értelmezési tartományát!

a) $\lg(x+5)=\lg(x)$

b) $2\cdot\log_2(x-3)=16$

c) $\log_2(x-3)^2=16$

4. Oldd meg a 3. feladatban megadott egyenleteket a valós számok halmazán!

5. Alakítsd egyetlen logaritmussá az egyenletek jobb oldalát is és bal oldalát is, majd oldd meg az alábbi logaritmusos egyenleteket!

a) $3+\lg(5x-8)=\lg(4000x)$

b) $\log_2(x-6)+\log_2 x=4$

c) $1+\lg\dfrac{3x-4}{100}=\lg\dfrac{3x-4}{10}$

d) $4+\lg\dfrac{3x-4}{100}=\lg\dfrac{3x-4}{10}$

HÁZI FELADAT

1. Melyik valós számot helyettesíthetjük a c helyére, hogy igaz legyen az alábbi állítás?

a) $\lg(c+2)=3;$

b) $\lg(c+2)=\lg(5-c);$

c) $\lg(c+2)=\lg c^2;$

d) $\lg(c+2)=2\cdot\lg(c+2).$

2. Add meg a következő egyenletek értelmezési tartományát!

a) $\log_6 x-\log_6(x+5)=1;$

b) $\log_6 x-\log_6(x-5)=1;$

c) $\log_6 x+\log_6(x+5)=1;$

d) $\log_6 x+\log_6(x-5)=1.$

3. Oldd meg a 2. házi feladatban megadott egyenleteket a valós számok halmazán!

EMELT SZINT

1. Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\log_4[\log_3(\log_2 x)]=0$

b) $\log_2(1+\log_3(2+\log_4(3+x)))=1$

c) $\log_4(1+\log_2(2+\log_2(3+x)))=1$

2. Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=\dfrac{11}{3}$

b) $\log_4(\log_2 x)=\log_2(\log_4 x)$

3. Oldd meg az egyenletrendszert!

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{\log_3 x}+\dfrac{1}{\log_3 y}=-\dfrac{1}{2}\\ \log_3(3x)+\log_3(3y)^2=6\end{array}\right\}$$

59 Gyakorlás

FELADAT

1. Végezd el a számításokat a logaritmus azonosságainak felhasználásával számológép nélkül!

a) $10^{\frac{1}{2}\lg 9-\lg 2}$; **b)** $\sqrt{100^{2+\frac{1}{2}\lg 16}}$.

2. Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $2^{x-1}=16\cdot\sqrt{8}$;

b) $4^{x+2}+4^{x}-2\cdot 4^{x+1}=18$.

3. Add meg az egyenletek értelmezési tartományát, majd oldd meg az egyenleteket!

a) $\log_5(x-1)=3$;

b) $\log_3(10x-2)-2\cdot\log_3(x+1)=\log_3 2$.

4. A Földön a légnyomás a tengerszint feletti magasságtól (is) függ. A tengerszint felett x km magasságban a légnyomást a $p(x)=1{,}013\cdot 10^{5}\cdot 1{,}133^{-x}$ (pascal) összefüggés adja meg.

a) A képlet szerint mekkora a légnyomás a Kékes tetőn, a Mont Blanc-on, illetve a Csomolungmán?

b) A képlet szerint mekkora magasságban lesz a légnyomás 80 000 Pa?

c) Mekkora a légnyomás „felezési magassága”, azaz hány km-enként csökken az előző magasságon mért érték a felére?

5. Ellenőrizd zsebszámológépeddel néhány konkrét értékre az alábbi összefüggést! Bizonyítsd be a logaritmus azonosságai segítségével!

$\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$, ahol $a, b>0$, $a\neq 1$, $b\neq 1$.

HÁZI FELADAT

1. A 2000 eurós tőke évi 6%-os kamatos kamat mellett hány teljes év elteltével nőne 4024 euróra? Megoldását részletezze!
(Régebbi érettségi feladat: 2011. október, 4pont)

2. Oldd meg az egyenleteket és az egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

a) $3^{x+1}+3^{x+2}=36$

b) $4^{3x-1}\cdot 2^{2x}=2^{4x+1}$

c) $\left(\dfrac{7}{8}\right)^{5x-4}<\dfrac{8}{7}$

3. Add meg az egyenletek értelmezési tartományát, majd oldd meg az egyenleteket!

a) $\log_{\frac{1}{3}}(2-x)=-2$

b) $\log_7(3x+16)-\log_7(x+2)=1$

RÁADÁS

A logarléc

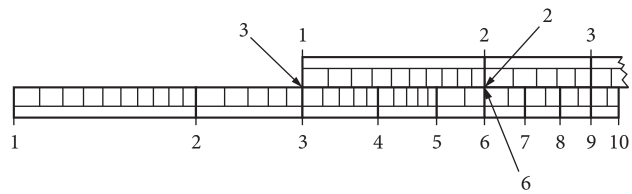
„A technika álláspontjáról nézve a világ egyszerűen nevetséges; az emberek egymás közötti viszonyai a lehető leggyakorlatiatlanabbak, módszereik nem gazdaságosak, nem egzaktak; és aki hozzászokott, hogy ügyeit-dolgait logarléccel intézze, egyszerűen nem tudja komolyan venni az emberi kijelentéseknek legalább a felét. A logarléc számok és vonalkák két hallatlan éleselméjűséggel egymásba dolgozott rendszere; két egymásba csusszanó rudacska, melyek segítségével a legbonyolultabb feladatokat is szemvillanás alatt megoldhatjuk, és egyetlen gondolatot sem tékozlunk el közben; kis szimbólum a logarléc, ott hordjuk a kabátunk belső zsebében, és mintha kemény, fehér vonás szelné keresztül a szívünket: ha van logarlécünk, és valaki nagy dolgokat állít, vagy roppant érzelmekről szónokol, annyit mondunk csupán: Bocsánat, egy pillanatra, előbb számítsuk ki mindezeknek a hibahatárát és legvalószínűbb értékét!”

(Robert Musil: A tulajdonságok nélküli ember – 1931)

Robert Musil sorai kíváncsivá teszik az olvasót: Mi lehet az a szerkezet, ami a XX. század első évtizedeiben élő modern ember életében ilyen fontos szerepet töltött be? Egy olyan egyszerű felépítésű mechanikus számológép, amely lehetővé teszi különböző matematikai műveletek gyors elvégzését. Az író szavaiban érezhető némi túlzás és irónia, azt mégis le kell szögeznünk, hogy a logarléc egy olyan eszköz, amely könnyű kezelhetőségénél fogva a számításokat gyakran végző embereknek nélkülözhetetlen segédeszköze volt.

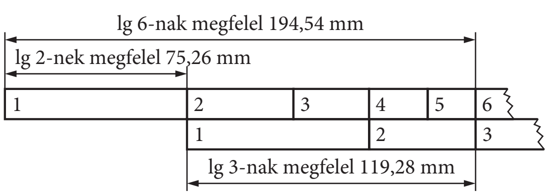
Az 1620-as évek elején Edmund Gunter angol matematikus skálára vitte a nemrég megjelent logaritmustáblázat adatait, és két skála egymás mellé helyezésével készített egy számolásra alkalmas eszközt. 1630-ban a cambridge-i William Oughtread készített egy körlogarlécet, majd találmányát egyesítette Gunter eszközével, ezzel létrejött a mai értelemben vett logarléc.

Nézzük meg egy egyszerű példán keresztül, hogyan kezeljük a lécet két szám összeszorzásánál! Határozzuk meg a 2 és a 3 szorzatát! *(1. ábra)* Az *A* skálán megkeressük a 3-t és ide helyezzük a nyelv *B* skálájának 1 jelét. A nyelv *B* skálájának 2 jele alatt az *A* skálán leolvassuk az eredményt: a 6-ot.



1. ábra

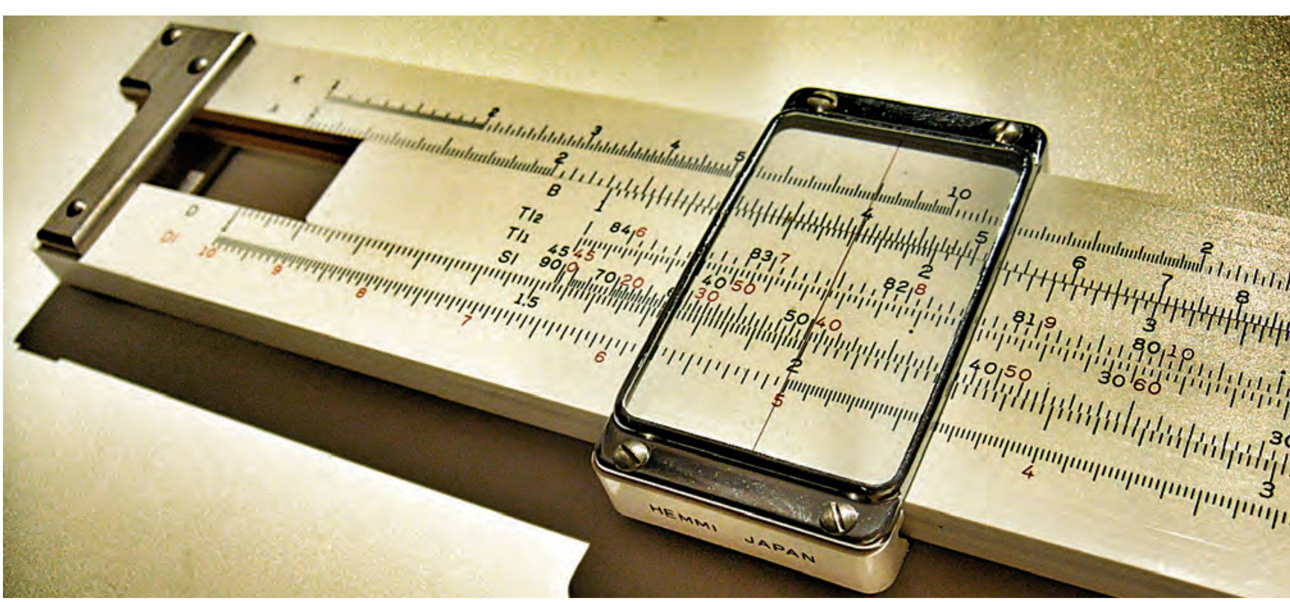
A logarléc működésének elve a logaritmus azonosságain alapul: számok szorzatát a számok logaritmusának összegzésével, a számok hányadosát a számok logaritmusának különbségével számolhatjuk ki.



2. ábra

A léceken távolságokat tudunk szemléltetni, a lécek egymás mellett történő mozgatásával pedig távolságokat adunk össze és vonunk ki egymásból. Például lg $(2 \cdot 3)$ = lg 2 + lg 3 = 75,26 mm + 119,28 mm = = 194,54 mm = lg 6, tehát a lécek mozgatásával a két szám szorzása helyett a logaritmusuknak megfelelő hosszakat adtuk össze. *(2. ábra)*

A logarléc igen hosszú életű számolási segédeszköz volt. A tizedes törtekkel, több számjegyű számokkal való számolásnál a skálák leolvasása már nagy figyelmet és gyakorlatot igényelt. Az évszázadok során folyamatosan újabb funkciókkal bővült. A különböző szakmák egyedi céljainak megfelelően speciális logarléceket is készítettek, így például létezett mérnököknek, bankoknak szánt logarléc. A XIX. században a mérnöki számítások túlnyomó részét logarléc segítségével végezték. Jelentőségét mutatja, hogy az Apollo-programban részt vevő űrhajósok még használtak logarlécet küldetésük során. Az 1980-as években a zsebszámológépek megjelenése a múzeumba űzte az emberiség kultúrájának e kiemelkedő találmányát.



60 Csoportverseny

CSOPORTMUNKA

Alkossatok négyfős csoportokat!

1. Oldjátok meg az alábbi 9 feladatot! Az a csoport, amelyik készen van a megoldással, írja fel a 9. feladat eredményét a táblára! Amikor minden csoport felírta az eredményét, akkor a verseny véget ér. Amíg van olyan csoport, amelyik nem végzett a munkájával, addig a többiek egyszer javíthatnak a felírt számon.

1. feladat Mennyi $\log_2 64 \cdot (\log_4 8 - \log_8 4)$?	*Jelöld ezt a számot **A** betűvel!*
2. feladat Hányadik hatványa a 3-nak a $\left(6 \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{16}}\right)^8$?	*Jelöld ezt a számot **B** betűvel!*
3. feladat Oldd meg a $2{,}4^x = 5{,}76$ egyenletet!	*Az egyenlet gyökét jelöld **C** betűvel!*
4. feladat Számológép nélkül állapítsd meg, hogy mennyi $\left(\log_3 9^{\frac{1}{8}}\right)^{-1}$!	*Az eredményt jelöld **D** betűvel!*
5. feladat Mennyi $\lg \sqrt[3]{10} - \frac{2}{3} \cdot \lg 0{,}0001$?	*A kapott számot jelöld **E** betűvel!*
6. feladat Oldd meg az $\log_5 (x + 4) + \log_5 x = 1$ egyenletet!	*Az egyenlet gyökét jelöld **F** betűvel!*
7. feladat Melyik két szomszédos egész szám közé esik a k, ha $1{,}065^k = 3{,}45$?	*Ennek a két számnak az összegét jelöld **G** betűvel!*
8. feladat Hány jegyű egész szám a tízes számrendszerben az 50^{100}?	*Az eredmény számjegyeinek az összegét jelöld **H** betűvel!*
9. feladat Mennyi $\boldsymbol{C^A + B^F + D \cdot E - (G + H)}$?	Az eredményt írjátok fel a táblára!

2. Az első 3 helyezett csapat bemutatja, milyen egyszerű módszereket alkalmazott a megoldások közben.

HÁZI FELADAT

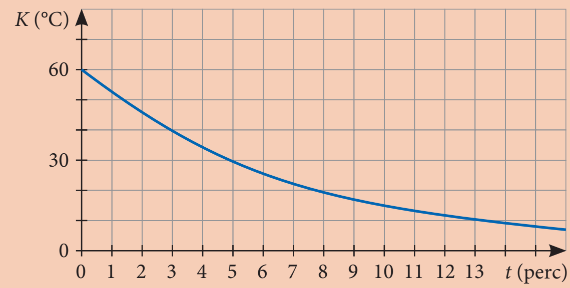
1. Tudjuk, hogy lg $A = 2{,}5$ és lg $B = 0{,}4$. Számológép használata nélkül add meg a következő számokat:
$\lg (A \cdot B)$, $\lg \frac{A}{B}$, $\lg A^4$, $\lg B^{0,5}$, $\lg \frac{1}{B}$!

2. Végezd el a számításokat a logaritmus azonosságainak felhasználásával számológép nélkül!

a) $6^{\frac{1}{2}\log_6 9 - \log_6 2}$

b) $3^{2-\log_3 2} - 6^{-\log_6 3}$

3. A Newton-féle hűlési törvény értelmében egy test és a környezetének hőmérséklete közötti különbség (K) időben exponenciálisan csökken. Egy 20 °C hőmérsékletű szobában az asztalon hagyott, kezdetben 80 °C hőmérsékletű csésze kávé hűlése modellezhető a $K(t) = 60 \cdot 0{,}87^t$ függvénnyel, ahol K a kávé és a szoba hőmérséklete közötti különbség, t pedig az eltelt idő, percekben mérve. Kezdetben a hőmérséklet-különbség $80 - 20 = 60$ (°C), azaz $K(0) = 60$.



a) Negyedóra eltelte után hány fok lesz a hőmérséklet-különbség a kávé és a szoba hőmérséklete között?

b) Negyedóra elteltével hány fok lesz a kávé hőmérséklete?

c) Mennyi idő alatt csökken a felére az eredetileg 60 °C-os hőmérséklet-különbség?

d) Milyen forró lehetett a kávé a mérés kezdete előtt 5 perccel?

e) Hány perc alatt hűl a kávé hőmérséklete 21 °C alá?

RÁADÁS

Barkochba és információ

1. Gondoltam egy számra 1 és 16 között! Hányféle számra gondolhattam? Legalább hány kérdésből lehet **biztosan** kitalálni? Mi a nyerő stratégia?
2. Hány kérdés szükséges, ha egy 1 és 64, illetve ha egy 1 és 2^n közötti számra gondoltam?
3. Nevezzük egy szám „információértékének” azt a számot, ahány barkochbakérdéssel **biztosan** ki tudjuk találni, ha valaki ennyi szám közül gondolt egyre! Jelöljük ezt $I(n)$-nel! Mennyi $I(4)$? És $I(16)$ =? Mennyi $I(2^n)$?
4. Gondolok egy számra 1 és 32 között, és egy másikra (ami lehet ugyanannyi, mint az előbbi) 1 és 64 között. Hányféleképpen gondolhattam a két számra? Legalább hány kérdés szükséges, hogy **biztosan** kitaláljuk mindkét számot?
5. Határozd meg a következő számokat: $I(2^n \cdot 2^m) = ?$ $I(2^n) + I(2^m) = ?$

Sokat hallani napjainkban, hogy az egyik legfontosabb „árucikk” az információ lett. Számtalan legális és illegális módon adnak és vesznek információkat. De hogyan lehetne mérni az információ mennyiségét?
A kérdés megválaszolásához az egyik legrégebbi játék visz közelebb: a barkochba.
Gondoljunk egy pozitív egész számra 1 és 32 között! Hogyan kérdezzünk ahhoz, hogy a lehető legkevesebb kérdésből *biztosan* kitaláljuk a gondolt számot? A válasz: minden körben meg tudjuk felezni a lehetséges számok körét, és ez a legjobb stratégia, ami biztosan eredményre vezet. Például: *Nagyobb, mint 16? – Nem. Nagyobb, mint 8? – Igen. Nagyobb, mint 12? – Igen. Nagyobb, mint 14? – Nem. Nagyobb, mint 13? – Nem. Tehát a gondolt szám a 13!* Ez azt jelenti, hogy 5 kérdés kell a biztos válaszhoz. A felezéses eljárással könnyen látható, hogy a 2^n lehetőség esetén éppen n kérdésre van szükség.
Nevezzük egy szám információértékének azt a számot, ahány barkochbakérdés szükséges ahhoz, hogy kitaláljuk. Jelöljük ezt $I(x)$-szel! Az imént kiderítettük, hogy $I(2^n) = n$.
Nem véletlen, hogy az $I(x) = \log_2 x$ függvény jól jellemzi a felsorolt példákban az információ mértékét. Ezt a gondolatot számos helyen használják az információelméletben.

Érdekesség, hogy a fizikában az entrópia nevű mennyiséget, amit „a rendezetlenség mértékeként” szoktak emlegetni, hasonló információelméleti alapokon definiálják.

61 Tudáspróba

TUDÁSPRÓBA I.

1. Írd fel egyetlen hatványként!

$2^{-4} \cdot 4^{0,5}$; $\left(3^{1,5}\right)^2$; $\sqrt[7]{8^2}$; $\left(\sqrt[5]{10}\right)^{\frac{10}{3}}$

2. Add meg a következő kifejezések értékét!

a) $\log_3 1 =$ $\qquad \log_4 \frac{1}{2} =$

b) $6^{\log_6 5} =$ $\qquad 3^{\log_9 4} =$

c) $2 \cdot \lg 5 + \lg 4 =$

3. Oldd meg a valós számok halmazán az egyenleteket!

a) $\lg(x - 1,5) + 1 = \lg(14x + 65) - 1$

b) $5^x - 3 \cdot 5^{(x+1)} + 5^{(x-1)} = -345$

c) $\left(\sqrt{8}\right)^{2x+1} = 4$

4. Oldd meg az egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$\left(\frac{2}{3}\right)^x \le \frac{4}{9}$

5. William E. Hick angol pszichológus szerint ha egy döntéshelyzetben azonnal kell választani n előre ismertetett és egyformán valószínű lehetőség közül, akkor a döntés meghozatalához szükséges reakcióidő (másodpercben) arányos az $(n + 1)$ kettes alapú logaritmusával. Ezt az információt manapság például weblapkészítők használják, amikor a weblapon elhelyezett linkek számáról kell dönteni.

Egy kísérlet eredményeit elemezve a kutatók azt találták, hogy a reakcióidő jó közelítéssel a $T(n) = 0,15 \cdot \log_2(n + 1)$ összefüggés szerint függ a lehetőségek számától. Legfeljebb hány választási lehetőséget kínáljunk fel, ha azt akarjuk, hogy a döntéshozáshoz a modell szerint szükséges idő ne legyen több, mint fél másodperc?

TUDÁSPRÓBA II.

1. Írd fel egyetlen hatványként!

$3^{-4} \cdot 3^7$; $\left(2^{0,5}\right)^8$; $\sqrt[7]{6^3}$; $\left(\sqrt[4]{5}\right)^{\frac{2}{3}}$

2. Add meg a következő kifejezések értékét!

a) $\log_2 0,5 =$ $\qquad \log_7 \sqrt[3]{7} =$

b) $7^{\log_7 4} =$ $\qquad \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 12} =$

c) $3 \cdot \log_2 3 + \log_3 1 - \log_2 27 =$

3. Oldd meg a valós számok halmazán az egyenleteket!

a) $\lg(0,5x - 1,5) + 1 = \lg(14x + 30) - 1$

b) $3 \cdot 4^{(x+2)} - 2 \cdot 4^{(x+1)} + 8 \cdot 4^{(x-1)} = 5 \cdot 4^x + 148$

c) $\left(\sqrt{3}\right)^{5x+1} = \frac{1}{9}$

4. Oldd meg az egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$\log_{0,8} x \ge 2$

5. Bankba fektetjük a pénzünket, 350 000 Ft-ot. Az éves kamat 4,5%. A pénzt és az év végén hozzáírt kamatot bent hagyjuk a bankban, így a tőkénk kamatos kamattal gyarapodik. Hány év alatt érjük el, hogy 350 000 Ft helyett 30%-kal több pénzünk legyen a bankszámlánkon?

6. Az ólom egyik izotópja radioaktív, azaz folyamatosan elbomlik, más atommá alakul. A bomlást az jellemzi, hogy azonos időtartamonként ugyanannyiad részére csökken az ólom részecskeszáma. A folyamatot a következő egyenlet írja le:

$N(t) = 4,2 \cdot 10^{24} \cdot 0,97^t$,

ahol az egyenletben az időt (t) percben mérjük, $N(t)$-vel jelöljük, hogy a mérés kezdete után t perccel hány radioaktív ólomrészecske van még az anyagban.

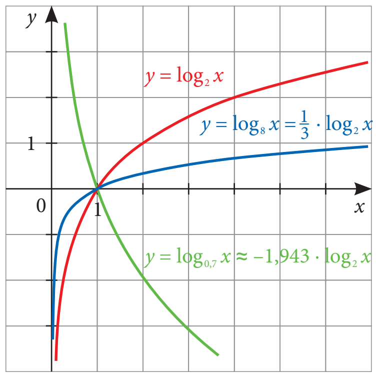
a) Mennyi ólomizotóp volt az anyagban a mérés kezdetekor?

b) Mennyi idő elteltével lesz a radioaktív ólomizotóp részecskeszáma egy mól, azaz $6 \cdot 10^{23}$?

c) Mennyi a folyamatban a felezési idő?

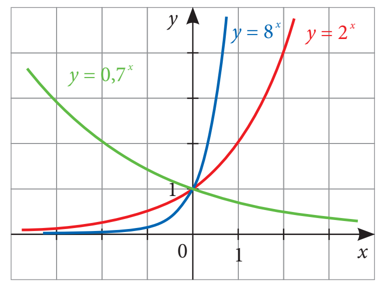
RÁADÁS

I. A logaritmusfüggvényekből egy is elég (lenne)!
Miért?
Nézzünk három logaritmusfüggvényt, f-et, g-t és h-t! Legyen
$f(x) = \log_2 x$,
$g(x) = \log_8 x$,
$h(x) = \log_{0,7} x$
$(x \in \mathbf{R}^+)$!



A logaritmus azonosságai közt felsoroltuk, hogy bármelyik alapú logaritmusról egyszerűen áttérhetünk bármely másik alapú logaritmusra. Az ott leírtak szerint
$$g(x) = \log_8 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 8} = \frac{\log_2 x}{3} = \frac{1}{3} \cdot f(x).$$
Ez pedig azt jelenti, hogy a 8-as alapú logaritmusfüggvény egy egyszerű szorzással megkapható a 2-es alapú logaritmusfüggvényből. A szorzó az $\frac{1}{3}$.
Hasonlóképpen:
$$h(x) = \log_{0,7} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 0{,}7} = \frac{1}{\log_2 0{,}7} \cdot f(x) \approx$$
$\approx -1{,}943 \cdot f(x)$. Tehát a 0,7 alapú logaritmusfüggvény is egy egyszerű szorzással kapható meg a 2-es alapú logaritmusfüggvényből. A szorzó az $\frac{1}{\log_2 0{,}7} \approx -1{,}943$.
Bármely $a > 0$ és $a \neq 1$ esetén $\log_a x = \frac{1}{\log_2 a} \cdot \log_2 x$ $(x > 0)$, ami azt mutatja, hogy mindegyik logaritmusfüggvény előállítható a kettes alapú logaritmusfüggvényből egy megfelelő számmal való szorzás útján.
Ezek szerint a 2-es alapnak kitüntetett szerepe lenne?
Egyáltalán nem! A fentiek a 2-es alap helyett bármely más alapot választva is igazak maradnak, csupán a szorzószámok változnak meg.
Ha tehát ismerünk egy logaritmusfüggvényt, akkor az összes többit is ismerjük, hiszen azok mind megkaphatók egyetlen szorzással az ismert függvényből. Az egyik grafikonból a másikba az x tengelyre merőleges irányú összenyomással, nyújtással juthatunk el, és az x tengelyre való tükrözésre is szükség lehet.

II. A logaritmusfüggvény a vele azonos alapú exponenciális függvény inverze (és viszont). Ezek szerint egyetlen exponenciális függvény is elegendő lenne?
A válasz igen!
Ha a logaritmusfüggvények grafikonját az $y = x$ egyenletű egyenesre tükrözik, az ugyanolyan alapú exponenciális függvény grafikonját kapjuk meg.



Az f függvényből az $x \mapsto 2^x$, a g függvényből az $x \mapsto 8^x$, a h függvényből pedig az $x \mapsto 0{,}7^x$ exponenciális függvényt kapjuk. A tükrözés során az x tengely szerepét az y tengely veszi át. Az $x \mapsto 2^x$ grafikonjából az $x \mapsto 8^x$ grafikonjához az y tengelyre merőleges irányú, $\frac{1}{3}$ arányú összenyomással jutunk el, az $x \mapsto 0{,}7^x$ grafikonját pedig az y tengelyre merőleges irányú, $\approx 1{,}943$-szeres nyújtással, majd az y tengelyre tükrözés után kapjuk meg.
Ezt mutatják a következő algebrai átalakítások is:
$8^x = (2^3)^x = 2^{3x}$, illetve $0{,}7^x = (2^{\log_2 0{,}7})^x \approx 2^{\frac{x}{-1{,}943}}$.
Tehát exponenciális függvényből is elég lenne egyetlenegy!

III. Van-e kitüntetett szerepű exponenciális függvény?
Van, de az nem a 10-es alapú. Felsőbb matematikai tanulmányok során kiderül, hogy az $x \mapsto e^x$ exponenciális függvény ismerete több szempontból előnyösebb, mint más alapú exponenciális függvényeké. Az e szám egy matematikai állandó, ami a π-hez hasonlóan irracionális szám; közelítő értéke 2,71828.
Az e alapú logaritmusnak külön neve is van: *természetes logaritmus* (latinul: logaritmus naturalis). Külön jelölést is bevezettek rá, a $\log_e$ helyett az ln jelölés használatos (a logaritmus naturalisra utalva).
Néhány példa a fenti jelölésekkel: $\ln e = 1$, $\ln \sqrt[3]{e^2} = \frac{2}{3}$, $e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}$ és $\left(\frac{1}{e}\right)^{\ln 8} = \frac{1}{8}$.

Témazáró feladatgyűjtemény

1. Számítsd ki!

a) $\sqrt[4]{81}\cdot\sqrt[3]{64}\cdot\sqrt[5]{32}\cdot\sqrt[6]{15\,625}$

b) $\sqrt[3]{0{,}001}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{16}}\cdot\sqrt[5]{243}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{-343}\cdot\sqrt{225}}{\sqrt[4]{10\,000}}$

d) $\dfrac{\sqrt[4]{\left(\frac{1}{25}\right)^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{27}}}{\sqrt{\frac{1}{225}}}$

2. Írd át az n-edik gyököt hatvány alakba!

a) $\sqrt[3]{18}$

b) $\sqrt[4]{25}$

c) $\sqrt[5]{3^4}$

d) $\sqrt[6]{a^8}$

e) $\sqrt[7]{\frac{1}{4^3}}$

f) $\sqrt{\sqrt[3]{5^7}}$

g) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{5}}}$

h) $\sqrt[3]{\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}}$

3. Írd fel 3 hatványaként!

a) $\sqrt[4]{3}$

b) $\sqrt[5]{3^2}$

c) $\sqrt[6]{\frac{1}{3^7}}$

d) $\sqrt[5]{\sqrt[6]{3^8}}$

e) $\sqrt[3]{3^2}\cdot\sqrt[4]{3^5}$

f) $\dfrac{\sqrt[3]{3^4}\cdot\sqrt[6]{3^5}}{\sqrt[3]{9^2}}$

g) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{3^5}}\cdot\sqrt{3}$

4. Írd át a hatványokat gyökös alakba!

$3^{\frac{1}{5}}$; $2^{\frac{3}{7}}$; $5^{-\frac{2}{3}}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{5}}$; $\left(\frac{5}{7}\right)^{-\frac{3}{4}}$; $(-3)^{\frac{2}{3}}$; $\left(-\frac{3}{4}\right)^{\frac{7}{2}}$.

5. Melyik nagyobb? Ne használj számológépet!

a) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$ vagy $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$

b) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-0{,}5}$ vagy $0{,}75^{\frac{3}{5}}$

6. Írd növekvő sorrendbe! Ne használj számológépet!

a) $\sqrt[5]{2}$; $2^{-\frac{3}{4}}$; $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$; $2^{\frac{1}{3}}$; $\left(\sqrt[3]{2}\right)^2$; $2^{-\frac{2}{3}}$

b) $5^{-\frac{1}{2}}$; $\sqrt[5]{5}$; $5^{\frac{3}{4}}$; $\sqrt[4]{5^3}$; 5^{-2}; $\sqrt{\frac{1}{5^3}}$

7. Számítsd ki! Ne használj számológépet!

$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$; $64^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[3]{1000}$; $\sqrt[3]{8^4}$;

$\left(\sqrt{7}\right)^6$; $0{,}0016^{\frac{1}{4}}$; $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}$; $\sqrt[5]{3^{-10}}$.

8. Írd fel kisebb gyökkitevővel! Írd fel hatvány alakba!

a) $\left(\sqrt[15]{5}\right)^6$;

b) $\sqrt[8]{15^6}$;

c) $\sqrt[10]{3^5}$;

d) $\sqrt[27]{\left(\frac{1}{3}\right)^{45}}$;

e) $\sqrt[26]{5^{13}}$;

f) $\left(\sqrt[6]{\frac{1}{5}}\right)^{16}$;

g) $\left(\sqrt[18]{0{,}7}\right)^{24}$.

9. Írd fel egy gyökjellel! (Írd át először hatvány alakba!)

a) $\sqrt[5]{13}\cdot\sqrt[7]{13}$;

b) $\sqrt{\frac{1}{5}}:\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$;

c) $\sqrt[3]{0{,}1}:\sqrt[5]{0{,}1}$;

d) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^3}\cdot\sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}\right)^2}$;

e) $\sqrt[3]{\frac{1}{5}}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{5}}\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{5}}$;

f) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{5}\right)^2}\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{1}{5}\right)^3}:\sqrt[5]{\left(\frac{1}{5}\right)^4}$.

10. Igaz-e, hogy a következő műveletek eredménye egész szám? Ha igen, mennyi? Ne használj számológépet!

$81^{\frac{5}{4}}$; $0{,}01^{-\frac{2}{3}}$; $36^{2{,}5}$; $49^{\frac{1}{3}}$; $64^{-\frac{5}{6}}$; $64^{\frac{5}{6}}$; $3^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{-\frac{4}{6}}$, $225^{0{,}5}$; $9^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{10}{3}}$; $27^{\frac{5}{4}}:3^{\frac{3}{4}}$; $100^{\frac{2}{3}}\cdot 100^{\frac{3}{2}}$.

11. Ábrázold közös koordináta-rendszerben és jellemezd a függvényeket!

a) $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R},\ x\mapsto 2^x$ $\quad g\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R},\ x\mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$

b) $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R},\ x\mapsto \left(\frac{2}{3}\right)^x$ $\quad g\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R},\ x\mapsto \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$

c) $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R},\ x\mapsto 2^x$ $\quad g\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R},\ x\mapsto 2^x+1$
$h\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R},\ x\mapsto 2^x-1$

d) $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R},\ x\mapsto 2^{x-1}$ $\quad g\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R},\ x\mapsto 2^{x+2}$
$h\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R},\ x\mapsto 2^{x+2}-1$

e) $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R},\ x\mapsto 3^x$ $\quad g\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R},\ x\mapsto 3\cdot 3^x$
$h\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R},\ x\mapsto \frac{1}{3}\cdot 3^x$

12. A hatványozás azonosságainak alkalmazásával végezd el a számításokat!

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{5}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$;

b) $\dfrac{3^{\frac{4}{9}}\cdot 3^{-\frac{1}{3}}}{3^{\frac{5}{6}}}$;

c) $(625\cdot 256)^{\frac{3}{4}}$;

d) $\left(5^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{6}{5}}$;

e) $\left(\frac{216}{343}\right)^{\frac{2}{3}}$.

13. Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $3^{5x-3} = 81$;
b) $3^{3x-5} = 729$;
c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5x-2} = 81$;
d) $2^{-4x} = \frac{1}{8}$;
e) $7^{-2x+5} = 0$;
f) $\left(\frac{4}{5}\right)^{x} = 1$;
g) $5^x = 6^x$;
h) $\left(\frac{1}{27}\right)^{x-1} = 81^x$;
i) $\left(\frac{1}{27}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{9}\right)^{-x}$;
j) $3^{x^2-8x+12} = 1$;
k) $2^x + 2^{x-4} = 8{,}5$;
l) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 1792$;
m) $9^{2x} = \sqrt[3]{243}$;
n) $\left(\frac{4}{49}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{7}{2}\right)^{9-x}$;
o) $7^{-4x} = \frac{1}{\sqrt{7}}$;
p) $3^{x^2-6x-2{,}5} = \sqrt{3^9}$;
q) $3^x + 5^x + 7^x = 0$;
r) $5^{|x-2|} = 125$,
s) $5^{|x-2|} = \frac{1}{25}$.

14. Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $2^{2x} + 2^{x+1} = 8$;
b) $3^x + 9^x = 90$;
c) $3^x + \frac{27}{3^x} = 12$;
d) $5^x - 0{,}2^x = 4{,}8$;
e) $2\cdot 7^x + \frac{686}{7^x} = 112$;
f) $2\cdot 4^{\sqrt{x}} - 6\cdot 2^{\sqrt{x}} = -4$;
g) $4^x + 2\cdot 2^x + 2 = 4\cdot 2^{x+1} - 3$.

15. Oldd meg az egyenlőtlenségeket!

a) $5^{2x+1} \geq 25$;
b) $3^{2x+1} \geq \frac{1}{9}$;
c) $7^{-2x+1} < 49$;
d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x} \leq \frac{1}{3}$;
e) $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+5} \leq \frac{3}{5}$;
f) $4^{\frac{x+1}{x}} > 2$;
g) $3^{x^2} > 3^{x+6}$.

16. Add meg a következő kifejezések értékét! Munkádat ellenőrizd számológéppel!

lg 1; lg 10; lg 100; $\lg 10^5$; lg 0,1; $\lg 10^{-3}$.

17. Írd fel logaritmusjelöléssel is! Add meg *x* értékét!

a) $3^x = 729$;
b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = \frac{1}{8}$;
c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = 0{,}125$;
d) $5^x = \frac{1}{625}$;
e) $5^x = \sqrt[4]{5^3}$;
f) $10^x = \sqrt[5]{1000}$;
g) $10^x = 5^0$.

18. Írd fel hatvány alakba!

a) $\lg 1000 = 3$; $\lg 2 = 0{,}3010$; $\lg 10^{-2} = -2$;
$\log_5 \sqrt{5^5} = 2{,}5$; $\log_3 \frac{1}{81} = -4$; $\log_{\frac{1}{3}} 81 = -4$;

b) $\lg 0{,}01 = -2$; $\lg \sqrt{5} = 0{,}3495$; $\lg 5^0 = 0$;
$\lg 15^0 = 0$; $\log_3 55^0 = 0$; $\log_3 81 = 4$;
$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} = 4$.

19. Add meg a következő kifejezések értékét! Ne használj számológépet!

a) $\log_5 1 =$ $\log_5 5 =$ $\log_5 25 =$
$\log_5 \frac{1}{25} =$ $\log_5 \frac{1}{625} =$ $\log_5 0{,}2 =$

b) $\log_5 \sqrt{5} =$ $\log_5 \sqrt[6]{5^4} =$ $\log_5 \frac{1}{\sqrt[3]{5^4}} =$
$\log_{25} 5 =$ $\log_{25} \frac{1}{5} =$ $\log_{25} \sqrt[3]{5^5} =$

20. Számítsd ki!

a) $\log_2 8 + \log_3 \frac{1}{9} =$
b) $\log_{25} 5 - \log_8 2 =$
c) $\frac{1}{4}\log_3 27 - \log_{16} 4 =$
d) $\log_4 \frac{1}{16} + 3\cdot\log_5 \frac{1}{625} =$

21. Írd át 10-es alapú logaritmusra, és számológép segítségével add meg a három tizedesjegyre kerekített értékét!

$\log_3 5 =$ $\log_{18} 36 =$ $\log_{\frac{1}{3}} 13 =$
$\log_{0,5} 24 =$ $\log_{0,8} 3{,}56 =$ $\log_{0,35} \frac{1}{3} =$

22. Oldd meg a valós számok halmazán számológép segítségével a következő egyenleteket!
Két tizedesjegyre kerekíts!

a) $3{,}5\cdot 10^x = 38{,}3$;
b) $5\cdot 3^x = 19$;
c) $\frac{5^{3x}}{4} = 1{,}56$;
d) $\frac{4^{-2x}}{5^3} = 0{,}75$.

23. Számológép használata nélkül számítsd ki!

a) $\log_{12} 3 + \log_{12} 4 =$
b) $\log_6 120 - \log_6 20 =$
c) $\log_{\frac{1}{3}} 18 - \log_{\frac{1}{3}} 2 =$
d) $\log_5 \mathrm{tg}\, 45° =$
e) $\log_7 4 + \log_7 \sin 30° + \log_7 \mathrm{tg}\, 30° + \log_7 \sin 60° =$
f) $3\cdot\log_2 24 - \log_2 27 =$

24. Tudjuk, hogy $\log_5 A = 1{,}3979$ és $\log_5 B = -0{,}2518$. Számológép használata nélkül írd fel, hogy 5-nek melyik hatványa: $A\cdot B$; $\frac{B}{A}$; $B^2\cdot A$; $\frac{A^2}{B^3}$!

25. Mennyi a *V*?

a) $\lg V = \lg 27 - \lg 3$
b) $\lg V = 4\lg 3 + \lg 5$
c) $\lg V = \frac{\lg 81}{2}$
d) $\lg V = 3\lg 5 + \lg 24 - 2\lg 30$
e) $\lg V = -2\lg 5 + 3\lg 2$

26. Végezd el a számításokat a logaritmus azonosságainak felhasználásával!

a) $5^{\log_5 7}$; $4^{\log_2 5}$; $2^{\log_4 5}$; $5^{\frac{1}{2}\log_5 625}$; $0{,}5^{\log_4 5}$; $0{,}25^{\log_4 5}$.

b) $3^{\frac{1}{3}\log_3 343}$; $25^{\log_5 2}$; $81^{\log_3 5}$; $16^{\log_2 5}$; $0{,}25^{\log_4 5}$; $0{,}2^{\log_5 7}$.

c) $10^{-\lg 3}$; $10^{2-\lg 2{,}5}$; $10^{\lg 5+\lg 4}$; $100^{-\lg 5}$; $0{,}1^{-\lg 3}$; $0{,}01^{\lg 3+\lg 11}$.

27. Ábrázold közös koordináta-rendszerben, és jellemezd a következő függvényeket!

a) $x \mapsto \log_2 x$; $x \mapsto \log_2 x+1$; $x \mapsto \log_2 x-2$.

b) $x \mapsto 2\log_2 x$; $x \mapsto -\log_2 x$; $x \mapsto 3\log_2 x$.

c) $x \mapsto \log_{0,5} x$; $x \mapsto \log_{0,5}\left(\frac{1}{2}x\right)$; $x \mapsto 1+\log_2 x$.

d) $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}}(2x)$; $x \mapsto 1-\log_{\frac{1}{2}} x$; $x \mapsto 1+2\log_{\frac{1}{2}} x$.

28. Milyen x-ekre értelmezhetők az alábbi kifejezések?

a) $\log_3(x-3)$;

b) $\log_5(-2x+9)$;

c) $\log_8 \dfrac{1}{x-4}$;

d) $\lg \dfrac{x+1}{x-1}$;

e) $\lg \dfrac{2x+3}{x+2}$;

f) $\lg \lg x$;

g) $\dfrac{\lg(x+1)}{x-1}$;

h) $\log_{0,5}|x|$;

i) $\log_{0,5}|x+2|$;

j) $\log_{0,5}(|x|-1)$.

29. Oldd meg az egyenleteket! Ne felejtsd el megvizsgálni, hol értelmezhetők a logaritmuskifejezések!

a) $\lg(x-2)+\lg x=\lg 8$;

b) $\log_2 x+\log_2(x-99)=\log_2 100$;

c) $\lg 3x-\lg 2x=\lg 3-\lg x$;

d) $\log_3(x^2-2x-34)=0$;

e) $\log_5[(x-4)(x-2)+2]=1$;

f) $\lg(x+6)-\dfrac{\lg(2x-3)}{2}=2-\lg 25$;

g) $\lg\sqrt{x-30}+\dfrac{1}{2}\lg(x+30)=1+2\lg 2$;

h) $\lg(7-x)-2=\dfrac{\lg(28+x)}{2}-\lg 50$.

30. Oldd meg az egyenleteket! Két tizedesjegyre kerekíts!

a) $3{,}5\cdot 4{,}7^{3x+5}=20$;

b) $3250\cdot\dfrac{1}{5^{-4x+1}}=5630$;

c) $1000=526\cdot\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-\frac{x}{3}+2}$.

31. Oldd meg az egyenlőtlenségeket!

a) $\log_3(4x-3)>\log_3(2x+5)$;

b) $\log_{\frac{1}{3}}(3x-5)>\log_{\frac{1}{3}}(5x+2)$;

c) $\log_5(3x-4)\le 0$;

d) $\log_{0,5}(2-4x)\le 1$.

32. Nagymama idősödik, már nem bírja a hatalmas veteményes gondozását. Nagypapa úgy döntött, hogy minden évben $\frac{1}{5}$ részét befüvesíti, hiszen füvet nyírni egyszerűbb, pláne az új fűnyíróval. Hány év múlva csökken az eredeti veteményes a 10%-ára?

33. Egy anyanyúlnak félévente átlagosan 6 kölyke születik. Az újszülött nyuszik 5 hónap után lesznek ivarérettek. A vemhesség ideje 1 hónap, és körülbelül egyenlő arányban születnek hímek és nőstények.
Egy újdonsült nyúltenyésztő egy pár ivarérett nyuszit vásárol, egy hímet és egy nőstényt. Várhatóan mikor éri el a 100 nyuszit, ha minden nyuszinak, amint lehet, kölykei születnek?

34. Kovács apuka év végi jutalmat kapott a cégtől, ahol dolgozik. Azon gondolkodik, hogyan fektesse be a pénzt. Végül két ajánlat tetszik neki a legjobban. Az egyik évi 10% kamatot garantál, a másik félévente 5%-ot. Ha nem veszi fel a kamatot, azt is az alaptőkéhez írják. Melyik befektetést válassza, ha öt évre akarja lekötni a pénzét?

35. A Kovács gyerekek is kedvet kaptak a befektetéshez. Ők is utánajártak, hogy összegyűlt zsebpénzüket milyen feltételekkel tudnák lekötni. Hajni egy olyan bankot talált, ahol évi 8%-ot adnak, ha három évre leköti a pénzét. Csilla egy másik banknál havi 0,7%-os kamatot kapna, de neki csak 34 hónapra kéne lekötnie a pénzét. Ki mennyi pénzhez jutna a futamidő végén, ha 50 000 Ft-ot tudnak befektetni fejenként? Kinek a befektetése érné meg jobban?

36. Tóth úr összefutott egy régi ismerősével, aki elképesztő ajánlatot tett neki. Nagy lelkendezve meséli otthon, hogy ez az ismerőse azt mondta, ad neki 1 000 000 eurót. Fia már el is képzelte az új biciklijét, amikor apukája tovább mesélte a történetet, miszerint van egy feltétel. Másnap egy centtel tartozik az ismerősnek, a következő nap már a kétszeresével (2 centtel), harmadnap az előző napi kétszeresével és így tovább. Csak a harmincadik napon kell fizetni, de hát ez nem lehet komoly összeg centekből! Mennyi lesz a család tartozása a 30. napon?

37. Egy új hitelkártyát ajánlottak Szabó anyukának, aki már évek óta szerette volna felújítani a konyháját. Úgy számolta, 550 000 Ft elég is lenne. Igazán kedvezők a feltételek: csak havi 2,3% a kamat és egy évig nem kell elkezdeni törleszteni. Gimnazista gyereke rögtön utánaszámolt, mennyi pénzzel is fognak tartozni egy év múlva. Mennyi lenne a tartozás? Ez éves hány % kamatot jelent? Tényleg kedvezők a feltételek?

38. Egy város lakosainak száma 1997 és 2010 között exponenciális növekedést mutatott. 1997. január 1-jén 130 300 lakosa volt a városnak, 2010. január 1-jén 132 000.

a) Hányszorosára nőtt egy év alatt a város lakosainak száma?

b) Írj fel hozzárendelést, mely megmutatja, hogy *t* évvel 1997 után hány lakosa volt a városnak!

c) Hány lakosa volt a városnak 2010. január 1-jén?

39. A bizmut radioaktív izotópjának bomlása során a *t* nap múlva még el nem bomlott részecskék számát a következő egyenlet írja le: $N(t) = N_0 \cdot 0{,}87^t$, ahol N_0 a mérés kezdetekor a bizmutizotópok száma.

a) Ha kezdetben $4{,}2 \cdot 10^{25}$ darab bizmutizotóp volt egy mintában, akkor mennyi bizmutizotóp lesz a mintában 3 hét után?

b) Mennyi a folyamatban a felezési idő?

40. A polónium radioaktív izotópjának száma egy mintában 1 hónap alatt 1 mólról ($6 \cdot 10^{23}$-ról) $5{,}16 \cdot 10^{23}$ db atomra csökkent. A radioaktív bomlás egy exponenciális folyamat.

a) Hányadrészére csökken a polóniumizotópok száma fél év alatt?

b) Mennyi idő alatt csökken 20% alá a polóniumizotópok száma?

c) Mennyi a folyamatban a felezési idő?

41. Az egyik radioaktív ólomizotóp felezési ideje 27 perc.

a) Írj fel hozzárendelést, amely megmutatja, hogy egy kezdetben 3 mól ólomizotópot tartalmazó mintában *t* perc múlva hány el nem bomlott ólomrészecske van!

b) A bizmut felezési ideje 19,7 perc. Egy mérés kezdetekor ugyanannyi bizmut- és ólomizotóp van egy mintában. Mennyi idő múlva lesz ólomból tízszer annyi darab, mint bizmutból?

42. Hajni szeret rajzolni. A következő ábrán látjátok, minden szakaszt elharmadolt, és a középső harmad helyett egy egyenlő oldalú háromszög két oldalát rajzolta be. Hány kis szakaszból állna a műve, ha egymás után 5-ször végezné el a harmadolást? Eredetileg egy 20 cm-es szakaszból indult ki.

a) Hány lépés után állna a rajza több mint 5000, illetve több mint 1 000 000 szakaszból?

b) Mekkora a törött vonal hossza a 10., 50., 100. és a 150. lépés után? Mit gondolsz, mekkora a legnagyobb vonalhossz?

43. Érettségi feladat, 2013. október16.

A kólibaktérium (hengeres) pálcika alakú, hossza átlagosan 2 mikrométer ($2 \cdot 10^{-6}$ m), átmérője 0,5 mikrométer ($5 \cdot 10^{-7}$ m).

a) Számítsa ki egy 2 mikrométer magas és 0,5 mikrométer átmérőjű forgáshenger térfogatát és felszínét! Számításainak eredményét m^3-ben, illetve m^2-ben, normálalakban adja meg!

Ideális laboratóriumi körülmények között a kólibaktériumok gyorsan és folyamatosan osztódnak, számuk 15 percenként megduplázódik. Egy tápoldat kezdetben megközelítőleg 3 millió kólibaktériumot tartalmaz.

b) Hány baktérium lesz a tápoldatban 1,5 óra elteltével? A baktériumok számát a tápoldatban *t* perc elteltével a $B(t) = 3\,000\,000 \cdot 2^{\frac{t}{15}}$ összefüggés adja meg.

c) Hány perc alatt éri el a kólibaktériumok száma a tápoldatban a 600 milliót? Válaszát egészre kerekítve adja meg!

44. Érettségi feladat, 2011. május

Egy új típusú, az alacsonyabb nyomások mérésére kifejlesztett műszer tesztelése során azt tapasztalták, hogy a műszer által mért p_m és a valódi p_v nyomás között a $\lg p_m = 0{,}8 \cdot \lg p_v + 0{,}301$ összefüggés áll fenn.

A műszer által mért és a valódi nyomás egyaránt pascal (Pa) egységekben szerepel a képletben.

a) Mennyit mér az új műszer 20 Pa valódi nyomás esetén?

b) Mennyi valójában a nyomás, ha a műszer 50 Pa értéket mutat?

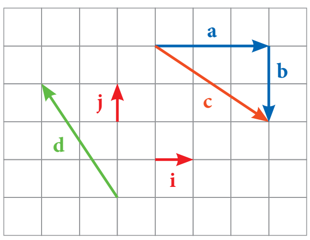
c) Mekkora nyomás esetén mutatja a műszer a valódi nyomást?

A pascalban kiszámított értékeket egész számra kerekítve adja meg!

62 Vektorok ismétlése

BEVEZETŐ

Adva van a síkon az **i**, **j** bázisrendszer. A bázisvektorok hossza 1, és az **i** bázisvektor pozitív irányú 90°-os elforgatottja egyenlő a **j** bázisvektorral.



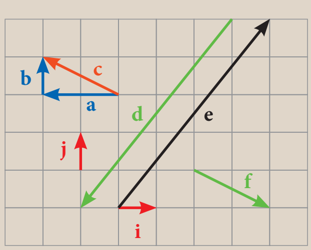
Az ábra szerinti vektorokra igazak a következő kijelentések:

1. **a** = 3**i**, mert az **a** párhuzamos (egyállású) és egyirányú az **i**-vel, hossza pedig 3.
2. **b** = −2**j**, mert a **b** párhuzamos a **j**-vel, de vele ellentétes irányú, hossza pedig 2.
3. **c** = **a** + **b**, ami a két vektor összegére adott definícióból adódik.
4. A **c** felírható az **i**, **j** bázisvektorok segítségével: **c** = 3**i** + (−2)**j**.
5. Azt mondjuk, hogy az **i**, **j** bázisrendszerben a **c** első vektorkoordinátája 3, a második vektorkoordinátája pedig −2.
6. **d** = −2**i** + 3**j**, tehát a **d** első vektorkoordinátája −2, a második vektorkoordinátája pedig 3.
7. Megegyezés szerint egy-egy rendezett számpárral is megadhatjuk az ábra összes vektorát: **c**(3; −2), **d**(−2; 3), **a**(3; 0), **b**(0; −2). Sőt, maguk a bázisvektorok is felírhatók ebben az alakban: **i**(1; 0) és **j**(0; 1).
8. Az **i**, **j** bázisrendszerben megadott vektorok hosszát a vektorkoordinátáikkal egyszerűen ki tudjuk számítani, például:

$$|\mathbf{c}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13},$$
$$|\mathbf{d}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

FELADAT

1. **a)** Add meg az **i**, **j** bázisrendszerben az ábra mindegyik vektorának koordinátáit!



b) Számítsd ki az ábra mindegyik vektorának a hosszát a megadott koordináták segítségével!

c) Igaz-e, hogy a **g**(−3; 1,5) vektor párhuzamos (egyállású) az ábra egyik vektorával?

d) Igaz-e, hogy 0,4**e** = 0,4**d**?

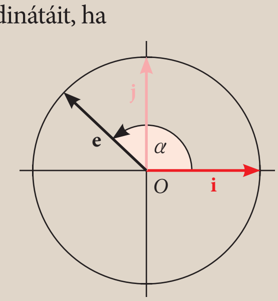
e) Igaz-e, hogy |0,4**e**| = 0,4 · |**d**|?

f) Szerkeszd meg a **v** = −**a** + 4**b** vektort, és add meg a koordinátáit!

g) Forgasd el a **c**-t (+90°)-kal, és add meg az elforgatott vektor koordinátáit!

2. Az **i**, **j** bázisrendszerben az **i** bázisvektort α szöggel elforgattuk, és az így kapott vektort **e**-vel jelöltük. Add meg az **e** vektorkoordinátáit, ha

a) $\alpha = 270°$;
b) $\alpha = 7{,}5\pi$ (radián);
c) $\alpha = 27\pi$ (radián);
d) $\alpha = -150°$;
e) $\alpha = -1500°$;
f) $\alpha = 3{,}9$ (radián)!



ELMÉLET

Dolgozzatok párokban!
A pár egyik tagja takarja le a feleleteket, és úgy próbáljon válaszolni a kérdésekre. A pár másik tagja ellenőrizze, és szükség esetén javítsa a válaszokat. Amikor a kérdések végére érkeztetek, akkor cseréljétek meg a szerepeket!

Kérdés	Felelet
Mit jelent az, hogy a vektorösszeadás kommutatív?	Azt, hogy tetszőleges **u** és **v** esetén $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.
Mit jelent a $c\mathbf{v}$, ha c egy pozitív szám, és **v** egy vektor?	Egy olyan vektort, amely a **v**-vel egyirányú, és az abszolút értéke $c \cdot \lvert\mathbf{v}\rvert$.
Mit jelent a $c\mathbf{v}$, ha c egy negatív szám, és **v** egy vektor?	Egy olyan vektort, amely a **v**-vel egyállású, ellentétes irányú, és az abszolút értéke $\lvert c\rvert \cdot \lvert\mathbf{v}\rvert$.
Melyik tulajdonság igaz tetszőleges c és d valós szám, valamint **u** és **v** vektorok esetén? $(cd)\mathbf{u} = c(d\mathbf{u})$; $c\mathbf{v} + d\mathbf{v} = (c + d)\mathbf{v}$; $c\mathbf{u} + c\mathbf{v} = c(\mathbf{u} + \mathbf{v})$.	Mindegyik.
Egy sík két vektora milyen tulajdonság esetén alkot egy bázisrendszert?	Ha nem egyállásúak.
Mit jelent az, hogy egy **u**, **v** bázisrendszerben az **a** első koordinátája k és a második koordinátája m?	Azt jelenti, hogy $\mathbf{a} = k\mathbf{u} + m\mathbf{v}$.
Mit fejez ki az $\mathbf{a}(a_1;\ a_2)$ jelölés?	Azt, hogy az **a** első koordinátája a_1 és a második koordinátája a_2.
Milyen hosszú az **i**, **j** bázisrendszerben megadott $\mathbf{a}(a_1;\ a_2)$?	$\lvert\mathbf{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

FELADAT

3. Az ABC szabályos háromszögben az **a** vektor A-ból B-be mutat, **b** vektor pedig A-ból C-be mutat. Készíts ábrát! Add meg az **a** és **b** bázisrendszerben

a) $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{CB}$ vektorok koordinátáit!

b) annak a vektornak a koordinátáit, amely B-ből az AB oldal felezőpontjába mutat!

c) annak a vektornak a koordinátáit, amely A csúcsból a BC oldal felezőpontjába mutat!

HÁZI FELADAT

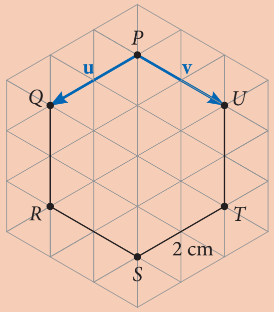
1. Az $ABCD$ négyzetben az **a** vektor az A-ból a B-be, a **c** vektor pedig az A-ból a C-be mutat. Ez az **a** és **c** egy bázisrendszert alkot. Add meg ebben a bázisrendszerben a négyzet oldal- és átlóvektorainak a koordinátáit! (Minden oldalra és minden átlóra két vektor illeszkedik!)

2. Az **i**, **j** bázisrendszerben adottak a következő vektorok: $\mathbf{a}(3;\ -4)$, $\mathbf{b}(12;\ 5)$, $\mathbf{c}(-20;\ -21)$.

a) Számítsd ki a hosszukat!

b) Ábrázold az $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ összegvektort és az $\mathbf{a} - \mathbf{c}$ különbségvektort, és add meg a koordinátáikat!

3. Jelöljük egy 2 cm-es oldalhosszúságú szabályos hatszög P csúcsából induló két oldalvektorát **u**-val, illetve **v**-vel! Ez az **u** és **v** egy bázisrendszert alkot. Add meg ebben a bázisrendszerben a hatszög



a) oldalvektorainak a koordinátáit;

b) átlóvektorainak az abszolút értékét;

c) P-ből induló átlóvektorainak a koordinátáit!

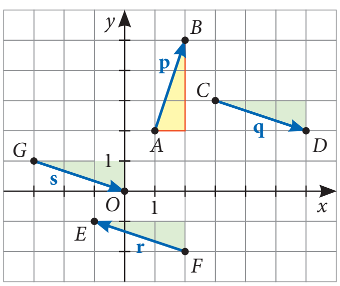
63 Vektorok a koordináta-rendszerben

KIDOLGOZOTT FELADAT

A diákok a matematikaórán a következő feladatot kapták:

Milyen kapcsolat van a $\mathbf{p} = \overrightarrow{AB}$, a $\mathbf{q} = \overrightarrow{CD}$, az $\mathbf{r} = \overrightarrow{FE}$ és az $\mathbf{s} = \overrightarrow{GO}$ között, ha O az origó, és a pontok koordinátái a következők?

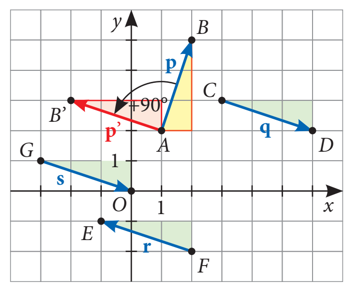
Pont	A	B	C	D	E	F	G
1. koordinátája	1	2	3	6	−1	2	−3
2. koordinátája	2	5	3	2	−1	−2	1



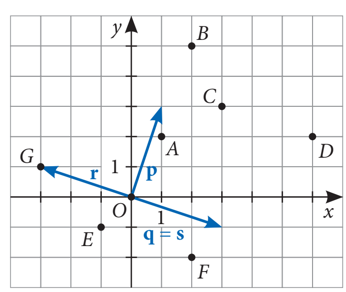
Először a rajz alapján tettek megfigyeléseket:
Dönci: Ezek a vektorok mind egyenlők, mert az ábrámon látható négy derékszögű háromszög egybevágó.
Bence: Két vektor azonos, de vannak ellentett vektorok is!
Dönci: Én úgy látom, hogy az $\overrightarrow{AB}$ merőleges a $\overrightarrow{CD}$-re.
Jocó: Ha eltolom a 4 vektort úgy, hogy a kezdőpontjuk az origóban legyen, akkor minden sokkal jobban látszik!
Vajon kinek van igaza?

Megoldás
Dönci téved. Abban igaza van, hogy a négy derékszögű háromszög egybevágó, ezért a négy vektor hossza (abszolút értéke) egyenlő: $|\mathbf{p}| = |\mathbf{q}| = |\mathbf{r}| = |\mathbf{s}|$. Az is igaz, hogy a **q**, **r**, **s** vektorok egyállásúak (párhuzamosak), azonban a **p** állása különbözik a másik hárométól. Az egyállású vektorok között is csak a **q** és az **s** azonos irányú, az **r** pedig ezekkel ellentétes irányú. Tehát csak a $\mathbf{q} = \mathbf{s}$ (azaz $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{GO}$) állítás igaz Dönci állításai közül. Tanultuk, hogy **két vektort akkor nevezünk egyenlőnek, ha abszolút értékük, állásuk és irányuk is megegyezik**.

Bencének igaza van. Az **s** és **q** vektor megegyezik. A $\overrightarrow{GO}$ és $\overrightarrow{CD}$ irányított szakaszok ugyanazt a vektort határozzák meg. Az **r** és **q** vektorok pedig csak irányukban különböznek, ezért ezek **ellentett** vektorok.



Dönci jól látja a **merőlegességet**. Ha például a **p**-t elforgatjuk valamelyik irányban 90°-kal, akkor vagy az **r**, vagy az $\mathbf{s} = \mathbf{q}$ vektort kapjuk meg. [Az ábrán (+90°)-kal forgattuk el a **p**-t.] A **p** ezért merőleges mindhárom másik vektorra.



Jocó ötlete pedig arra mutat rá, hogy mindegy, hogy a vektort melyik kezdőpontból rajzolom fel. A kezdőpont és a rajz ahhoz ad segítséget, hogy szemléltessem és összehasonlítsam a vektorokat. Ha eltolom az irányított szakaszt, a vektor nem változik meg.

FELADAT

1. Dolgozz a Kidolgozott feladatban megadott vektorokkal!

a) Add meg a vektorok vektorkoordinátáit!

b) Mutasd meg a vektorkoordináták segítségével, hogy a négy vektor hossza egyenlő!

c) Hogyan látható a vektorkoordinátákból, hogy $\mathbf{q} = \mathbf{s}$ és $\mathbf{r} = -\mathbf{s}$?

d) Hogyan látható a vektorkoordinátákból, hogy a $\mathbf{p}$ (+90°)-os elforgatottja éppen az $\mathbf{r}$?

2. Folytasd az előző feladatot! Rajzold meg az $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ összegvektort, illetve az $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{FE}$ különbségvektort!

a) Mik ezeknek a vektoroknak a koordinátái?

b) Mekkora ezeknek a vektoroknak az abszolút értéke?

3. Add meg az összes olyan vektort a koordinátáival az $\mathbf{i}$; $\mathbf{j}$ bázisrendszerben, mely egyállású $\mathbf{u}$ vektorral, és fele olyan hosszú, mint $\mathbf{u}$, ha

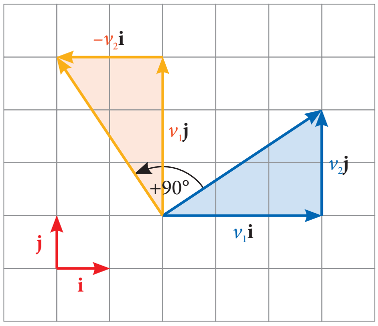
a) $\mathbf{u} = 6\mathbf{i}$ **b)** $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

4. Add meg az összes olyan vektort a koordinátáival az $\mathbf{i}$; $\mathbf{j}$ bázisrendszerben, mely merőleges $\mathbf{v}$ vektorra, és háromszor olyan hosszú, mint $\mathbf{v}$, ha

a) $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ **b)** $\mathbf{v}\,(-1; 2)$

ELMÉLET

1. Az $A(a_1; a_2)$ pontból a $B(b_1; b_2)$ pontba vezető $\overrightarrow{AB}$ első koordinátája $b_1 - a_1$, második koordinátája pedig $b_2 - a_2$, tehát $\overrightarrow{AB}\,(b_1 - a_1; b_2 - a_2)$. A $\overrightarrow{BA}\,(a_1 - b_1; a_2 - b_2)$ az $\overrightarrow{AB}$ ellentettje.



2. Ha $\mathbf{a}(a_1; a_2)$, $\mathbf{b}(b_1; b_2)$ és c valós szám, akkor
   - $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ koordinátái a megfelelő koordináták összegével egyenlők: $\mathbf{a} + \mathbf{b}(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$;
   - $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ koordinátái a megfelelő koordináták különbségével egyenlők: $\mathbf{a} - \mathbf{b}(a_1 - b_1; a_2 - b_2)$;
   - $c\mathbf{a}$ koordinátái a megfelelő koordináták c-szeresével egyenlők: $c\mathbf{a}(ca_1; ca_2)$.

3. Ha egy vektort 90°-kal elforgatunk, akkor a koordinátái felcserélődnek, és az egyiknek az előjele megváltozik.
   A $(v_1; v_2)$, vektor (+90°)-os elforgatottja: $(-v_2; v_1)$.

HÁZI FELADAT

1. Rajzold meg a Kidolgozott feladatban szereplő négy vektor összegét!

a) Mik az összegvektor koordinátái?

b) Hány egység az összegvektor hossza?

2. Add meg az összes olyan vektort az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ bázisrendszerben, amely egyállású az $\mathbf{u}$-val, és 2-szer olyan hosszú, mint az $\mathbf{u}$, ha

a) $\mathbf{u} = -3\mathbf{j}$; **c)** $\mathbf{u}(4; 0)$;

b) $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$; **d)** $\mathbf{u}(1; -1)$!

3. Add meg az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ bázisrendszer összes olyan vektorát, amely merőleges az $\mathbf{u}$-ra, és 2-szer olyan hosszú, mint az $\mathbf{u}$, ha

a) $\mathbf{u} = -3\mathbf{j}$; **c)** $\mathbf{u}(4; 0)$;

b) $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$; **d)** $\mathbf{u}(1; -1)$!

4. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ és $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

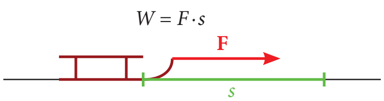
a) Mik az $(\mathbf{u} + \mathbf{v})$, $(\mathbf{u} - \mathbf{v})$, $(\mathbf{v} - \mathbf{u})$ koordinátái?

b) Mennyi $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|$, $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|$, $|\mathbf{v} - \mathbf{u}|$?

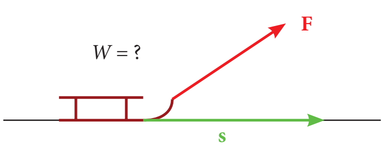
64 Vektorok skaláris szorzata

BEVEZETŐ

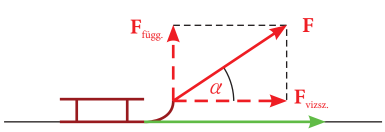
Ha egy szánkót egyenes úton s távolságon F nagyságú vízszintes erővel előrefelé húzunk, akkor eközben a szánkón $W = F \cdot s$ nagyságú mechanikai munkát végzünk. (Az elmozdulással ellentétes irányú, F nagyságú erő munkája pedig $W = -F \cdot s$, azaz negatív lenne.)



A valóság azonban az, hogy a szánkót általában nemcsak vízszintesen, hanem kissé felfelé is húzzuk. Az erő és az elmozdulás is *vektormennyiségek*, nagyságuk és irányuk is van, és – mint az ábrán látható is – egyáltalán nem biztos, hogy a két vektor iránya megegyezik. Hogyan számítsuk ki a végzett mechanikai munkát az ábra szerinti esetben?



Fizikaórán az erővektort az elmozdulás irányába eső (most vízszintes) és arra merőleges (függőleges) összetevőre bontottuk fel. Ezek az összetevők az ábra alapján: $\mathbf{F}_{\text{függ}} = \mathbf{F} \cdot \sin\alpha$ és $\mathbf{F}_{\text{vízsz}} = \mathbf{F} \cdot \cos\alpha$ nagyságúak.



Mivel a szánkó függőleges irányban nem mozdul el, ezért az **F** erő függőleges összetevője nem végez mechanikai munkát. A vízszintes összetevő az elmozdulás irányába mutat, tehát az **F** erő munkája: $W = F_{\text{vizsz}} \cdot s$. Ez egyenértékű a $W = |\mathbf{F}| \cdot \cos\alpha \cdot |\mathbf{s}|$ összefüggéssel.

Ez az összefüggés akkor is teljesül, ha az **F** erő és az **s** elmozdulás szöge nagyobb, mint 90°.
Látható, hogy az **F** erő munkája csak az **F** és **s** vektoroktól függ (a két vektor nagyságától és az általuk bezárt szögtől).

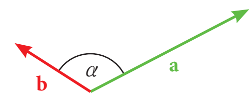
A munkavégzés kérdésének fizikai tárgyalását egyszerűsíti, ha a munkára vonatkozó eredeti összefüggést erő- és elmozdulás*vektorok* esetén is ugyanabban a formában írhatjuk: $W = \mathbf{Fs}$.
Ehhez az **Fs** „szorzatot" úgy kell értelmeznünk, hogy $\mathbf{Fs} = |\mathbf{F}| \cdot |\mathbf{s}| \cdot \cos\alpha$ teljesüljön.
Az **Fs** „szorzat" tehát egy olyan számot (szakkifejezéssel: *skalármennyiséget*) jelöl, amelyet a két vektor abszolút értéke és a két vektor által bezárt α szög határoz meg.

FELADAT

1. Számítsd ki az állandó **F** erő munkáját (joule-ban), ha $|\mathbf{F}| = 50$ N, az **s** elmozdulásvektor hossza $|\mathbf{s}| = 0{,}4$ m, a két vektor által bezárt szög pedig

a) $\alpha = 60°$; **b)** $\alpha = 120°$; **c)** $\alpha = 90°$; **d)** $\alpha = 0°$!

ELMÉLET



Definíció: Ha két vektor, az **a** és a **b** szöge α, akkor az $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\alpha$ számot az **a** és a **b** ***skaláris szorzatának*** nevezzük. *Jele:* **ab** vagy $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

Azaz: $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\alpha$

Ha a két vektort a kezdő- és végpontjával adjuk meg, akkor a vektorok jele közé szorzópontot teszünk. Például az $\overrightarrow{AB}$ és az $\overrightarrow{AC}$ vektor skaláris szorzatát így jelöljük: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Megjegyzések:

1. Két vektor hajlásszöge alatt az általuk bezárt kisebbik szöget értjük: $\alpha \leq 180°$.
2. Jegyezd meg, hogy két vektor skaláris szorzata mindig egy szám!
3. Ha egy egyenes úton mozgó test elmozdulása **s**, akkor a testre ható (állandó) **F** erő munkája a két vektor skaláris szorzatával egyenlő: $W = \mathbf{Fs}$.
4. Két vektor esetében egy másfajta szorzás is értelmezhető. Erről a következő lecke végén olvashatsz.

FELADAT

2. Az egy síkban lévő **a**, **b**, **c**, **d** és **e** vektorokról a következőket tudjuk:
$|\mathbf{a}| = 2{,}5$, $|\mathbf{b}| = 4$, **c** az **a** 180°-os elforgatottja, **d** az **a** (pozitív irányú) 270°-os elforgatottja, **e** az **a** 1080°-os elforgatottja, továbbá $\mathbf{ab} = 5$.

a) Mekkora az **a** és a **b** szöge?
b) Számítsd ki az **ac**, **ad** és **ae** skaláris szorzatokat!
c) Számítsd ki a **ba**, **bc**, **bd** és **be** skaláris szorzatokat!
d) Mekkora az **af**, ha **f** az **a** 99°-os elforgatottja?

3. Határozd meg, mekkora szöget zárnak be a vektorok!
a) $|\mathbf{a}| = 5$; $|\mathbf{b}| = 4$ és $\mathbf{ab} = 10$
b) $|\mathbf{u}| = 2{,}5$; $|\mathbf{v}| = 6$ és $\mathbf{uv} = -12$

HÁZI FELADAT

1. $|\overrightarrow{AB}| = 2$, $|\overrightarrow{AC}| = 7$. Mennyi az $\overrightarrow{AB}$ és az $\overrightarrow{AC}$ skaláris szorzata, ha a két vektor szöge
a) 43°; **c)** 90°;
b) 103°; **d)** 180°?

2. $|\overrightarrow{AB}| = 32$, $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. Mennyi az $\overrightarrow{AB}$ és az $\overrightarrow{AC}$ skaláris szorzata?

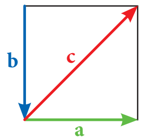
3. Mekkora az **F** erővektor és az **s** elmozdulásvektor szöge, ha $|\mathbf{F}| = 5$ (N), $|\mathbf{s}| = 14$ (m) és a végzett munka
a) 70 (J);
b) 35 (J);
c) 0 (J);
d) −35 (J)?

4. Egy meredek hegyoldal emelkedési szöge 42°, hossza 550 m.
a) Mennyi munkát végez a gravitációs erő az ezen a hegyoldalon lesíző 60 kg tömegű sportolón?
b) Mennyi munkát végez a gravitációs erő azon a 60 kg tömegű hegymászón, aki fel szeretne mászni ezen a hegyoldalon?
(A gravitációs erő függőlegesen lefelé mutat, és közelítőleg 600 N nagyságú. Számolj ezzel az értékkel!)

65 A skaláris szorzás tulajdonságai

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy 3 cm-es oldalhosszúságú négyzet oldalvektorai (az ábrának megfelelően) **a** és **b**, a megjelölt átlóvektora **c**. Mennyi



a) **ab** és **ba**;
b) **ac** és **ca**;
c) **bc** és **cb**?

Megoldás

a) A két vektor abszolút értéke 3, a szögük 90°-os, ennek a koszinusza 0, ezért

$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\alpha = 3 \cdot 3 \cdot 0 = 0$ és

$\mathbf{ba} = |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{a}| \cdot \cos\alpha = 3 \cdot 3 \cdot 0 = 0.$

b) Itt $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{c}| = 3 \cdot \sqrt{2}$, a két vektor szöge 45°-os, ennek a koszinusza $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ezért

$\mathbf{ac} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{c}| \cdot \cos\alpha = 3 \cdot (3 \cdot \sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$

$= 9 \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 9 \cdot 1 = 9$ és

$\mathbf{ca} = |\mathbf{c}| \cdot |\mathbf{a}| \cdot \cos\alpha = (3 \cdot \sqrt{2}) \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 9.$

c) Itt $|\mathbf{b}| = 3$, $|\mathbf{c}| = 3 \cdot \sqrt{2}$, a szögük 135°-os, ennek a koszinusza $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, ezért

$\mathbf{bc} = |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| \cdot \cos\alpha = 3 \cdot (3 \cdot \sqrt{2}) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$

$= -9 \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = -9 \cdot 1 = -9$ és

$\mathbf{cb} = (3 \cdot \sqrt{2}) \cdot 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -9.$

ELMÉLET

Tétel: Két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor 0, ha a két vektor merőleges egymásra.

Megjegyzés: Ebben a tételben figyelembe vesszük, hogy a nullvektor iránya (definíció szerint) tetszőleges, tehát ez minden vektorra merőleges.

A skaláris szorzás további tulajdonságai:

- Minden **a** és **b** esetében **ab** = **ba** (mert mindkettő ugyanannak a három számnak a szorzata);
- minden **a**, **b** és c valós szám esetében $c(\mathbf{ab}) = (c\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(c\mathbf{b})$;
- két egyállású és egyirányú vektor skaláris szorzata az abszolút értékek szorzatával egyenlő, mert a vektorok szöge 0°, és $\cos 0° = 1$;
- két egyállású és ellentétes irányú vektor skaláris szorzata az abszolút értékek szorzatának a (−1)-szeresével egyenlő, mert a vektorok szöge 180°, és $\cos 180° = -1$.

Megjegyzések

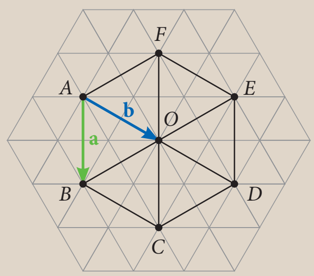
- Az **aa** skaláris szorzat jelölésére használjuk az $\mathbf{a}^2$ szimbólumot is. Mivel $\mathbf{aa} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{a}| \cdot \cos 0° = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{a}| \cdot 1 = |\mathbf{a}|^2$, ezért az új jelölés szerint $\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2$. Tehát egy vektor önmagával vett skaláris szorzata a vektor hosszának (abszolút értékének) négyzetével egyenlő. Ha az **a** hosszát egyszerűen a-val jelöljük, akkor így is írhatjuk: $\mathbf{a}^2 = a^2$.
- Mivel $c(\mathbf{ab}) = (c\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(c\mathbf{b})$, ezért mindhárom szám helyett egyszerűen zárójel nélkül a $c\mathbf{ab}$ jelet használjuk.

FELADAT

1. Az **i** és a **j** két egymásra merőleges egységvektor. Számítsd ki a következő skaláris szorzatokat!

a) **ii**; **c)** **ji**; **e)** (**i** + **j**)**i**; **g)** (**i** − **j**)**i**;
b) **ij**; **d)** **j**(−**j**); **f)** (**i** + **j**)**j**; **h)** (**i** − **j**)**j**.

2. Az ábrán látható szabályos hatszög minden oldala két egység hosszúságú. Számítsd ki a következő skaláris szorzatokat: **ab**, **ba**, **bb**, 2(**ab**), **a**(2**b**), (2**a**)**b**, **a**(**a** − **b**)!



3. Rajzold be az ábrába a *B* pontból induló **b** − 2**a** vektort! Számítsd ki a **b**(**b** − 2**a**) szorzatot kétféleképpen:

a) Először állapítsd meg a **b** − 2**a** vektor hosszát és a **b** vektorral bezárt szögét, majd számítsd ki a két vektor skaláris szorzatát!

b) Igazold, hogy **bb** − 2**ab** = **b**(**b** − 2**a**)!

4. Mekkora szöget zár be két egységvektor egymással, ha skaláris szorzatuk:

a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; **b)** 0; **c)** −1; **d)** 0,5?

5. Bizonyítsd be az ELMÉLET részben megfogalmazott tételt!

a) Indokold, hogy ha két vektor merőleges egymásra, akkor a skaláris szorzatuk 0!

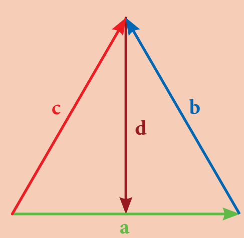
b) Indokold, hogy ha két vektor skaláris szorzata 0, akkor azok merőlegesek egymásra! Figyelj arra az esetre, ha a vektorok között van nullvektor!

HÁZI FELADAT

1. Az **i** és a **j** két egymásra merőleges egységvektor. Számítsd ki a következő skaláris szorzatokat!

a) **i**(−2**i**); **d)** 2**j** (**j** − **i**);
b) −3**i**(**j** − **i**); **e)** (**i** + **j**)**i** + (**i** + **j**)**j**;
c) **jj**; **f)** (**i** − **j**)**i** − (**i** − **j**)**j**.

2. Megrajzoltuk egy 6 cm oldalhosszúságú szabályos háromszög három oldalvektorát és egyik magasságvektorát.



a) Válassz ki a 4 vektor közül minden lehetséges módon kettőt-kettőt, és számítsd ki mindegyik esetben a kiválasztott két vektor skaláris szorzatát! (Figyelj a vektorok szögére!)

b) Igaz-e, hogy **c** + **d** = $\frac{1}{2}$**a**?

c) Mennyi $(\mathbf{c}+\mathbf{d})^2$ [azaz mennyi a (**c** + **d**)(**c** + **d**) skaláris szorzat]?

d) Mennyi $\mathbf{c}^2$, $\mathbf{d}^2$, 2**cd**, és mennyi ezek összege, vagyis a $\mathbf{c}^2 + 2\mathbf{cd} + \mathbf{d}^2$?

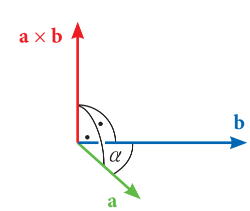
e) Számold ki, mennyi az **ac** + **ad** összeg, és mennyi az **a**(**c** + **d**) skaláris szorzat!

EMELT SZINT

Két vektor esetében értelmezzük a vektorok **vektoriális szorzatát** is:
Ha az **a** és a **b** szöge α, akkor azt a vektort, amely

– merőleges mindkét adott vektorra, és
– az abszolút értéke az |**a**| · |**b**| · sin α számmal egyenlő,
– az **a** irányából nézve a **b**-t pozitív irányú 90°-os forgatás viszi át a „szorzatvektorral” azonos irányú vektorba,

az **a** és a **b** ***vektoriális szorzatának*** nevezzük.
Jele: **a** × **b** (olvasd: a kereszt b).

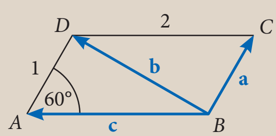


66 Vektorösszeg szorzása vektorral

FELADAT

1. Az $ABCD$ paralelogramma oldalai 2 és 1 egység hosszúak, hegyesszöge pedig 60°-os. Igazold az ábra szerint felvett **a**, **b**, **c** vektorok esetében, hogy

$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$!



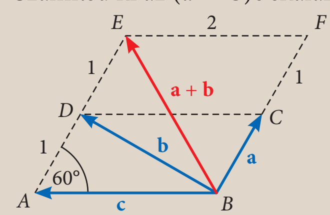
a) Igazold, hogy BD merőleges AD-re!

b) Mekkora az $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ és a **c** szöge?

c) Igaz-e, hogy az ABE háromszög szabályos?

d) Mennyi $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$?

e) Számítsd ki az $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c}$ skaláris szorzatot!



f) Mekkora a **b** és a **c** szöge?

g) Számítsd ki a **bc** skaláris szorzatot!

h) Mekkora az **a** és a **c** szöge?

i) Számítsd ki az **ac** skaláris szorzatot!

j) Igazolják-e az eredményeid, hogy $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$?

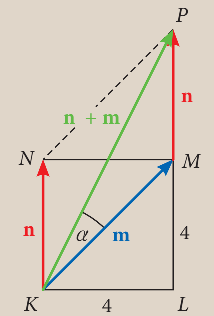
ELMÉLET

Két vektor összeadásának egészen más a tartalma, mint két szám összeadásának. Ugyancsak teljesen más két vektor skaláris szorzása és két szám szorzása. Mégis azt az érdekes dolgot figyelhetjük meg, hogy a számokkal végzett műveletek tulajdonságai közül nagyon soknak (bár nem mindegyiknek) van megfelelője a vektorok összeadása és skaláris szorzása esetében. A következő táblázat segít az eligazodásban.

Minden a, b, c, d valós szám esetében igaz	Átírva vektorokra	Igaz-e minden **a**, **b**, **c**, **d** esetében?
$a+b=b+a$ (kommutativitás)	$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$	☑ Igaz.
$(a+b)+c=a+(b+c)$ (asszociativitás)	$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$	☑ Igaz.
$ab=ba$ (kommutativitás)	$\mathbf{ab}=\mathbf{ba}$	☑ Igaz.
$(a+b)c=ac+bc$ (disztributivitás)	$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c}=\mathbf{ac}+\mathbf{bc}$	☑ Igaz.
$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$ (összegek szorzása)	$(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{c}+\mathbf{d})=\mathbf{ac}+\mathbf{bc}+\mathbf{ad}+\mathbf{bd}$	☑ Igaz.
$(ab)c=a(bc)$ (asszociativitás)	$(\mathbf{ab})\mathbf{c}=\mathbf{a}(\mathbf{bc})$	☒ Nem igaz, mert $(\mathbf{ab})\mathbf{c}$ a **c**-vel egyállású, $\mathbf{a}(\mathbf{bc})$ pedig az **a**-val egyállású.

FELADAT

2. A 4 cm-es oldalú *KLMN* négyzetben a *K*-ból *M*-be mutató vektort **m**-mel, a *K*-ból *N*-be mutató vektort **n**-nel jelölték. Számítsd ki az $(\mathbf{m}+\mathbf{n})\mathbf{m}$ skaláris szorzatot!
(Alkalmazd a skaláris szorzat táblázatban felsorolt tulajdonságait!)



3. Az **i** és **j** két egymásra merőleges egységvektor. Számítsd ki az alábbi skaláris szorzatokat!

a) $\mathbf{i}(3\mathbf{i}+2\mathbf{j})$

b) $(5\mathbf{i}+\mathbf{j})(2\mathbf{i}+3\mathbf{j})$

c) $(2{,}5\mathbf{i}-8\mathbf{j})(4\mathbf{i}+\mathbf{j})$

d) $(-5\mathbf{i}-0{,}2\mathbf{j})\,(3\mathbf{i}+5\mathbf{j})$

4. A szabályos *ABCDEF* hatszög középpontja a *K*(2; 2) pont, az *A* csúcs koordinátái (−1; −1). Készíts vázlatrajzot erről a hatszögről! Jelöld az *A*-ból a *B*-be mutató vektort **b**-vel, az *A*-ból a *D*-be mutató vektort **d**-vel! A többi csúcs koordinátáinak kiszámítása nélkül állapítsd meg, hogy mennyi

a) $|\mathbf{b}|$;

b) $|\mathbf{d}|$;

c) $(\mathbf{b}+\mathbf{d})(\mathbf{b}-\mathbf{d})$!

HÁZI FELADAT

1. Használd a lecke 2. feladatának ábráját és jelöléseit! Keress minél egyszerűbb kiszámítási lehetőséget az alábbi feladatokhoz!

a) Számítsd ki az $(\mathbf{m}+\mathbf{n})\mathbf{n}$ skaláris szorzatot!

b) Számítsd ki az $(\mathbf{m}+\mathbf{n})\mathbf{m}+(\mathbf{m}+\mathbf{n})\mathbf{n}$ összeget!

c) Számítsd ki az $(\mathbf{m}+\mathbf{n})\mathbf{m}-(\mathbf{m}+\mathbf{n})\mathbf{n}$ különbséget!

2. Végezd el az alábbi skaláris szorzásokat!

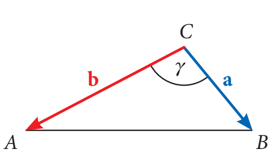
a) $(2\mathbf{i}+\mathbf{j})\mathbf{i}$; **b)** $(3\mathbf{i}-4\mathbf{j})(2\mathbf{j})$; **c)** $-3\mathbf{j}(2\mathbf{j}-9\mathbf{i})$; **d)** $3{,}4\mathbf{i}(1{,}5\mathbf{i}+2{,}7\mathbf{j})$.

3. Végezd el az alábbi skaláris szorzásokat!

a) $(2\mathbf{i}+\mathbf{j})(\mathbf{i}+\mathbf{j})$; **b)** $(2\mathbf{i}+\mathbf{j})(2\mathbf{i}-\mathbf{j})$; **c)** $(2\mathbf{i}+\mathbf{j})(2\mathbf{i}+3\mathbf{j})$; **d)** $(-2\mathbf{i}+5\mathbf{j})(6\mathbf{i}-9\mathbf{j})$.

EMELT SZINT

Két vektor skaláris szorzatának ismeretében könnyen bebizonyíthatjuk a koszinusztételt, mégpedig a hegyes-, derék- és tompaszögű háromszögek esetére nézve egyszerre.



Használjuk az ábra jelöléseit! Helyezzünk vektorokat az *ABC* háromszög két oldalára:

$\mathbf{a}=\overrightarrow{CB}$, e vektor abszolút értéke *a*, ez a *BC* oldal hossza.

$\mathbf{b}=\overrightarrow{CA}$, e vektor abszolút értéke *b*, ez az *AC* oldal hossza.

Az *AB* oldal hosszát *c*-vel jelöljük. Ez a *c* az $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$ vektor abszolút értéke.

Az $\overrightarrow{AB}$ önmagával való skaláris szorzatát (a *négyzetét*) kétféleképpen írjuk fel:

$\overrightarrow{AB}^2=c^2$, mert $|\overrightarrow{AB}|=c$.

$\overrightarrow{AB}^2=(\mathbf{a}-\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b})=\mathbf{a}^2-2\mathbf{ab}+\mathbf{b}^2=$
$=a^2-2ab\cos\gamma+b^2$, mert **a**, illetve **b** abszolút értéke *a*, illetve *b*.

E kétféle felírás alapján: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$, vagyis a fenti állítás igaz.

A bizonyításban nem játszott szerepet, hogy a γ mekkora szög, ezért a koszinusztétel hegyes-, derék- és tompaszög esetén is fennáll.

67 A skaláris szorzat kiszámítása a vektorkoordinátákból

BEVEZETŐ

A továbbiakban, ha koordináta-rendszerrel dolgozunk, akkor minden esetben felvesszük az origóból az (1; 0) pontba mutató **i**-t és az origóból a (0; 1) pontba mutató **j**-t; *bázisrendszeren* – hacsak mást nem mondunk – minden esetben az **i**, **j** bázisvektorok által alkotott bázisrendszert értjük.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Adott az $A(3; 2)$ és a $B(-3; 5)$ pont.

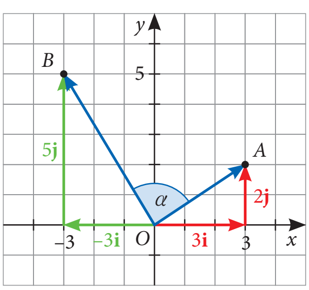
a) Számítsuk ki az origóból az A-ba mutató, illetve az origóból a B-be mutató vektor skaláris szorzatát!

b) Számítsuk ki az a)-beli két vektor hosszát!

c) Számítsuk ki az a)-beli két vektor szögét!

Megoldás

Az **i** és a **j** bázisvektorok megállapodás szerinti felvétele miatt $\overrightarrow{OA} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ és $\overrightarrow{OB} = -3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$.



a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j})(-3\mathbf{i} + 5\mathbf{j})$.

A két összegvektor skaláris szorzását pontosan úgy végezhetjük, mint a valós számok esetében: minden „tagot” minden „taggal” skalárisan megszorzunk, és a kapott szorzatokat (vagyis a kapott négy valós számot) összeadjuk:

$(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j})(-3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) = -9\mathbf{ii} + 15\mathbf{ij} - 6\mathbf{ji} + 10\mathbf{jj}$.

Tudjuk, hogy $\mathbf{ij} = \mathbf{ji} = 0$, mert a két bázisvektor egymásra merőleges.

Azt is tudjuk, hogy a bázisvektorok hossza 1, ezért $\mathbf{ii} = \mathbf{jj} = 1$.

Ezeket felhasználva folytathatjuk a skaláris szorzat kiszámítását:

$(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j})(-3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) = -9\mathbf{ii} + 15\mathbf{ij} - 6\mathbf{ji} + 10\mathbf{jj} =$
$= -9 \cdot 1 + 15 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + 10 \cdot 1 = -9 + 10 = 1$.

Tehát $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1$.

b) A vektorkoordinátákból azonnal adódik a válasz:

$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ és

$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{34}$.

c) Számolhatnánk például derékszögű háromszögek segítségével, de van ennél rövidebb út is.

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos\alpha =$
$= \sqrt{13} \cdot \sqrt{34} \cdot \cos\alpha = \sqrt{442} \cdot \cos\alpha$, másrészt az a) feladat szerint $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1$.

Így $\sqrt{442} \cdot \cos\alpha = 1$, amiből

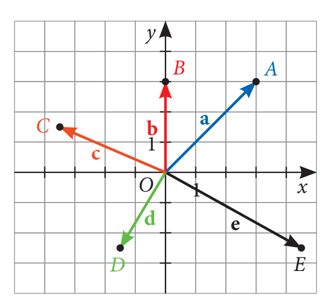
$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{442}} \approx 0{,}0476$. Ebből pedig $\alpha \approx 87{,}3°$.

ELMÉLET

1. Az $\mathbf{a}(a_1; a_2)$ és a $\mathbf{b}(b_1; b_2)$ vektor skaláris szorzata egyszerűen kiszámítható a vektorok koordinátáiból: az első koordináták szorzatához hozzáadjuk a második koordináták szorzatát. Azaz: $\mathbf{ab} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$.

   Megjegyzés:
   Ezt az $(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j})$ szorzás elvégzésével könnyen igazolhatjuk.

2. Az origó kezdőpontú vektorokat **helyvektoroknak** nevezzük. A helyvektorok koordinátái egyenlők a végpontjuk megfelelő koordinátáival.

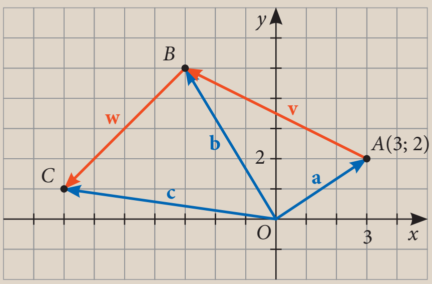


FELADAT

1. Adott az **a** és a **b**. Számítsd ki a skaláris szorzatukat, a hosszukat és a szögüket, ha

a) **a**(4; −1) és **b**(2; 6); **b)** **a**(1; 5) és **b**(3; 2)!

2. A repülőgépek mozgását koordináta-rendszerben ábrázolják és figyelik. A koordináta-rendszerben egy egység 10 km.



Egy állandó magasságban mozgó utasszállító repülőgép a megfigyelés kezdetén az $A(3; 2)$ pontban volt, a következő megfigyeléskor pedig a B pontban. Elmozdulását a **v**(−6; 3) adja meg. Később a gép a B-ből a C-be jutott, elmozdulását a **w**(−4; −4) mutatja.

a) Határozzuk meg a B és a C pont koordinátáit!

b) Mekkora szöggel változott az elmozdulás iránya a második megfigyeléskor az elsőhöz képest? (Azaz mekkora szöggel fordult el a repülő?)

3. A koordináta-rendszer origója legyen O; két pontja $A(-3; -4)$ és $B(1; -1)$. Melyik P pontba mutat az $\overrightarrow{OP}$, ha

a) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$;

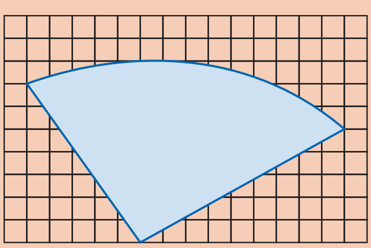
b) $\overrightarrow{OP}$ az $\overrightarrow{AB}$-nak +90°-os elforgatottja?

c) Mindkét esetben határozd meg $\overrightarrow{OP}$ és $\overrightarrow{OA}$ vektorok szögét!

HÁZI FELADAT

1. Mekkora lehet y értéke, ha az origóból az $A(-2; 5)$, illetve $B(3; y)$ pontokba mutató vektorok skaláris szorzata 14?

2. Egy gyógyfürdő meleg vizes medencéjének környékét az ábrán látható módon járólapozták.



a) Állapítsd meg a medence két egyenes oldalának hosszát! (Hosszúságegységként használd a járólapok egy élének hosszát.)

b) Mekkora szöget zár be a két egyenes oldal?

3. Az $ABCD$ négyszög A csúcsának koordinátái $A(0; 0)$. Az A csúcsból a másik 3 csúcsba mutató vektorok rendre $\overrightarrow{AB}(6; -1)$, $\overrightarrow{AC}(1; 7)$ és $\overrightarrow{AD}(-1; 5)$.

a) Add meg a B, C és D csúcsok koordinátáit!

b) Add meg a $\overrightarrow{CB}$ és $\overrightarrow{CD}$ vektorokat koordinátáik segítségével!

c) Számítsd ki az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorok skaláris szorzatát!

RÁADÁS

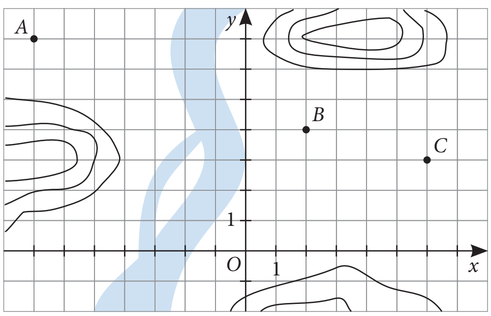
A rendezett számpár fogalma alapján módosíthatjuk a vektorokról alkotott eddigi képünket. Azt mondhatjuk, hogy az $(a_1; a_2)$ rendezett számpár egy vektor, az (1; 0) és a (0; 1) rendezett számpárokat pedig bázisvektoroknak nevezhetjük.
Ha pontosan úgy értelmezzük két rendezett számpár összegét, különbségét, számmal való szorzását, skaláris szorzatát, ahogyan azt az utóbbi leckékben láttuk, akkor máris minden eddig megszokott vektorműveletet el tudunk végezni.
Fizikai alkalmazásokban természetes, hogy nemcsak kétdimenziós, hanem háromdimenziós vektorokról is szó esik. Az algebrai vektorfogalom lehetővé teszi a három-, négy-, vagy akár még több dimenziós vektor fogalmának megalkotását is.

Nézzünk egy rövid ízelítőt a négydimenziós vektorokról! Az **a**(2; 0; −4; 6) vektor 3-szorosa a 3**a** = (6; 0; −12; 18) vektor.
Ha **a**(2; 0; −4; 6) és **b**(3; −2; 5; −7), akkor $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (2; 0; -4; 6) + (3; -2; 5; -7) = (5; -2; 1; -1)$,
$\mathbf{ab} = (2; 0; -4; 6)(3; -2; 5; -7) = 2 \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + (-4) \cdot 5 + 6 \cdot (-7) = -56$.

68 Vektorok szöge

KIDOLGOZOTT FELADAT

Az Elektromos Művek a térképen látható dombos vidéken, egy folyó fölött szeretne egyenesen keresztülvezetni egy új vezetéket. A mérnök, akire a villanyoszlopok helyének kijelölését bízták, az A, B és C pontokat jelölte meg a térképvázlaton. A munkát ellenőrző társa szerint azonban ezek a pontok nem esnek egy egyenesre.

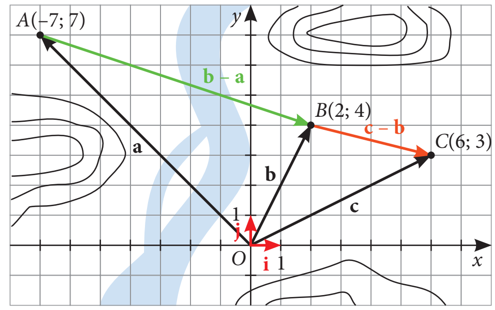


Kinek van igaza? Egy egyenesre esik a három pont vagy nem?

Megoldás

Dolgozzunk vektorokkal!

Ha az $\overrightarrow{AB}$ és a $\overrightarrow{BC}$ egyállású, akkor a három pont egy egyenesre esik, ha nem egyállásúak, akkor a pontok nem esnek egy egyenesre.



Indítsunk helyvektorokat az A, a B és a C ponthoz! Ezeknek a helyvektoroknak a koordinátái megegyeznek a végpontjaik megfelelő koordinátáival.

Emiatt $\mathbf{a} = (-7;\ 7)$, $\mathbf{b} = (2;\ 4)$ és $\mathbf{c} = (6;\ 3)$.

$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (2;\ 4) - (-7;\ 7) = (9; -3)$ és

$\overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b} = (6;\ 3) - (2;\ 4) = (4; -1)$.

Egyállású-e ez a két vektor? Ha igen, akkor létezne egy olyan c valós szám, hogy $\overrightarrow{AB} = c \cdot \overrightarrow{BC}$, vagyis $(9; -3) = (4c; -c)$.

A második koordináták egyenlőségéből viszont az látható, hogy csak $c = 3$ lehetne, de ekkor $4c = 12 \neq 9$.

Beláttuk, hogy nincs olyan c valós szám, amelyre igaz, hogy $\overrightarrow{AB} = c \cdot \overrightarrow{BC}$, vagyis az $\overrightarrow{AB}$ és a $\overrightarrow{BC}$ nem egyállású vektorok.

Tehát A, B és C nem esik egy egyenesre.

FELADAT

1. A példa adataival dolgozz!

a) Mekkora az AB, a BC és az AC távolság?

b) Hogyan igazolhatod az a) feladat eredményeivel, hogy a B pont nincs rajta az AC egyenesen?

c) Mekkora az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{BC}$ szöge?

d) Add meg a d értékét úgy, hogy az A, a $D(-0{,}5;\ d)$ és a C pont egy egyenesre essen!

Útmutatás

Az AC egyenesen 3 egyállású vektort látsz. Közülük 2-nek hasonlítsd össze a koordinátáit!

ELMÉLET

1. Ha az $\mathbf{a}(a_1;\ a_2)$ és a $\mathbf{b}(b_1;\ b_2)$ egyállású, akkor van olyan c valós szám, hogy $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$. Ez azt is jelenti, hogy a $\mathbf{b}$ koordinátái $b_1 = ca_1$ és $b_2 = ca_2$.
   Megfordítva: Ha egy vektor a másiknak számszorosa, akkor ezek egyállású vektorok.

2. Ha adottak $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok a koordinátáikkal: $\mathbf{a}(a_1;\ a_2)$ és $\mathbf{b}(b_1;\ b_2)$, és egyikük sem nullvektor, akkor a skaláris szorzat segítségével kiszámítható a vektorok szöge.

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

FELADAT

2. Foglalkozz az $\mathbf{a}(-5;\ -1)$, a $\mathbf{b}(-3;\ 15)$, a $\mathbf{c}(1;\ -5)$ és a $\mathbf{d}(25;\ 5)$ vektorokkal!

a) Minden lehetséges módon válassz ki két vektort, és számítsd ki mind a 6-féle skaláris szorzatot!

b) Vannak-e egyállásúak az adott vektorok között?

c) Vannak-e merőlegesek az adott vektorok között?

3. Az $OABC$ paralelogramma 3 csúcsa: $O(0;\ 0)$, $A(20;\ -15)$ és $C(7;\ 24)$.

a) Mik a B csúcs koordinátái?

b) Mekkorák a paralelogramma oldalai?

c) Számítsd ki az $\overrightarrow{OB}$ és az $\overrightarrow{AC}$ skaláris szorzatát!

d) Mekkora a paralelogramma területe?

HÁZI FELADAT

1. Melyik számmal kell megszorozni az $\mathbf{u}(4;\ -10)$-t, hogy a $\mathbf{v}$-t kapjuk, ha

a) $\mathbf{v}(6;\ -15)$; **c)** $\mathbf{v}(-12;\ 30)$;

b) $\mathbf{v}(2;\ -5)$; **d)** $\mathbf{v}(1;\ -2{,}5)$?

2. Melyik számot kell a k betű helyére írnunk, hogy az $\mathbf{u}(6;\ 18)$ és a $\mathbf{v}(-3;\ k)$

a) egyállású legyen; **b)** merőleges legyen?

3. Egy trapéz csúcsai: $A(-2;\ -2)$; $B(4;\ 0)$; $C(-1;\ 2)$ és $D(2;\ 3)$.

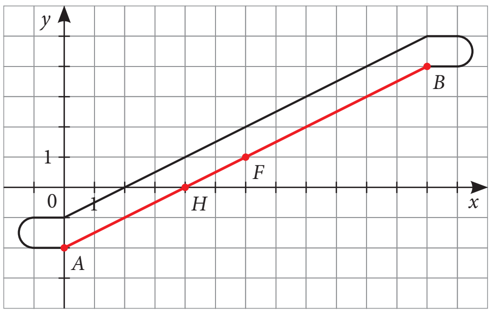
a) Igazold, hogy a négyszög valóban trapéz, azaz van két párhuzamos oldala! Melyek a párhuzamos oldalak?

b) Milyen hosszúak a trapéz oldalai?

c) Számold ki a skaláris szorzat segítségével a trapéz hosszabbik alapján fekvő szögeit!

69 Felezőpont, harmadolópont

BEVEZETŐ



Egy áruház mozgólépcsője az utcaszint alatti 2 méteres mélységből, az $A(0; -2)$ pontból indulva 30 másodperc alatt a $B(12; 4)$ pontba viszi fel a lépcsőn álló vásárlókat.

Az utcaszinthez képest milyen magasan lesz, illetve hány métert halad vízszintesen előre a vásárló

a) 15; **b)** 10

másodperccel azután, hogy rálépett a mozgólépcsőre?

Megoldás

a) 15 másodperc után a vásárló az AB szakasz F felezőpontjában lesz. Az ábráról leolvasható, hogy ez az $F(6; 1)$ pont. Azaz a vásárló 6 métert haladt előre, és az utcaszint felett 1 méter magasságban van.

b) 10 másodperc után a vásárló az AB szakasz H harmadolópontjában lesz. Ez a $(4; 0)$ pont, azaz a vásárló 4 métert haladt előre, és pontosan az utcaszinten van.

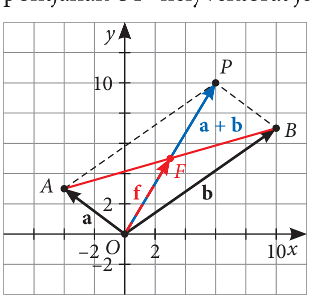
KIDOLGOZOTT FELADAT

a) Mik az AB szakasz F felezőpontjának koordinátái, ha $A(-4; 3)$ és $B(10; 7)$?

b) Az AB szakasznak 2 harmadolópontja van. Melyek az A végponthoz közelebbi H harmadolópont koordinátái?

Megoldás

a) Az $\mathbf{a}(-4; 3)$ és a $\mathbf{b}(10; 7)$ oldalvektorokkal megrajzoltuk az $AOBP$ paralelogrammát. Az AB szakasz F felezőpontjának $\overrightarrow{OF}$ helyvektorát jelöljük $\mathbf{f}$-fel!



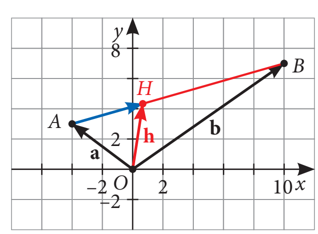
A paralelogramma átlói felezik egymást, ezért az $\mathbf{f}$ az $AOBP$ paralelogramma $\overrightarrow{OP}$ átlóvektorának $\frac{1}{2}$-szerese.

$\overrightarrow{OP} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = (-4; 3) + (10; 7) = (6; 10)$, ezért

$\mathbf{f} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \frac{1}{2}(6; 10) = (3; 5).$

Mivel az $\mathbf{f}$ helyvektor, ezért a vektor F végpontjának koordinátái megegyeznek a vektor koordinátáival: $F(3; 5)$.

b) Jelöljük a H pont $\overrightarrow{OH}$ helyvektorát $\mathbf{h}$-val!



Az ábra alapján: $\mathbf{h} = \mathbf{a} + \overrightarrow{AH}$, ezért először az $\overrightarrow{AH}$ vektorral foglalkozunk.

$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{1}{3}(14; 4) = \left(\frac{14}{3}; \frac{4}{3}\right).$

Tehát $\mathbf{h} = \mathbf{a} + \overrightarrow{AH} = (-4; 3) + \left(\frac{14}{3}; \frac{4}{3}\right) =$

$= \left(\frac{2}{3}; \frac{13}{3}\right).$

Mivel a $\mathbf{h}$ helyvektor, ezért a H koordinátái megegyeznek a vektor koordinátáival: $H\left(\frac{2}{3}; \frac{13}{3}\right)$.

FELADAT

1. Számítsd ki a példában megadott *AB* szakasz *B*-hez közelebbi harmadolópontjának koordinátáit!

2. Rajzold be egy koordináta-rendszerbe a $P(-4;\ 16)$ és a $Q(20;\ -2)$ pontot! A *PQ* szakasz felezőpontját jelöld *F*-fel, a *Q*-hoz közelebbi harmadolópontját pedig *G*-vel!

a) Számítsd ki az *F* és a *G* pont koordinátáit!

b) Mekkora az *FG* szakasz?

3. Oldd meg a 2. b) feladatot úgy is, hogy a számításodban nem használod az *F* és a *G* pont koordinátáit!

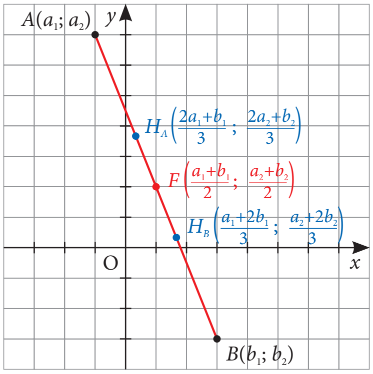
ELMÉLET

Ha egy szakasz két végpontja az $A(a_1;\ a_2)$ és a $B(b_1;\ b_2)$ pont, akkor a szakasz

– felezőpontja: $F\left(\dfrac{a_1+b_1}{2};\ \dfrac{a_2+b_2}{2}\right)$,

– az *A*-hoz közelebbi harmadolópontja: $H_A\left(\dfrac{2a_1+b_1}{3};\ \dfrac{2a_2+b_2}{3}\right)$,

– a *B*-hez közelebbi harmadolópontja: $H_B\left(\dfrac{a_1+2b_1}{3};\ \dfrac{a_2+2b_2}{3}\right)$.



HÁZI FELADAT

1. Foglalkozz az *ABC* háromszöggel, ha $A(-10;\ -7)$, $B(10;\ 3)$ és $C(10;\ 13)$!

a) Add meg az oldalfelező pontok koordinátáit!

b) Mik a középvonalakra illeszkedő vektorok koordinátái?

c) Mekkorák a középvonalak?

d) Mekkora az *ABC* háromszög területe?

2. Kicsinyítsd az *A* pontból az *ABC* háromszöget

a) $\frac{1}{3}$ arányban; **b)** $\frac{2}{3}$ arányban,

ha $A(-5;\ -6)$, $B(16;\ 0)$ és $C(10;\ 6)$! Mik a kicsinyítéssel kapott háromszög csúcsainak koordinátái?

3. Az *ABC* háromszög csúcspontjai: $A(-6;\ 2)$, $B(2;\ 0)$, $C(1;\ 7)$.

a) Számítsd ki a *BC* oldal *F* felezőpontjának koordinátáit!

b) Számítsd ki az *AF* szakasz két harmadolópontjának koordinátáit!

c) Add meg a háromszög súlypontjának koordinátáit!

70 A háromszög súlypontja

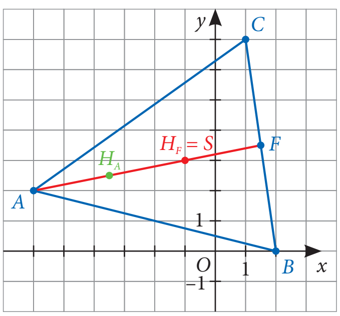
BEVEZETŐ

Foglalkozzunk az előző lecke 3. házi feladatával!

Határozzuk meg az ABC háromszög BC oldalának F felezőpontját, majd az AF szakasz harmadolópontjait, majd az ABC háromszög súlypontját!

Mivel az ABC háromszög csúcspontjai: $A(-6;\ 2)$, $B(2;\ 0)$, $C(1;\ 7)$, ezért a BC oldal F felezőpontja:

$F\left(\frac{2+1}{2};\ \frac{0+7}{2}\right) = (1{,}5;\ 3{,}5)$.



Az AF szakasz A végpontjához közelebb eső harmadolópontja $H_A\left(\frac{2\cdot(-6)+1{,}5}{3};\ \frac{2\cdot 2+3{,}5}{3}\right) = (-3{,}5;\ 2{,}5)$,

F végpontjához közelebb eső harmadolópontja pedig $H_F\left(\frac{-6+2\cdot 1{,}5}{3};\ \frac{2+2\cdot 3{,}5}{3}\right) = (-1;\ 3)$.

Az AF szakasz az ABC háromszög *súlyvonala*, így ennek a szakasznak az F oldalfelező ponthoz közelebbi harmadolópontja éppen a háromszög *súlypontja*. Tehát $S(-1;\ 3)$.

Megfigyelhetjük, hogy a súlypont koordinátái éppen a csúcspontok megfelelő koordinátáinak átlaga:

a csúcspontok első koordinátái: $-6;\ 2;\ 1$;

ezek átlaga: $\frac{-6+2+1}{3} = -1$;

a csúcspontok második koordinátái: $2;\ 0;\ 7$;

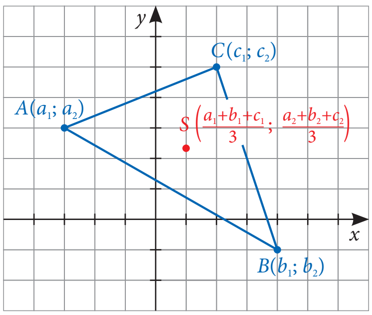
ezek átlaga: $\frac{2+0+7}{3} = 3$.

Ez az összefüggés nem csak erre a háromszögre teljesül. Nem bonyolult a bizonyítása, érdemes megpróbálkozni vele, vagy a lecke végén is elolvashatod.

ELMÉLET

Tétel: A háromszög súlypontjának első koordinátája a csúcsok első koordinátáinak átlaga, a háromszög súlypontjának második koordinátája a csúcsok második koordinátáinak átlaga.

Ha az ABC háromszög csúcsai $A(a_1;\ a_2)$, $B(b_1;\ b_2)$ és $C(c_1;\ c_2)$, akkor a háromszög súlypontja az $S\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3};\ \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$ pont.



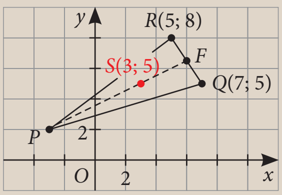
FELADAT

1. Melyek az ABC háromszög súlypontjának a koordinátái, ha

a) $A(0;\ -5)$, $B(6;\ 2)$, $C(-6;\ 6)$; **b)** $A(1;\ 9)$, $B(5;\ -4)$, $C(7;\ 11)$?

2. Egy PQ szakasz egyik végpontja $P(3; 5)$. A szakasz egyik harmadolópontja $H(-1; -1)$. Határozd meg, melyik pont lehet a szakasz Q végpontja!

3. A PQR háromszögnek ismerjük két csúcspontját és a súlypontját: $Q(7; 5)$, $R(5; 8)$ és $S(3; 5)$. A QR oldal felezőpontját F-fel jelöljük. Határozd meg a P pont koordinátáit kétféleképpen:



a) az elméletben megfogalmazott képlet felhasználásával;

b) az $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OF} + 3\overrightarrow{FS}$ számítást követve!

4. Foglalkozz a Bevezetőben tárgyalt háromszöggel! A háromszög csúcsai $A(-6; 2)$; $B(2; 0)$ és $C(1; 7)$.

a) Add meg az ABC háromszög oldalfelező pontjait!

b) Add meg az oldalfelező pontok által meghatározott háromszög súlypontját! (Ennek oldalai éppen a háromszög középvonalai.)

c) Hasonlítsd össze ezt a súlypontot az eredeti háromszög súlypontjával!

Amit kaptál, az tetszőleges háromszögre bebizonyítható: a háromszög középvonalai olyan háromszöget határoznak meg, melynek súlypontja megegyezik az eredeti háromszög súlypontjával.

HÁZI FELADAT

1. Adott az ABC háromszög: $A(-3; -3)$, $B(5; -1)$, $C(-2; 4)$.

a) Igaz-e, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú?

b) Igaz-e, hogy az ABC háromszög súlypontja az origó?

c) Nagyítsd az ABC háromszöget az origóból a kétszeresére! Add meg a nagyított $A'B'C'$ háromszög csúcsait!

2. A PQR háromszög súlypontja az origó, $P(-12; -7)$ és $R(4; 8)$. Add meg a Q pont koordinátáit!

3. Az ABC háromszögnek az oldalfelező pontjait ismerjük: $F_A(7; 2)$; $F_B(1; 0)$; $F_C(4; -5)$.

a) Készíts ábrát!

b) Add meg a felezőpontok által meghatározott háromszög súlypontját!

c) Határozd meg az eredeti ABC háromszög csúcsait!

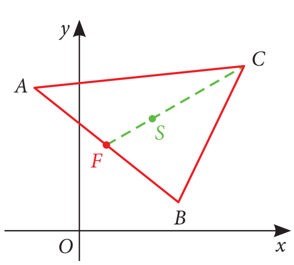
(Segítségedre lehet az órai 4. feladatban bemutatott összefüggés.)

RÁADÁS

Bizonyítsuk be, hogy ha az $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$, $C(c_1; c_2)$ pontok esetében az ABC háromszög súlypontja az $S(s_1; s_2)$ pont, akkor

$s_1 = \dfrac{a_1 + b_1 + c_1}{3}$ és

$s_2 = \dfrac{a_2 + b_2 + c_2}{3}$!



Megoldás

Ha az AB szakasz felezőpontja $F(f_1; f_2)$, akkor az $S(s_1; s_2)$ súlypont a CF szakasz F-hez közelebbi harmadolópontja. Az előző leckében megismert összefüggések szerint tehát

$$s_1 = \frac{2}{3}f_1 + \frac{1}{3}c_1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{a_1 + b_1}{2} + \frac{1}{3}c_1 = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3};$$

$$s_2 = \frac{2}{3}f_2 + \frac{1}{3}c_2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{a_2 + b_2}{2} + \frac{1}{3}c_2 = \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}.$$

71 Gyakorlás csoportokban

CSOPORTMUNKA

2-3 fős csoportokba osztva dolgozzatok!

I. FELADATSOROZAT

1. Adott az $ABCD$ paralelogramma két szomszédos csúcsa: $A(-4; -3)$, $B(3; -1)$ és a paralelogramma középpontja: $K(-1; 2)$.

a) Add meg a C és a D csúcs koordinátáit!

b) Számítsd ki az AB és AD oldalak hosszát!

c) Számítsd ki az $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ skaláris szorzatot!

d) Add meg a paralelogramma szögeinek nagyságát!

e) Add meg az $ABPQ$ négyzet P és Q csúcsának koordinátáit, ha a négyzet negatív körüljárású!

2. Mennyi lehet x értéke, ha az $\mathbf{a}(-3; 2)$ és a $\mathbf{b}(x; 0{,}5)$ vektorok

a) egyállásúak; b) merőlegesek egymásra?

3. Az $ABCD$ négyzet két szemközti csúcsa: $A(-3; 1)$ és $C(0; 6)$.

a) Számítsd ki a négyzet kerületét és területét!

b) Add meg a B, D csúcsok koordinátáit!

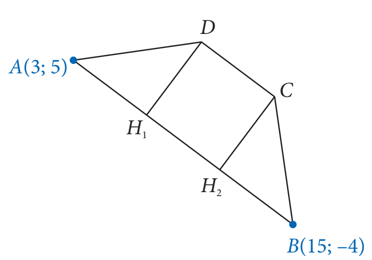
4. Adott az $\mathbf{u}$ és a $\mathbf{v}$. Tudjuk, hogy $|\mathbf{u}| = 3$ és $|\mathbf{v}| = 4$. Add meg az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok állását és irányát úgy, hogy igaz legyen:

a) $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = 5$;

b) $\mathbf{uv} = -6$!

II. FELADATSOROZAT

1. Az $ABCD$ trapézt a C és D csúcsokból megrajzolt magasságvonalai két egyenlő szárú derékszögű háromszögre és egy négyzetre bontják.



a) Add meg az AB alap H_1 és H_2 pontjainak koordinátáit, és írd fel a $\overrightarrow{H_1H_2}$ vektor koordinátáit!

b) Írd fel a $\overrightarrow{H_1D}$ vektor koordinátáit!

c) Add meg a C és D csúcsok koordinátáit!

d) Számítsd ki a trapéz oldalainak hosszát!

e) A trapéz $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{BD}$ átlóvektorainak koordinátái segítségével számítsd ki az $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ skaláris szorzatot!

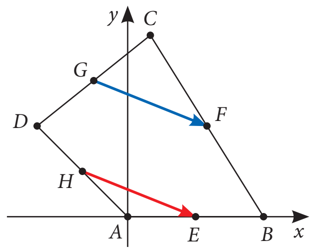
f) Mekkora szöget zár be egymással a két átló?

2. Az $ABCD$ négyzet középpontja $K(-4; -2{,}5)$ és $A(-3; -5{,}5)$.

a) Számítsd ki a négyzet kerületét és területét!

b) Add meg a B, C, D csúcsok koordinátáit!

3. Az $ABCD$ négyszög csúcsai: $A(0;\ 0)$, $B(6;\ 0)$, $C(1;\ 8)$, $D(-4;\ 4)$.



a) Add meg a négyszög E, F, G, H oldalfelező pontjainak koordinátáit!

b) Igazold, hogy $\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{GF}$!

c) Milyen tulajdonságai vannak az $EFGH$ négyszögnek? Miért?

4. Adva van az $\mathbf{u}$ és a $\mathbf{v}$. Tudjuk, hogy $|\mathbf{u}| = 3$ és $|\mathbf{v}| = 4$. Add meg az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok állását és irányát úgy, hogy igaz legyen:

a) $|\mathbf{u} - \mathbf{v}| = 5$;

b) $\mathbf{uv} = -12$!

HÁZI FELADAT

1. Egy háromszög AB oldalának egyik végpontja $A(-2;\ 3)$. Az AB oldal felezőpontja $F(0{,}5;\ -0{,}5)$, a háromszög súlypontja $S(4;\ 2)$. Add meg a háromszög másik két csúcsának koordinátáit!

2. A pozitív körüljárású $ABCD$ négyzet két szomszédos csúcsa $C(-2;\ -7)$ és $D(3;\ 5)$.

a) Számítsd ki a négyzet kerületét és területét!

b) Melyik pont lehet a négyzet középpontja?

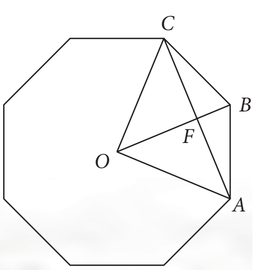
c) Melyik pont lehet a négyzet A csúcsa?

3. Adott az $\mathbf{u}$ és a $\mathbf{v}$. Tudjuk, hogy $|\mathbf{u}| = 3$ és $|\mathbf{v}| = 4$. Add meg az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok állását és irányát úgy, hogy igaz legyen:

a) $|\mathbf{u} - \mathbf{v}| = 7$;

b) $\mathbf{uv} = 0$!

RÁADÁS



Egy szabályos nyolcszög középpontja az $O(1;\ 3)$ pont, egyik csúcsa pedig az $A(4;\ -1)$ pont. A pozitív körüljárás szerint betűzzük a csúcsokat.

a) Add meg a nyolcszög C csúcsának koordinátáit!

Add meg a B csúcs koordinátáit! Használd a következő gondolatmenetet:
Mivel az $OABC$ négyszög deltoid, az OB sugár pontosan felezi az AC átlót.

b) Add meg az F felezőpont koordinátáit!

c) Írd fel az $\overrightarrow{OF}$ vektort, és számítsd ki a hosszát is!

d) Az $\overrightarrow{OB}$ és $\overrightarrow{OF}$ vektorok egyállásúak, és mindkettőnek ismerjük a hosszát (OB is a nyolcszög egyik sugara!). Add meg az $\overrightarrow{OB}$ vektor koordinátáit!

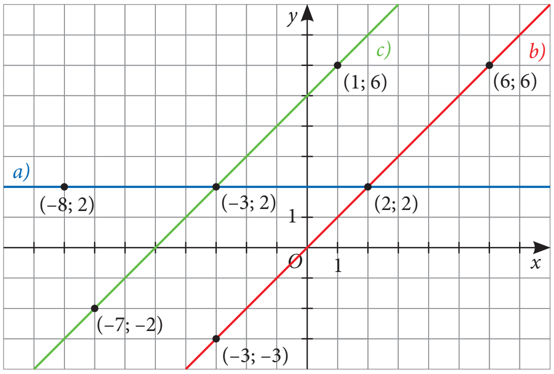
e) Add meg a B csúcs koordinátáit!

72 Ponthalmazok a koordináta-rendszerben I.

A koordinátageometriában szemléltetésre, kísérletezésre, tapasztalatszerzésre, feladatmegoldásra, a megoldások ellenőrzésére is használható a *GeoGebra* program.

BEVEZETŐ

A koordináta-rendszerben a sík minden pontja egyértelműen azonosítható két koordinátája segítségével. Minden síkbeli alakzat pontok egy bizonyos halmaza, ezért a ponthalmazok megadhatók az őket alkotó pontok koordinátáival.
Nézzünk néhány egyszerűbb esetet!
Hogyan adhatjuk meg az *a)*, *b)* és *c)* halmazokat alkotó pontokat a koordinátáikkal?



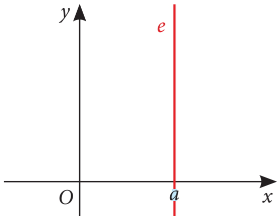
Mindhárom ponthalmaz egyenes.
Az *a)* egyenes pontjainak közös jellemzője, hogy – míg az első (azaz x) koordinátájuk tetszőleges valós szám lehet – a második (azaz y) koordinátájuk minden esetben 2. Sőt az is igaz, hogy ha ebben a síkban egy pont második koordinátája 2, akkor az a pont rajta van a megfigyelt egyenesen (vagyis eleme az *a)* halmaznak). Ezért azt mondjuk, hogy *ennek az egyenesnek az egyenlete*: $y = 2$.

Figyeljük meg a *b)* egyenest! A két koordinátatengely négy derékszöget alkot. Közülük kettőnek éppen a *b)* egyenes a szögfelezője. A szögfelező pontjai egyenlő távolságra vannak a két szár egyenesétől, ezért a *b)* egyenes *minden pontjának egyenlő a két koordinátája*. A síkban több ilyen tulajdonságú pont nincs. Ezért azt mondjuk, hogy *a b) egyenes egyenlete*: $y = x$.
A *c)* egyenest úgy kapjuk a *b)*-ből, hogy eltoljuk a (0; 5) vektorral. Ezért a *c)* egyenest a koordinátasík azon pontjai alkotják, amelyek koordinátáira igaz, hogy $y = x + 5$. Ezt az egyenletet a *c)* egyenes egyenletének nevezzük. Bármely pont, amelynek koordinátái a fenti egyenlet megoldáshalmazába tartoznak, rajta van a *c)* egyenesen. Például az $A(-2{,}9;\ 2{,}1)$ pont a *c)* egyenes pontja, a $B(4{,}3;\ 9{,}4)$ pont pedig nincs rajta ezen az egyenesen.

ELMÉLET

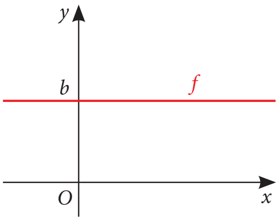
1. Ha egy x-y koordináta-rendszer síkjában lévő e egyenes merőleges az abszcisszatengelyre, és azt az $(a;\ 0)$ pontban metszi, akkor
   – az e minden pontjának ugyanakkora az első koordinátája, mégpedig a.
   – Az is igaz, hogy ha e sík egy pontjának az első koordinátája a-val egyenlő, akkor ez a pont rajta van az e egyenesen.

   Más szóhasználattal: Egy pont **pontosan** akkor van rajta az e egyenesen, ha az első koordinátája a-val egyenlő.
   E miatt a kapcsolat miatt azt mondjuk, hogy **az *e* egyenes egyenlete $x = a$.**



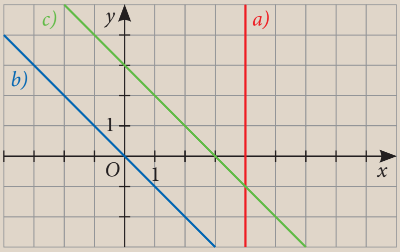
2. Hasonló megfigyeléseket tehetünk a koordináta-rendszer ordinátatengelyére merőleges egyeneseket illetően is: Ha egy x-y koordináta-rendszer síkjában lévő f egyenes merőleges az ordinátatengelyre, és azt a $(0,\ b)$ pontban metszi, akkor
   - az f minden pontjának ugyanakkora a második koordinátája, mégpedig b.
   - Az is igaz, hogy ha e sík egy pontjának a második koordinátája b-vel egyenlő, akkor ez a pont rajta van az f egyenesen.

   Más szóhasználattal: Egy pont **pontosan** akkor van rajta az f egyenesen, ha a második koordinátája b-vel egyenlő.
   E miatt a kapcsolat miatt azt mondjuk, hogy **az f egyenes egyenlete $y = b$.**



FELADAT

1. Az ábrán látható egyenesek mindegyikéhez adj meg egy olyan egyenletet, amelyet éppen az adott egyenest alkotó pontok koordinátái (és csak azok) tesznek igazzá!



2. Rajzold meg a koordináta-rendszerben az alábbi egyenletekkel jellemezhető egyeneseket!

a) $x = 7$

b) $y = x - 3$

c) $y = -x - 5$

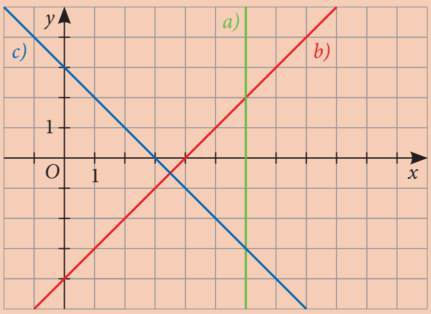
3. Döntsd el, hogy az alábbi pontok közül melyek vannak rajta az $y = -x + 1$ egyenletű egyenesen: $A(-4;\ 5)$, $B(-1;\ 3)$, $C(2;\ 2)$, $D(5;\ -4)$, $E(100;\ -99)$, $F(871;\ -872)$!

ELMÉLET

A koordinátasíkon a pontokat számpárokkal adjuk meg. A kétismeretlenes egyenletek megoldáshalmazában is számpárok vannak, ezért a megoldáshalmazuk ponthalmazzal szemléltethető. **A kétismeretlenes egyenlet és a megoldáshalmazát szemléltető ponthalmaz szorosan összetartoznak.**
Például az $x + y = 0$ kétismeretlenes egyenlet megoldáshalmazát egy egyenes szemlélteti. Ez az 1. feladatban szereplő *b)* egyenes, amely áthalad az origón, és felezi a koordinátatengelyek II. és IV. negyedben lévő szögét. Ha erről az egyenesről beszélünk, akkor mondhatjuk, hogy az $x + y = 0$ egyenlet ennek az **egyenesnek az egyenlete**.

HÁZI FELADAT

1. Add meg az ábrán látható egyenesek egyenletét!



2. Rajzold meg a koordináta-rendszerben az alábbi egyenletekkel jellemezhető egyeneseket!

a) $x = -4$

b) $y = x - 4$

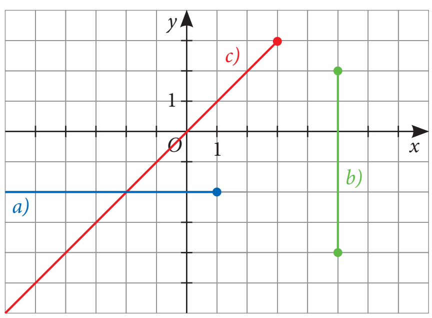
c) $y = -x + 4$

3. Döntsd el, hogy az alábbi pontok közül melyek vannak rajta az $y = x - 5$ egyenletű egyenesen: $A(-5;\ -9)$, $B(-1;\ -6)$, $C(2;\ -2)$, $D(5;\ 0)$, $E(100;\ 105)$, $F(871;\ -866)$!

Ponthalmazok a koordináta-rendszerben II.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Hogyan jellemezhetnénk az ábrán látható alakzatok pontjainak koordinátáit?



Megoldás

Az *a)* félegyenes az $y = -2$ egyenletű egyenes része, azonban az x koordináta itt már nem lehet nagyobb, mint 1, ezért a fenti egyenletet ki kell egészíteni az $x \le 1$ egyenlőtlenséggel.

A félegyenest tehát pontosan azok a pontok alkotják, amelyeknek koordinátáira teljesül, hogy $x \le 1$ és $y = -2$, azaz éppen az $(x \le 1 \land y = -2)$ kétismeretlenes nyitott mondat megoldásai.

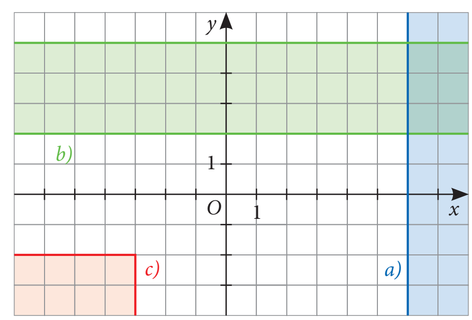
Megjegyzés

Itt most nem beszélhetünk az alakzat *egyenletéről*, a koordinátákra vonatkozó összefüggések ennél bonyolultabbak, ezért használjuk a *nyitott mondat* kifejezést.

Hasonlóképpen a *b)* szakaszt pontosan azok a pontok alkotják, amelyeknek koordinátái megoldásai az $(x = 5 \land -4 \le y \le 2)$ nyitott mondatnak.

A *c)* félegyenest leíró nyitott mondat pedig: $x \le 3 \land y = x$.

2. Egyenlőtlenségek segítségével a sík bonyolultabb részhalmazait is jellemezhetjük. Mely számpárok jellemzik az ábrán látható alakzatokat?



Megoldás

Azok a rendezett számpárok, amelyekre igazak az alábbi nyitott mondatok:

a) $x \ge 6$;

b) $2 \le y \le 5$;

c) $x \le -3 \quad \land \quad y \le -2$.

FELADAT

1. Rajzold meg a következő nyitott mondatoknak megfelelő ponthalmazokat!

a) $x = -4$;

b) $x = -4 \land y = 3$;

c) $x = -4 \land y > 3$;

d) $x = -4 \land 1 < y < 3$;

e) $x = -4 \land 1 \le y \le 3$;

f) $-6 < x < -4 \land 1 < y < 3$.

2. Rajzold meg a következő nyitott mondatoknak megfelelő ponthalmazokat!

a) $y = x$;

b) $y > x$;

c) $y < x + 5$;

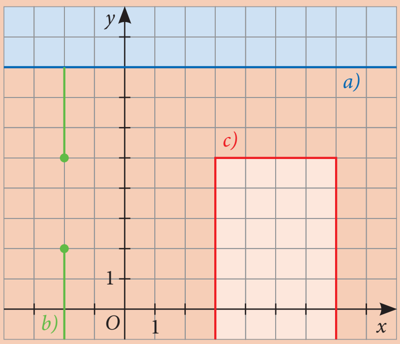
d) $y > x \land y < x + 5$;

e) $y < x \land y < x + 5$;

f) $y < x \lor y > x + 5$.

HÁZI FELADAT

1. Írj igaz állításokat a koordináta-rendszerben látható ponthalmazok elemeinek koordinátáiról! Melyik ponthalmazt melyik nyitott mondattal adhatjuk meg egyértelműen?



2. Ábrázold koordináta-rendszerben azokat a ponthalmazokat, melyeket a következő nyitott mondatok jellemeznek!

a) $x = 3 \wedge 1 \leq y$;

b) $0 \leq x \leq 1$;

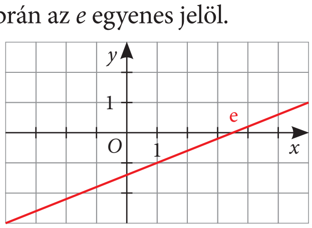
c) $x \leq -4 \wedge y \geq 4$.

3. Milyen alakzatot alkotnak azok a pontok, melyeket a $(-2 \leq x \leq 4 \wedge 0 \leq y \leq 2)$ nyitott mondat jellemez?

RÁADÁS

1. A megfelelő fogalmak pontos ismeretében kevesebb magyarázattal is érthető, hogy mit is jelent a „ponthalmaz egyenlete” kifejezés, hogyan lehet egyetlen egyenlettel végtelen sok pontot egyszerre megadni.

Vizsgáljunk meg egy kétismeretlenes egyenletet! Legyen ez például a $2x - 5y = 7$!
Hány megoldása van ennek az egyenletnek?
Néhány megoldása könnyűszerrel megadható: $(1; -1)$, $(0; -1{,}4)$, $(-2; -2{,}2)$, $(13{,}5; 4)$. **A megadott egyenlet megoldáshalmazában végtelen sok számpár van** (köztük a felsorolt négy számpár is).
Ha a megoldáshalmaz mindegyik elemét megjelenítjük a koordináta-rendszerben egy-egy ponttal, akkor egy végtelen sok pontból álló ponthalmazt kapunk. A megadott egyenlet esetében ez a ponthalmaz egy teljes egyenes lesz, amelyet az ábrán az *e* egyenes jelöl.



Erre a kapcsolatra mondjuk azt, hogy az *e* egyenes egyenlete a $2x - 5y = 7$ egyenlet.

2. A fentebb leírtakból következik, hogy minden kétismeretlenes egyenlethez (egyenlőtlenséghez, nyitott mondathoz) egyértelműen tartozik egy ponthalmaz. Megfordítva azonban ez nem igaz, mert egy ponthalmaznak végtelen sok különböző egyenlete is lehet. Például az $x - y = 0$ kétismeretlenes egyenletnek ugyanaz a megoldáshalmaza, mint az $(x - y)(x^2 + y^2) = 0$ harmadfokú egyenletnek vagy az $(x - y)(x^8 + y^8 + 2) = 0$ kilencedfokú egyenletnek.

3. Az előző és a jelenlegi leckében is kétismeretlenes egyenletekről, egyenlőtlenségekről volt szó, pedig nem is egyszer olyan egyenletet adtunk meg, mint például az $x = 3$. Mit jelent ebben az esetben a „kétismeretlenes” kifejezés?

Az $x = 3$ egyenletből könnyen készíthető kétismeretlenes egyenlet: $x + 0y = 3$. Ezzel az egyszerű átalakítással azonnal látható, hogy ennek az egyenletnek a megoldáshalmazában is számpárok szerepelnek. Világos ezek után, hogy az $x = 3$ egyenlethez is végtelen sok pontból álló ponthalmaz tartozik: az *y* tengellyel párhuzamos egyenes. Az is érthető, hogy ehhez az egyeneshez tartozhat az $x = 3$ egyenlet, de akár az $x - 3 = 0$ vagy az $x + 0y - 3 = 0$ egyenlet is.

73 Egyenlettel kört rajzolunk

BEVEZETŐ

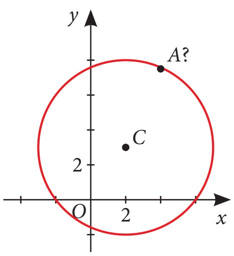
A C középpontú, r sugarú kör azon pontok halmaza a síkon, melyek C ponttól r távolságra vannak. Ennek a ponthalmaznak vajon mi lehet az egyenlete?

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Adott egy kör középpontja, a $C(2; 3)$ pont, és a sugara: $r = 5$.

a) Döntsük el, hogy az $A(4; 7{,}5)$ pont rajta van-e a körön!

b) Adjunk meg egy egyenletet, amely „megrajzolja" a teljes kört!



Megoldás

a) Az $A(4; 7{,}5)$ pontosan akkor van rajta a körön, ha a CA távolság 5.
Mivel $\overrightarrow{CA} = (4; 7{,}5) - (2; 3) = (2; 4{,}5)$, és így $CA = \sqrt{2^2 + 4{,}5^2} = \sqrt{24{,}25} < 5$, ezért az A pont nincs rajta a megadott körön.

Megjegyzés

Az is kiderült, hogy az A pont a megadott körön belül van.

b) Ha a sík egy tetszőleges $P(x; y)$ pontjáról akarjuk eldönteni, hogy rajta van-e a megadott körön, akkor az előbbi példához hasonlóan elegendő azt megvizsgálni, hogy a CP távolság egyenlő-e 5-tel.
Írjuk fel a C pontból P pontba mutató vektort!
$\overrightarrow{CP} = (x; y) - (2; 3) = (x - 2; y - 3)$.
Adjuk meg a $\overrightarrow{CP}$ vektor hosszát!
$CP = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}$.
A $P(x; y)$ pont tehát pontosan akkor van rajta a megadott körön, ha $CP = 5$, azaz ha a P koordinátái között fennáll az $\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = 5$ összefüggés.
Ha a koordináta-rendszer síkjában megjelenítjük az **összes** olyan pontot, amelyeknek a koordinátái igazzá teszik ezt az egyenletet, akkor az ilyen módon megrajzolt ponthalmaz éppen a $C(2; 3)$ középpontú, $r = 5$ sugarú kör lesz.

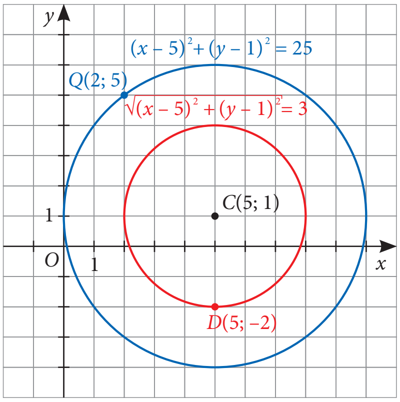
2. Mutassuk meg, hogy a következő egyenletek kört „rajzolnak" meg! Adjuk meg a középpontjukat, sugarukat, és adjunk meg egy pontot is a körön!

a) $\sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2} = 3$

b) $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 25$

Megoldás

a) Az $(x; y)$ és az $(5; 1)$ pontok távolsága $\sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2}$.
Az egyenlet szerint ez éppen 3 egység. Ezért azok az $(x; y)$ pontok tartoznak hozzá az egyenlettel megadott ponthalmazhoz, amelyek a $C(5; 1)$ ponttól 3 egység távolságra vannak. Ez a ponthalmaz tehát egy 3 egység sugarú kör.



A $D(5; -2)$ pont koordinátáit behelyettesítve az egyenletbe a $\sqrt{(5-5)^2+(-2-1)^2} = 3$ kijelentést kapjuk.

Ez pedig igaz, ezért a $D(5; -2)$ pont rajta van a C középpontú körön.

b) A megadott egyenletet pontosan azoknak a pontoknak a koordinátái teszik igazzá, amelyek igazzá teszik a $\sqrt{(x-5)^2+(y-1)^2} = 5$ egyenletet (szakszóval: a két egyenlet ekvivalens egymással). A megadott egyenlet tehát a $C(5; 1)$ ponttól 5 egység távolságra lévő pontok halmazát „rajzolja" meg: ez egy 5 egység sugarú, C középpontú kör.
A $Q(2; 5)$ pont koordinátáit behelyettesítve az egyenletbe a $(2-5)^2+(5-1)^2 = 25$ kijelentést kapjuk. Ez pedig igaz, ezért a $Q(2; 5)$ pont rajta van a körön.

ELMÉLET

Legyen megadva egy koordináta-rendszerben a $C(u; v)$ pont, továbbá a pozitív r valós szám!

1. A C középpontú, r sugarú kör egyenlete megadható a $\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2} = r$ vagy az $(x-u)^2+(y-v)^2 = r^2$ alakban is.
2. Ha a k valós szám pozitív, akkor az $(x-u)^2+(y-v)^2 = k$ egyenlet egy olyan kört ad meg, amelynek középpontja a $C(u; v)$ pont, sugara pedig $r = \sqrt{k}$.

FELADAT

1. Adj meg egy olyan egyenletet, amely „megrajzolja" az adott C középpontú, r sugarú kört!

a) $C(5; 3)$, $r = 2$; **c)** $C(-5; 3)$, $r = 0{,}5$;
b) $C(5; -3)$, $r = 4$; **d)** $C(0; 0)$, $r = 10$.

2. Az alábbi egyenletek egy-egy kört adnak meg. Add meg a körök középpontját és sugarát!

a) $\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2} = 36$;
b) $(x+3)^2+(y-5)^2 = 36$;
c) $(x+3)^2+(y+5)^2 = 6$;
d) $(x+3)^2+y^2 = 25$.

3. Adj meg egy olyan egyenletet, amely „megrajzolja" az adott C középpontú, A ponton átmenő kört!

a) $C(4; 2)$, $A(-1; -10)$; **b)** $C(-2; 2)$, $A(1; -3)$.

4. A kör megrajzolása nélkül döntsd el, hogy a megadott pontok közül melyik nincs rajta az egyenlettel megadott körön!

a) $(x+4)^2+(y-2)^2 = 25$,
$A(-1; -2)$, $B(1; 2)$, $C(-8; 5)$, $D(-2; -3)$;
b) $(x-2)^2+(y+1)^2 = 10$,
$A(-1; -2)$, $B(1; 2)$, $C(3; -5)$, $D(5; 0)$.

HÁZI FELADAT

1. A megadott pontok közül melyik van 10 egység távolságra a $C(2; -5)$ ponttól?
$A(8; 3)$, $B(-8; 0)$, $C(0; 5)$, $D(10; 1)$, $E(11; -9)$.

2. „Rajzolj" egyenlettel egy olyan kört, amelynek a $C(2; -5)$ a középpontja, és 10 egység a sugara! Add meg a kör egyenletét négyzetgyökös és négyzetgyök nélküli formában is!

3. Add meg a következő körök középpontját és sugarát!

a) $\sqrt{(x-7)^2+(y-10)^2} = 8$;
b) $(x-7)^2+(y+10)^2 = 8$;
c) $(x+7)^2+(y-10)^2 = 81$;
d) $(x+7)^2+(y+10)^2 = 1$.

74 A kör egyenlete

KIDOLGOZOTT FELADAT

Mit „rajzoltam" a koordináta-rendszerben az alábbi egyenletekkel?

a) $x + 5 = 0$;

b) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 0$;

c) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$;

d) $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 20$.

Megoldás

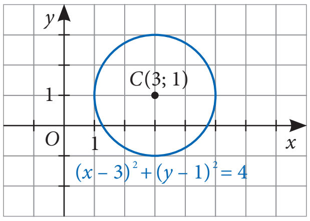
a) Az egyenlet így is írható: $x = -5$. Azokat a pontokat rajzoltam meg a koordináta-rendszerben, amelyeknek az első koordinátája -5. Ezek a pontok az y tengellyel párhuzamos egyenest alkotnak, tehát egy egyenest „rajzoltam" az egyenlettel.

b) Az egyenlet bal oldalán két szám négyzetének összege áll, a jobb oldalán pedig 0. Ez egyetlen esetben valósulhat meg, ha az x helyébe 3-at, az y helyébe pedig 1-et írunk. Tehát egyetlen pontot „rajzoltam" az egyenlettel, mégpedig a $C(3; 1)$ pontot.

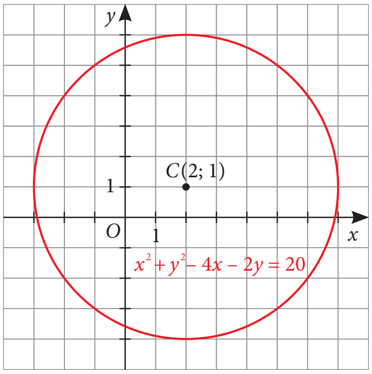
c) Az egyenlet írható a vele ekvivalens

$\sqrt{(x - 3)^2 + (y - 1)^2} = 2$

alakban is. Ez az egyenlet a $C(3; 1)$ ponttól 2 egység távolságra lévő pontokat „rajzolja" meg. Vagyis egy $C(3; 1)$ középpontú, $r = 2$ sugarú kört „rajzoltam" az egyenlettel.



d) Első ránézésre bonyolultnak tűnhet az egyenlet, ezért célszerűen rendezzük: $x^2 - 4x + y^2 - 2y = 20$.
Alkalmazzuk a teljes négyzetté kiegészítés módszerét!
Az egyenlet első két tagja megegyezik az $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$ kifejezés első két tagjával. Az egyenlet második két tagja megegyezik az $(y - 1)^2 = y^2 - 2y + 1$ kifejezés első két tagjával. Vagyis:
$(x^2 - 4x + 4 - 4) + (y^2 - 2y + 1 - 1) = 20$.
Ebből ezt az alakot kapjuk:
$(x - 2)^2 - 4 + (y - 1)^2 - 1 = 20$, amit rendezés után az $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ alakban is írhatunk.
Az $x^2 - 4x + y^2 - 2y = 20$ egyenlettel tehát a $C(2; 1)$ középpontú, $r = 5$ sugarú kört „rajzoltam" meg.



ELMÉLET

Ha az $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ egyenlet (ahol a, b és c adott valós számok) úgy alakítható át $(x - u)^2 + (y - v)^2 = k$ alakra, hogy a k szám pozitív, akkor ez egy $(u; v)$ középpontú, $\sqrt{k}$ sugarú kör egyenlete.
Ha az átalakítás után kapott k szám 0-val egyenlő, akkor ez egyetlen pontnak, az $(u; v)$-nak az egyenlete.
Ha az átalakítás után kapott k szám negatív, akkor egyetlen olyan pont sincs, amely ennek az egyenletnek megfelelne (tehát az üres halmaz egyenlete).

Például:

– az $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 14 = 0$ egyenlet $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$ alakra rendezhető, ezért ez a (3; 1) középpontú, 2 sugarú kör egyenlete.
– az $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 10 = 0$ egyenlet $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 0$ alakra rendezhető, ezért ez nem körnek az egyenlete, hanem a (3; 1) pontnak.
– az $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0$ egyenlet $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = -4$ alakra rendezhető, ezért ez az üres halmaz egyenlete: nincs olyan pont, amely megfelel ennek az egyenletnek.

FELADAT

1. Mit „rajzoltam” a koordináta-rendszerben az alábbi egyenletekkel?

a) $y - 4 = 0$;
b) $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 0$;
c) $(x - 1)^2 + y^2 - 16 = 0$;
d) $x^2 + y^2 + 8x + 10y = -32$.

2. Írd fel azon pontok halmazának egyenletét, melyek a $C(-8; 17)$ ponttól 2,5 távolságra vannak! Milyen alakzatról van szó? Add meg az alakzat két tetszőleges pontját is!

3. Melyik egyenlet „rajzolja meg” a koordináta-rendszerben azt a kört, amelynek az AB szakasz az egyik átmérője?

a) $A(4; -2)$, $B(6; 4)$ **b)** $A(-5; 3)$, $B(-1; -7)$

4. Mit „rajzolnak” a koordináta-rendszerben az alábbi egyenletek?

a) $x^2 + y^2 - 9 = 0$;
b) $x^2 + y^2 = 0$;
c) $x^2 + y^2 + 25 = 0$;
d) $x^2 = 4$.

5. Adott három pont: $A(4; 5)$, $B(2; 3)$, $C(7; -2)$.

a) Igazold, hogy az $(x - 5{,}5)^2 + (y - 1{,}5)^2 = 14{,}5$ egyenlet éppen az ABC háromszög körülírt körét „rajzolja” meg!
b) Mutasd meg a $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ skaláris szorzat kiszámításával, hogy a háromszög derékszögű!

HÁZI FELADAT

1. Adott a $C(-2; 5)$ és az $A(5; 3)$ pont. Add meg egyenlettel azt a kört, amelynek

a) C a középpontja, és A a kör egyik pontja;
b) A a középpontja, és C a kör egyik pontja!

2. Melyik ponthalmazt határozzák meg a következő egyenletek?

a) $5y - 7 = 0$; **b)** $\dfrac{2x - 5}{4} = 0$;
c) $(x + 5)^2 + (y + 2)^2 = 0$.

3. Mit rajzol a számítógép, ha az alábbi egyenleteket adjuk meg?

a) $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$;
b) $x^2 + y^2 + 8x + 10y + 5 = 0$;
c) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$;
d) $x^2 + y^2 - 4y + 13 = 0$.

75 Koncentrikus körök

BEVEZETŐ

Matematikaórán a diákok ezt a feladatot kapták:
Írj fel három olyan kört, amely koncentrikus az $x^2 + y^2 + 10x - 7y + 31 = 0$ körrel!
(Koncentrikusnak nevezünk két kört, ha azonos a középpontjuk, de különböző a sugaruk.)
Kövesd a diákok gondolatmenetét!

Tamás gondolatmenete:
Rendezzük az egyenletet a teljes négyzetté alakítás módszerével abba az alakba, amelyről leolvasható a kör középpontja és sugara! A középpontot tartsuk meg, a sugarat pedig változtassuk meg!
Az átrendezés menete:

$(x^2 + 10x) + (y^2 - 7x) + 31 = 0$

$(x^2 + 10x + 5^2 - 5^2) + (y^2 - 7y + 3{,}5^2 - 3{,}5^2) + 31 = 0$

$(x^2 + 10x + 25 - 25) + (y^2 - 7y + 12{,}25 - 12{,}25) + 31 = 0$

$(x + 5)^2 + (y - 3{,}5)^2 - 25 - 12{,}25 + 31 = 0$

$(x + 5)^2 + (y - 3{,}5)^2 - 6{,}25 = 0$

$(x + 5)^2 + (y - 3{,}5)^2 = 6{,}25$

Tehát a kör középpontja a $(-5;\ 3{,}5)$ pont, sugara pedig $\sqrt{6{,}25} = 2{,}5$
Ha pedig a sugarat megváltoztatom 3-ra, 10-re vagy akár 100-ra, akkor az eredetivel koncentrikus köröket kapok.

Zsuzsa gondolatmenete:
Az $x^2 + y^2 + 10x - 7y + 31 = 0$ körrel koncentrikus körök egyenletében az x együtthatója szintén 10, az y együtthatója szintén (-7). Csak a 31 változik más számra, azt kell alkalmasan kicserélnem.
Az eredetivel koncentrikus köröket kapok, ha 31 helyére például 0-t, (-1)-et vagy (-10)-et írok.

FELADAT

1. Ellenőrizd Zsuzsa megoldását!

a) Valóban három kör egyenletét írta fel? Mekkora ezeknek a sugara?

b) Minek alapján gondolhatta Zsuzsa, hogy helyesen oldja meg a feladatot?

2. Karola folytatta Zsuzsa gondolatmenetét, és ezt a három egyenletet írta fel:

$x^2 + y^2 + 10x - 7y + 20 = 0;$

$x^2 + y^2 + 10x - 7y + 50 = 0;$

$x^2 + y^2 + 10x - 7y + 77 = 0.$

a) Melyik egyenlethez tartozik valóban egy kör, és melyikhez nem tartozik semmi? Miért?

b) Mi a lényeges különbség Zsuzsa és Karola megoldása között?

3. Melyik számot írhatjuk az $x^2 + y^2 + 10x - 7y + 31 = 0$ egyenletben a 31 helyére, hogy

a) egy pont egyenletét kapjuk;

b) egy kör egyenletét kapjuk;

c) olyan egyenletet kapjunk, amelynek egyetlen pont sem felel meg?

4. Az *ABCD* négyzet két szemközti csúcsa $A(3;\ -2)$, $C(9;\ 1)$.

a) Add meg a négyzet körülírt és beírt körének egyenletét!

b) Add meg a *B* és a *D* csúcs koordinátáit is!

5. Adott két kör: $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 9$, $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 9$.
Írd fel azoknak a köröknek az egyenletét, amelyeknek a középpontja a két megadott kör középpontjait összekötő egyenesen van, és amelyek mindkét adott kört érintik! (4 ilyen kör van!)

HÁZI FELADAT

1. Az egyenletek átalakítása után állapítsd meg, hogy melyik ad meg kört, melyik egy pontot, és melyik az üres halmazt! Add meg a körök középpontját és sugarát is!

a) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$;

b) $x^2 + y^2 - 5x + 6y + 16 = 0$;

c) $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 20 = 0$;

d) $x^2 + y^2 + 10x - 6y + 14 = 0$.

2. Melyik számot írhatjuk az
$x^2 + y^2 - 8x + 5y + 7 = 0$
egyenletben a 7 helyére, hogy az
$(x - 4)^2 + (y + 2{,}5)^2 = k$ átalakítás után a k szám

a) 0; **b)** pozitív; **c)** negatív

legyen? Melyik esetben létezik az egyenletnek megfelelő kör?

3. Az $A(-4; 0)$, $B(4; 0)$ és $C(0; 4\sqrt{3})$ pontok szabályos háromszöget alkotnak.

a) Add meg a háromszög súlypontját!

b) Határozd meg, milyen távol van a súlypont a háromszög csúcsaitól!

c) Írd fel a háromszög körülírt körének egyenletét!

d) A szabályos háromszög beírt körének sugara feleakkora, mint a körülírt kör sugara. Írd fel a háromszög beírt körének egyenletét!

RÁADÁS

A ponthalmazok koordináta-rendszerben történő ábrázolása a számítógépek megjelenésével egészen új értelmet nyert. A számítógépek minden információt számként értelmeznek, és válaszaikat is szám formában adják meg. Ha tehát azt szeretnénk elérni, hogy a számítógép például egy kört rajzoljon a kijelzőjére (képernyőre), akkor a kijelző koordináta-rendszerében meg kell „neveznünk”, hogy a képernyő összes (véges sok!) pontja közül melyek azok a pontok (azok a számpárok), amelyeket a gépnek meg kell jelenítenie.

Ha például egy $(-2; 3)$ középpontú, 4 egység sugarú kör pontjait akarjuk megjeleníteni, akkor a számítógéppel közöljük a kör egyenletét: $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$, vagy másképpen: $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$.

Mit „tesz” a számítógép? Nagyon leegyszerűsítve a folyamatot a következő történik. A képernyő összes (sok, de véges sok!) megjeleníthető pontjának koordinátáit a gép rendre „behelyettesíti” a megadott egyenletbe. Ha igaz kijelentést kap, akkor a pontot megjeleníti, ha hamisat, akkor nem. A megjelenített pontok egy körön helyezkednek el, mégpedig éppen a megadott középpontú és sugarú körön. A látvány annál meggyőzőbb (annál jobban hasonlít körre a megjelenített pontok halmaza), minél nagyobb a megjelenítőeszköz (képernyő) képpontjainak száma (a képernyő felbontása).

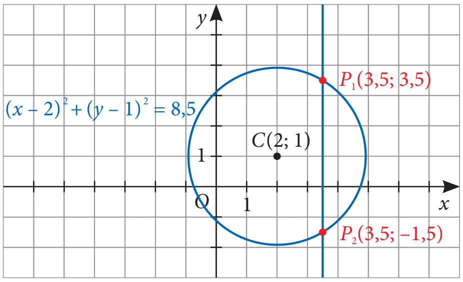
76 Körrel kapcsolatos feladatok

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Melyek az $(x-2)^2+(y-1)^2=8{,}5$ egyenletű körnek azok a pontjai, amelyeknek az első koordinátája 3,5?

Megoldás

A kérdés az, hogyan adjuk meg a $P(3{,}5;\ y)$ pont második koordinátáját úgy, hogy a pont rajta legyen a körön.
Ez pontosan akkor teljesül, ha az y szám megoldása a $(3{,}5-2)^2+(y-1)^2=8{,}5$ egyenletnek.



Elvégezve a négyzetre emeléseket:
$2{,}25+y^2-2y+1=8{,}5$.
A másodfokú egyenletet nullára rendezve:
$y^2-2y-5{,}25=0$.
A megoldóképlet szerint $y=\dfrac{2\pm\sqrt{25}}{2}$, amiből $y=3{,}5$, illetve $y=-1{,}5$ adódik.
A körnek két olyan pontja van, amelynek az első koordinátája 3,5. Az egyik ilyen pont a $P_1(3{,}5;\ 3{,}5)$, a másik pedig a $P_2(3{,}5;\ -1{,}5)$.

Megjegyzések

– A fentiekben egy kör és egy (y tengellyel párhuzamos) egyenes közös pontjait határoztuk meg, körző és vonalzó nélkül.

– A feladat kérdésére az $\left.\begin{aligned}(x-2)^2+(y-1)^2&=8{,}5\\ x&=3{,}5\end{aligned}\right\}$
másodfokú egyenletrendszer megoldása adta meg a választ.

Az egyenletrendszer megoldáshalmaza:
$\{(3{,}5;\ -1{,}5);\ (3{,}5;\ 3{,}5)\}$.

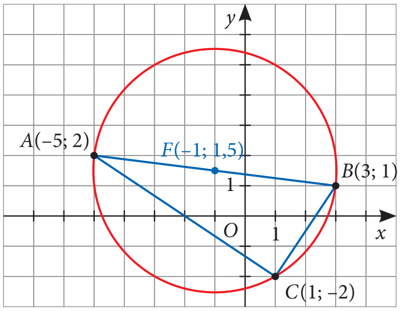
2. Adott az ABC háromszög: $A(-5;\ 2)$, $B(3;\ 1)$, $C(1;\ -2)$.

a) Igazoljuk, hogy a háromszög derékszögű!

b) Írjuk fel a háromszög körülírt körének egyenletét!

Megoldás

a) Készítsünk vázlatot a feladathoz! Ennek alapján azt sejtjük, hogy a háromszög C csúcsánál lehet a derékszög.



A C csúcsnál pontosan akkor van derékszög, ha a $\overrightarrow{CA}$ és a $\overrightarrow{CB}$ merőleges egymásra. Hívjuk segítségül a vektorok skaláris szorzásánál tanultakat!
$\overrightarrow{CA}=(-5;2)-(1;-2)=(-6;4)$ és
$\overrightarrow{CB}=(3;1)-(1;-2)=(2;3)$, így a két vektor skaláris szorzata: $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(-6;4)\cdot(2;3)=-12+12=0$.
A két vektor tehát merőleges egymásra, ezért a háromszög CA oldala is merőleges a CB oldalra. Ezzel igazoltuk, hogy az ABC háromszög derékszögű.

b) A derékszögű háromszög körülírt körének középpontja a háromszög átfogójának felezőpontja, a kör sugara pedig az átfogó felével egyenlő.
A háromszög körülírt körének középpontja tehát az AB szakasz felezőpontja:
$F\left(\dfrac{-5+3}{2};\ \dfrac{2+1}{2}\right)=(-1;1{,}5)$,
a kör sugara az AB szakasz felével egyenlő:
$r=AF=|\overrightarrow{AF}|=\sqrt{(-1+5)^2+(1{,}5-2)^2}=\sqrt{16{,}25}$.
Az ABC háromszög körülírt körének egyenlete tehát:
$(x+1)^2+(y-1{,}5)^2=16{,}25$.

Megjegyzés

A kör egyenletét más alakban is megadhatjuk, ha elvégezzük a négyzetre emeléseket és az összevonásokat:

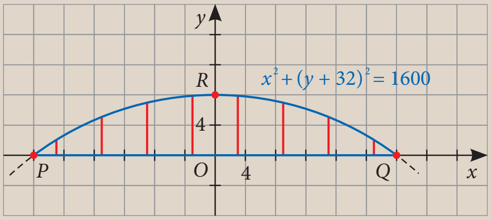
$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 3y + 2{,}25 = 16{,}25$, vagy

$x^2 + y^2 + 2x - 3y - 13 = 0$.

FELADAT

1. A vasúti felüljáró egyik szerkezeti eleme körív alakú, amelyet függőleges tartóoszlopok erősítenek meg.

A tervrajzon az ábra szerint koordináta-rendszerbe helyezve szerepel. Az ív az $x^2 + (y + 32)^2 = 1600$ egyenletű kör része (a tengelyeken az egységeket méterben mérve).



a) Mekkora a körív sugara?

b) Add meg a *P*, a *Q* és az *R* pont koordinátáit!

c) A szomszédos függőleges tartóoszlopok 6 méterre vannak egymástól. Mekkora a leghosszabb és a legrövidebb tartóoszlop magassága?

2. Hány olyan érintője van az

$(x + 1)^2 + (y - 1{,}5)^2 = 16{,}25$

egyenletű körnek, amely átmegy a $P(-3; 4{,}5)$, a $Q(-5; 1)$, illetve az $S(2; 5)$ ponton?

a) Vizsgáld meg, hogy helyezkednek el az adott pontok a körhöz képest!

b) Add meg a lehetséges érintők számát aszerint, hogy a pont a körön belül, kívül vagy éppen rajta helyezkedik el!

3. Egy kör középpontja a $C(-5; -3)$ pont, és a kör érinti az *y* tengelyt.

a) Határozd meg a kör sugarát, és írd fel a kör egyenletét!

b) Add meg a kör azon pontjait, amelyeknek a második koordinátája (-6)!

HÁZI FELADAT

1. Adott az *ABC* háromszög: $A(7; 6)$, $B(-1; -3)$, $C(-3; 2)$.

a) Igazold, hogy a háromszög derékszögű!

b) Írd fel a háromszög körülírt körének egyenletét!

c) Számítsd ki a háromszög hegyesszögeinek nagyságát és a háromszög területét is!

2. A koordinátatengelyek mely pontjaiból látható derékszögben az *AB* szakasz, ha $A(-1; 0)$ és $B(4; 3)$?

3. Adott a koordináta-rendszerben két kör az egyenletével: $x^2 + y^2 + 14x - 2y = 0$,

$x^2 + y^2 + 14x - 2y + 34 = 0$.

Mutasd meg, hogy a két kör koncentrikus (ugyanaz a középpontjuk), és számítsd ki a körök által határolt körgyűrű területét!

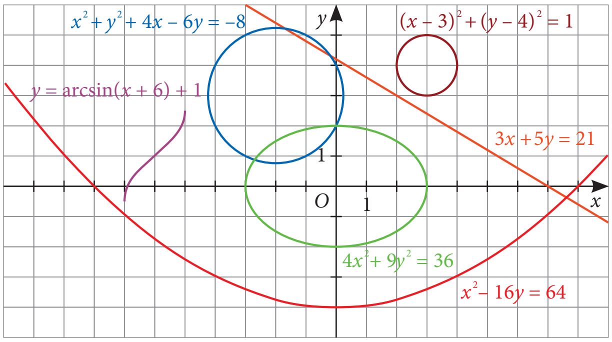
77 Az egyenes

BEVEZETŐ

Dönci megértette, hogy a *számítógép* képes megjeleníteni a kétismeretlenes egyenletek megoldáshalmazát. Az *interneten* kutatva számos olyan programot talált, amely megbízható, ingyenesen is hozzáférhető és könnyen kezelhető.

Az egyik ilyen program próbálgatásakor különböző egyenleteket írt be, és kíváncsian figyelte, mit rajzol a gép.

Aztán elhatározta, hogy megpróbálkozik egy egyszerűbb alakzat megrajzoltatásával. Elsőként egy téglalapot akart rajzoltatni, de nem tudta, milyen egyenleteket írjon be. Ezért úgy döntött, először inkább megadja a téglalap csúcsait, az egyenletekkel majd csak utána foglalkozik.



Az első két csúcsot így választotta: $A(0;\ 5)$ és $B(3;\ 0)$. De hová tegye most a C csúcsot, hogy tényleg téglalapot kapjon?

KIDOLGOZOTT FELADAT

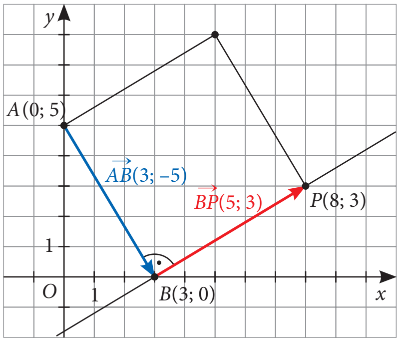
1. Az $ABCD$ téglalap két csúcsa $A(0;\ 5)$ és $B(3;\ 0)$.

a) Lehet-e a téglalap C csúcsa a $P(8;\ 3)$, illetve a $Q(6{,}5;\ 2{,}5)$ pont?

b) Milyen kapcsolat van a $C(x;\ y)$ pont két koordinátája között, ha az $ABCD$ négyszög téglalap?

Megoldás

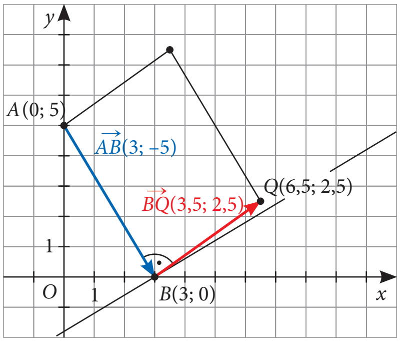
a) A téglalap AB és BC oldalának merőlegesnek kell lennie. A korábbi leckékben láttuk, hogy ez pontosan akkor teljesül, ha az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{BC}$ oldalvektorok skaláris szorzata nulla.



$\overrightarrow{AB} = (3;\ -5)$, $\overrightarrow{BP} = (5;\ 3)$, ezért
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP} = 3 \cdot 5 + (-5) \cdot 3 = 0$.
A $P(8;\ 3)$ pont tehát lehet az $ABCD$ téglalap C csúcsa.

Megjegyzés
Mivel az $(5;\ 3)$ oldalvektor éppen a $(3;\ -5)$ oldalvektor 90°-os elforgatottja, ezért ez a téglalap négyzet.

$\overrightarrow{BQ} = (3{,}5;\ 2{,}5)$,
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BQ} = 3 \cdot 3{,}5 + (-5) \cdot 2{,}5 = -2 \neq 0$,
tehát a BQ szakasz nem merőleges az AB szakaszra.



A Q pont ezért nem lehet az $ABCD$ téglalap harmadik csúcsa.

b) $\overrightarrow{AB} = (3; -5)$, $\overrightarrow{BC} = (x - 3;\ y)$,
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 3 \cdot (x - 3) + (-5) \cdot y = 3x - 5y - 9$.
Az *ABCD* négyszög akkor és csak akkor lehet téglalap, ha ez a skaláris szorzat 0-val egyenlő, vagyis ha $3x - 5y - 9 = 0$ (és $C \neq B$).

2. Milyen alakzatot rajzol ki a számítógép rajzolóprogramja, ha beírjuk a $3x - 5y - 9 = 0$ egyenletet?

Megoldás

A számítógép megjeleníti a téglalap *C* csúcsaként választható összes pontot. Ezek a pontok a *B* ponton átmenő, *AB*-re merőleges egyenesen vannak. Ennek az egyenesnek minden *B*-től különböző pontja választható *C* csúcsként, tehát a program egy olyan egyenest rajzol, amelyik átmegy a *B* ponton, és merőleges az $\overrightarrow{AB}$-ra. A számítógép a *B* pontot is megjeleníti, mert a *B* koordinátáit behelyettesítve azt kapja, hogy $3 \cdot 3 - 5 \cdot 0 - 9 = 0$, ami igaz kijelentés.
A $3x - 5y - 9 = 0$ egyenlet tehát egy teljes egyenes egyenlete.

Megjegyzés

Figyeljük meg, hogy a $3x - 5y - 9 = 0$ egyenletben megjelent az $\overrightarrow{AB} = (3; -5)$ két koordinátája is!

FELADAT

1. A $3x - 5y - 9 = 0$ egyenlet beírásával a számítógép megrajzolja a téglalap *BC* oldalegyenesét. Válasszunk az egyenesen egy pontot, mégpedig a $C(13; 6)$-ot.

a) Ellenőrizd, hogy valóban rajta van-e a megadott pont az egyenesen!
b) Add meg az *ABCD* téglalap középpontját!
c) Add meg a téglalap *D* csúcsának koordinátáit!
d) Milyen egyenletet adjunk meg, ha meg akarjuk rajzoltatni az *AD* oldalegyenest?
e) Milyen egyenletet adjunk meg, ha meg akarjuk rajzoltatni a *CD* oldalegyenest?
f) Milyen egyenletet adjunk meg, ha meg akarjuk rajzoltatni az *AB* oldalegyenest?

2. A város egyenes Fő utcájának két pontja $A(6; -1)$ és $B(9; 7)$, a szintén egyenes Mellék utca két pontja pedig $C(-5; -6)$ és $D(-1; -7{,}5)$.

a) Igazold, hogy a Fő utca és a Mellék utca merőlegesek egymásra!
b) Add meg a Mellék utca egyenesének egyenletét!
c) Add meg a Fő utca egyenesének egyenletét!
d) Igaz-e, hogy a $P(7;\ 2)$ pont a Fő utcán van?
e) Igaz-e, hogy a $Q(3; -9)$ pont a Mellék utcán van?
f) Igaz-e, hogy a két utca a *Q* pontban metszi egymást?

HÁZI FELADAT

1. Merőleges-e az $\overrightarrow{AB}$ és az $\overrightarrow{AK}$, ha $A(-5; 4)$, $B(0; 0)$ és
a) $K(3; 13)$;
b) $K(3; 14)$;
c) $K(-1; 9)$?

2. Melyik pont lehet az $L(x;\ y)$, ha $A(-5; 4)$, $B(0; 0)$, és az $\overrightarrow{AB}$ merőleges
a) a $\overrightarrow{BL}$-ra;
b) az $\overrightarrow{AL}$-ra?

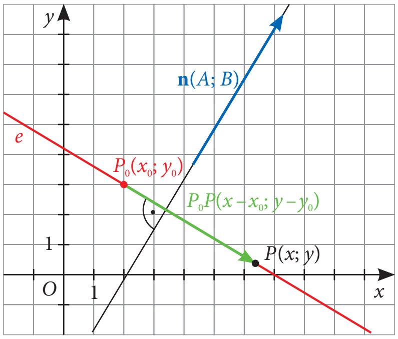
3. Foglalkozz az $5x + 7y = 13$ egyenlethez tartozó alakzattal!

a) Igazold, hogy a $P(-3; 4)$ pont az alakzat egyik pontja!
b) Határozd meg az alakzatnak azt a *Q* pontját, melynek első koordinátája 4.
c) Igazold, hogy a $\overrightarrow{PQ}$ vektor merőleges az egyenlet együtthatóival felírt (5; 7) vektorra!
d) Adj meg egy olyan téglalapot, melynek két szomszédos csúcsa P és Q. Írd fel a másik két csúcs koordinátáit!

78 Az egyenes egyenlete

KIDOLGOZOTT FELADAT

Keressük a $P_0(2; 3)$ ponton átmenő, $\mathbf{n}(3; 5)$ vektorra merőleges e egyenes egyenletét!



Megoldás

A sík egy tetszőleges $P(x; y)$ pontja pontosan akkor van az e egyenesen, ha az $\mathbf{n}$ merőleges a $\overrightarrow{P_0P}$ -ra, vagyis ha teljesül, hogy $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$.

$\overrightarrow{P_0P} = (x; y) - (2; 3) = (x - 2; y - 3)$, így

$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = (3; 5) \cdot (x - 2; y - 3) = 3(x - 2) + 5(y - 3) = 3x + 5y - 21.$

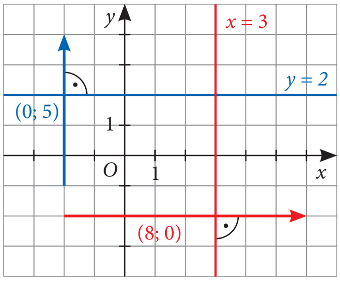
A (2; 3) ponton átmenő és az $\mathbf{n} = (3; 5)$-re merőleges egyenes egy egyenlete tehát: $3x + 5y - 21 = 0$, átalakítva: $3x + 5y = 21$.

ELMÉLET

Egy egyenesre merőleges vektort, ha az nem a nullvektor, az egyenes ***normálvektorának*** nevezünk.

Ha az egyenes egyik normálvektora $\mathbf{n}(A; B)$ és egy adott pontja $P_0(x_0; y_0)$, akkor az egyenlete felírható $Ax + By = Ax_0 + By_0$ alakban.

Például: ha $\mathbf{n}(3; 5)$ és $P_0(2; 3)$, akkor az egyenes egyenlete $3x + 5y = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 5 = 21$.



Az egyenes egyenletében az x és az y együtthatója egyszerre nem lehet 0, mert kikötöttük, hogy a normálvektor nem a nullvektor.
Ha az x vagy az y együtthatója 0, de a másik együttható nem 0, akkor ez egyismeretlenes egyenlet. A megfelelő ponthalmaz pedig az y, illetve az x tengelyre merőleges egyenes.

Például: ha $\mathbf{n} = (0; 5)$ és $P_0(3; 2)$, akkor az egyenlet: $5y = 10$, és ha $\mathbf{n} = (8; 0)$ és $P_0(3; 2)$, akkor az egyenlet $8x = 24$ alakban írható.

FELADAT

1. Írd fel három olyan egyenes egyenletét, amelyek egyik normálvektora $\mathbf{n}(3; 7)$! Milyen ennek a három egyenesnek a kölcsönös helyzete?

2. Adj meg három pontot a koordináta-rendszerben!

a) Írd fel azoknak az egyeneseknek az egyenletét, amelyeknek a normálvektora az $\mathbf{n}(3; 7)$, és egy pontjuk a három adott pont valamelyike!

b) Hány egyenest kaptál?

c) Lehetséges-e, hogy valaki megoldotta az a) feladatot, és csak 1 egyenest kapott?

3. Bence igazolni akarja, hogy a $6x - 7y = 3$ egy olyan egyenes egyenlete, amelynek az egyik normálvektora $\mathbf{n}(6; -7)$. Keres egy olyan pontot, amelynek a koordinátái igazzá teszik az adott egyenletet, aztán felírja az adott ponton átmenő, $\mathbf{n}$ normálvektorú egyenes egyenletét. Megkapja-e a $6x - 7y = 3$ egyenletet? Oldd meg te is ezt a feladatot!

a) Válaszd azt a K pontot az egyenesen, amelynek a második koordinátája 0. Mi az első koordinátája?

b) Mi a K-n átmenő, $\mathbf{n}(6; -7)$ normálvektorú egyenes egyenlete?

ELMÉLET

Ha az $ax + by = c$ egyenletben a, b és c adott valós számok, de a és b közül legalább az egyik nem egyenlő 0-val, akkor ez egy egyenes egyenlete. Az egyenes egyik normálvektora az $\mathbf{n}(a;\ b)$. Az egyenesnek akárhány pontját megkaphatjuk úgy, hogy az x-nek vagy az y-nak egy konkrét értéket adunk, és a kapott egyismeretlenes egyenletet megoldjuk.

FELADAT

4. Add meg a következő egyenletek 2-2 normálvektorát és 3-3 pontját!

a) $x + y = 1$; **c)** $-4x - 4y = -4$;

b) $-4x - 4y = 3$; **d)** $\sqrt{5}\,x - \sqrt{5}\,y = \sqrt{5}$.

5. Melyik egyenes az ABC egyenlő szárú háromszög szimmetriatengelye, ha az alap két végpontja $A(0; -3)$ és $B(10; 9)$?

HÁZI FELADAT

1. Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek egyik pontja az origó, és az egyik normálvektora az

a) $\mathbf{n}(6; 5)$; **b)** $\mathbf{n}(6; 1)$; **c)** $\mathbf{n}(6; 0)$; **d)** $\mathbf{n}(6; -5)$!

2. Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(2; 9)$ ponton, és az egyik normálvektora az

a) $\mathbf{n}(6; 5)$; **b)** $\mathbf{n}(6; 1)$; **c)** $\mathbf{n}(6; 0)$; **d)** $\mathbf{n}(6; -5)$!

3. Igaz-e, hogy a $2x + y = 6$ egyenletű egyenes az ABC háromszög egyik oldalfelező merőlegese, ha $A(-3; 2)$, $B(7; -8)$ és $C(5; 6)$?

EMELT SZINT

Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenes normálvektora $\mathbf{n}(A; B)$, egy adott pontja $P_0(x_0; y_0)$, akkor egyenlete felírható $Ax + By = Ax_0 + By_0$ alakban!

I. Az egyenes egy tetszőleges pontja legyen $P(x; y)$. Ekkor a $\overrightarrow{P_0P}$ vektor így írható: $(x - x_0; y - y_0)$. A $\overrightarrow{P_0P}$ vektor merőleges $\mathbf{n}$ vektorra, hisz $\overrightarrow{P_0P}$ az egyenes két pontját köti össze, $\mathbf{n}$ pedig az egyenesre merőleges vektor. Ez akkor is igaz, ha P egybeesik P_0 ponttal, hiszen akkor $\overrightarrow{P_0P}$ nullvektor, ami minden vektorra merőleges. Ha két vektor merőleges, akkor skalárszorzatuk 0, ezért $\overrightarrow{P_0P} \cdot \mathbf{n} = 0$. A vektorok skalárszorzatát a koordinátákkal felírva: $(x - x_0)A + (y - y_0)B = 0$. A zárójelet felbontva ez átrendezhető a keresett alakra: $Ax + By = Ax_0 + By_0$.

II. Be kell még látnunk, hogy ha egy pontra teljesül az egyenlet, akkor rajta van az egyenesen. Tekintsünk egy $P(x; y)$ pontot, melyre $Ax + By = Ax_0 + By_0$. Ezt átrendezve: $(x - x_0)A + (y - y_0)B = 0$.
Ez nem más, mint az $(x - x_0; y - y_0)$ vektor és $(A; B)$ skalárszorzata. Két vektor skalárszorzata úgy lehet 0, ha egyikük nullvektor, vagy pedig merőlegesek. Az $(A; B)$ nem nullvektor, hiszen normálvektora egy egyenesnek. Ha $(x - x_0; y - y_0)$ nullvektor, akkor P egybeesik P_0-lal, ezért P rajta van az egyenesen. Ha $(x - x_0; y - y_0)$ nem nullvektor, akkor $\overrightarrow{P_0P}$ vektor merőleges $\mathbf{n}$-re, azaz P rajta van az $\mathbf{n}$-re merőleges, P_0 ponton átmenő egyenesen.

79 Irányvektor, két ponton átmenő egyenes

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. A meteorit az $A(-5;\ -2)$ pontban van, és az óránkénti elmozdulásvektora az állandó $\mathbf{v}(4;\ 3)$ vektorral adható meg. Veszélyben van-e a $B(5;\ 5{,}6)$ pontba érkező űrállomás?

Megoldás

A meteorit pályája (legalábbis rövid távon) egy, az $A(-5;\ -2)$ ponton áthaladó olyan egyenes, amelyik párhuzamos a $\mathbf{v}(4;\ 3)$ vektorral.

A $B(5;\ 5{,}6)$ pontba érkező űrállomás veszélyben lehet, ha a B pont rajta van a meteorit pályáján. A kérdés eldöntéséhez írjuk fel a pálya egyenletét!

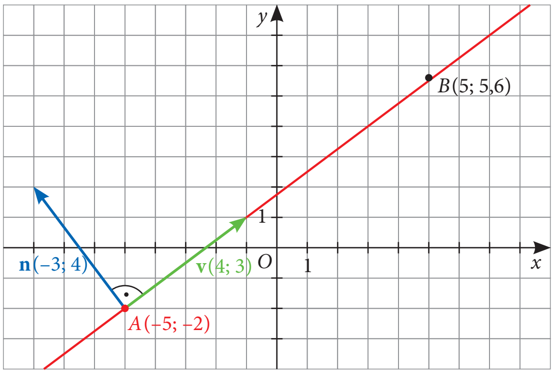
Ha a $\mathbf{v}(4;\ 3)$ vektort elforgatjuk 90°-kal, akkor a pályaegyenes egy normálvektorát kapjuk, legyen ez az $\mathbf{n}(-3;\ 4)$.

Az előző leckében leírtak szerint a pálya egyenlete felírható így: $-3x + 4y = (-3)\cdot(-5) + 4\cdot(-2)$.

Egyszerűbb alakban: $-3x + 4y = 7$.

Helyettesítsük ebbe az egyenletbe a B pont koordinátáit: $-3\cdot 5 + 4\cdot 5{,}6 = 7$, azaz $7{,}4 = 7$. Ez hamis kijelentés, tehát a B pont nincs rajta a meteorit pályáján.

Az űrállomás nincs veszélyben a B pontban (legalábbis a meteorit nem veszélyezteti).



ELMÉLET

Ha egy vektor egyállású (párhuzamos) egy egyenessel, és ez nem a nullvektor, akkor ezt az egyenes ***irányvektorának*** nevezzük.

Egy irányvektorból könnyen megkaphatjuk az egyenes egy normálvektorát: az irányvektort el kell forgatnunk 90°-kal.

Például

ha egy egyenes egyik irányvektora a $\mathbf{v}(2;\ 9)$, akkor az egyenesnek normálvektora az $\mathbf{n}(-9;\ 2)$ és az $\mathbf{m}(9;\ -2)$ is.

FELADAT

1. Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek a $\mathbf{v}(4;\ 3)$ irányvektora, és az egyenes átmegy

a) a $P(-1;\ 4)$ ponton;
b) a $Q(0;\ 5)$ ponton;
c) az $R(3;\ -2)$ ponton!

2. Add meg a $3x + y = 12$ egyenletű egyenes három irányvektorát!

3. Add meg az egyenes egy irányvektorát és egy normálvektorát, ha az egyenes átmegy a megadott két ponton!

a) $A(0;\ 4)$ és $B(3;\ 0)$;
b) $A(5;\ 2)$ és $B(-1;\ -1)$;
c) $A(3{,}8;\ 4{,}3)$ és $B(2{,}5;\ -0{,}7)$.

KIDOLGOZOTT FELADAT

2. Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az $A(5;\ 2)$ és a $B(-1;\ -1)$ pontokon!

Megoldás

A 3. feladat b) részében láttuk, hogy az egyenes egy irányvektorát megadja az $\overrightarrow{AB}(-6; -3)$. Ennek egyik 90°-os elforgatottja az $\mathbf{n}(3;\ -6)$.

Az egyenes tehát átmegy (például) az $A(5;\ 2)$ ponton, és az $\mathbf{n}(3;\ -6)$ egy normálvektora. Az egyenes egyenlete: $3x - 6y = 3 \cdot 5 - 6 \cdot 2$. Ez felírható a $3x - 6y = 3$ vagy egyszerűsítés után az $x - 2y = 1$ alakban is.

Megjegyzés

Ha az $\mathbf{n}(3;\ -6)$ helyett a vele párhuzamos $(1;\ -2)$ vektort választottuk volna az egyenes normálvektorának, akkor az azzal az előnnyel járt volna, hogy egyrészt kisebb abszolút értékű számokkal kellett volna dolgoznunk, másrészt azonnal az egyszerűsített $x - 2y = 1$ alakban kaptuk volna meg az egyenes egyenletét.

FELADAT

4. Add meg a két ponton átmenő egyenes egyenletét, ha a két pont

a) $A(3;\ 5)$ és $B(0;\ 0)$;

b) $A(-2;\ 1)$ és $B(2;\ -3)$;

c) $A(0;\ -4)$ és $B(-3;\ 0)$;

d) $A(11;\ 15)$ és $B(-8;\ -4)$!

HÁZI FELADAT

1. Rajzold be egy koordináta-rendszerbe az ABC háromszöget, és írd fel a leghosszabb oldal egyenesének az egyenletét!

a) $A(0; 0)$, $B(5; -1)$, $C(7; 3)$;

b) $A(-10; -3)$, $B(5; 7)$, $C(9; 1)$.

2. Foglalkozz tovább az 1. b) házi feladatban megadott háromszöggel!

a) Igazold, hogy a BC egyenes egyik normálvektora az $\overrightarrow{AB}$!

b) Írd fel az AB és a BC egyenes egyenletét!

RÁADÁS

Az egyenes többféleképpen is megadható, mi magunk is három különböző esetet vizsgáltunk (egy ponttal és egy normálvektorral, egy ponttal és egy irányvektorral, illetve két pontjával adtunk meg egyenest). A megadáshoz kapcsolódóan különböző „képleteket” készíthetünk, amelyek lehetővé teszik, hogy a kiinduló adatok felhasználásával azonnal felírhassuk az egyenes egy egyenletét. Ezek használata természetesen nem kötelező, csupán arra szolgálnak, hogy adott esetben felgyorsítsák a feladatmegoldás folyamatát.

Egy „gyorsító” képlet az is, amely az egyenes egy pontja és egy irányvektora segítségével adja meg az egyenes egyenletét: az $A(x_0;\ y_0)$ ponton átmenő, $\mathbf{v}(v_1;\ v_2)$ irányvektorú egyenes egyenlete: $v_2 x - v_1 y = v_2 x_0 - v_1 y_0$.

Például

az $A(3;\ 2)$ ponton átmenő, $\mathbf{v}(7;\ 4)$ irányvektorú egyenes egyenlete: $4x - 7y = 4 \cdot 3 - 7 \cdot 2$, azaz $4x - 7y = -2$.

80 Meredekség, iránytangens

BEVEZETŐ

Korábbi tanulmányainkban a koordináta-rendszerben ábrázolt egyenesekkel akkor foglalkoztunk, amikor az elsőfokú függvényeket ábrázoltuk. (Most ennél általánosabban vizsgáltuk az egyeneseket, hiszen az y tengellyel párhuzamos egyenesekre nem igaz, hogy azok valamely függvény grafikonjai.)
Az $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto mx + b$ $(m \neq 0)$ elsőfokú függvény grafikonjának egyenletét általánosan $y = mx + b$ alakban írtuk fel. Itt az m-et az egyenes *meredekségének* neveztük. Ezt az elnevezést ezután is megtartjuk.
Mit mutat egy **egyenes meredeksége**? Azt, hogy ha az egyenes valamelyik pontjából *1 egységet megyünk* az első tengellyel párhuzamosan pozitív irányba, akkor *mennyit kell mennünk* a második tengellyel párhuzamosan, hogy újra az egyenes egy pontjához jussunk.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Mennyi a $3x - 2y = -6$ egyenes meredeksége?

Megoldás

Az egyenes egyenletét rendezve megkapjuk: $y = \frac{3}{2}x + 3$.

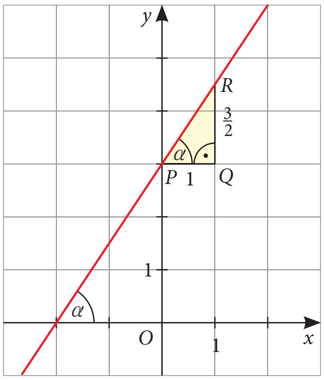
Az egyenes meredeksége tehát $\frac{3}{2}$.

2. Mekkora szöget alkot a koordinátatengelyekkel a $3x - 2y = -6$ egyenletű egyenes?

Megoldás

A kérdésre legegyszerűbben a meredekség segítségével válaszolhatunk. Az egyenes egyenletének $y = \frac{3}{2}x + 3$ alakjából látjuk, hogy a meredeksége $\frac{3}{2}$, és az y tengelyt a 3-nál metszi.

Az ábra PQR derékszögű háromszögének PQ befogója 1 hosszúságú, QR befogója pedig éppen a meredekség.
Az egyenes az x tengellyel α szöget zár be, ami a PQR háromszög P-nél fekvő hegyesszögével egyenlő.
A derékszögű háromszögben felírva e szög tangensét:
$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$,
amiből $\alpha \approx 56{,}3°$.
Az egyenes y tengellyel bezárt szöge az α pótszöge:
$90° - \alpha \approx 33{,}7°$.



ELMÉLET

Ha egy egyenes metszi az x tengelyt, akkor az egyenes **irányszögének** nevezzük azt a 0° és 180° közötti forgásszöget, amellyel a metszéspont körül az x tengelyt elforgatva a képe az egyenes.
- Ha egy egyenes párhuzamos az x tengellyel, vagy egybeesik vele, akkor irányszöge 0°.
- Ha egy egyenes egyenlete felírható $y = mx + b$ alakban is, akkor az egyenes ***m* meredeksége** az egyenes α irányszögének a tangensével egyenlő: $m = \operatorname{tg} \alpha$.
- Az $m = \operatorname{tg} \alpha$ összefüggés miatt az m számot az egyenes **iránytangensének**, olykor *iránytényezőjének* is nevezik.

Megjegyzések

– A pozitív meredekségű egyenesek irányszöge hegyesszög, a negatív meredekségű egyenesek irányszöge tompaszög, a nulla meredekségű egyenes irányszöge 0°, az egyenes tehát párhuzamos az x tengellyel.
– Az y tengellyel párhuzamos egyenesek irányszöge a derékszög, de ezeknek az egyeneseknek nincs meredekségük, mert nincs $y = mx + b$ alakú egyenletük.

FELADAT

1. Töltsd ki a táblázat üres helyeit! A füzetedben dolgozz!

Az adott egyenlet	$3x - 5y = 8$	$4x = y + 2$	$x + 3y + 12 = 0$
Az egyenlet felírva $y = mx + b$ alakban			
A meredekség, azaz iránytangens			
Az egyenes irányszöge			
Az egyenes és az y tengely metszéspontja			

2. Egy egyenes egyenlete $y = \frac{4}{5}x + 1$. Add meg egy normálvektorát!

3. Egy egyenes iránytangense $-\frac{4}{7}$. Add meg egy normálvektorát!

4. Az e egyenes átmegy az origón, és merőleges az $y = -\frac{5}{6}x + 8$ egyenesre.

a) Mennyi az e iránytangense és irányszöge?

b) Írd fel az e egyenletét!

5. Egy f egyenes átmegy az $E(6; 0)$ ponton, és az iránytangense $\frac{2}{3}$.

a) Add meg az f egyenes egy normálvektorát!

b) Írd fel az f egyenes egyenletét!

c) Milyen távol van az f egyenes az origótól?

HÁZI FELADAT

1. Add meg a következő egyenletekkel megadott egyenesek iránytangensét!

a) $x + 2y = 0$; **c)** $5x - 6y = 9$; **e)** $x + 3y = 12$;

b) $3x + 6y = 5$; **d)** $5x - 2y = 1$; **f)** $4x - 2y = 7$.

2. Az e egyenes egyenlete $6x + y = 2$. Az f és a g egyenes átmegy a $P(0; 4)$ ponton, az f párhuzamos e-vel, a g pedig merőleges az e-re. Írd fel az f és a g egyenletét!

3. A k egyenes átmegy a $K(8; 0)$ ponton, és az iránytangense 0,75. Mekkora távolságra van k az origótól?

EMELT SZINT

Bizonyítsuk be, hogy minden elsőfokú függvény grafikonja egyenes!

Megoldás:

Elsőfokú függvénynek nevezzük azt a függvényt, melynek értelmezési tartománya a valós számok halmaza, és hozzárendelési szabálya $x \mapsto mx + b$ alakú, ahol $m \neq 0$.

Az $x \mapsto mx + b$ függvény grafikonjának egyenlete: $y = mx + b$, amelyet átrendezve az $mx - y = -b$ egyenlethez jutunk. Ez pedig egy egyenes egyenlete, mégpedig egy $(m; -1)$ normálvektorú, $P(0; b)$ ponton átmenő egyenesé.

81 Egyenesek metszéspontja

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Adott két egyenes. Az e egyenes egyenlete $5x + 4y = 7$, az f egyenesé pedig $4x - y = 14$. Van-e az $A(-1;\ 3)$, $B(3;\ -2)$ és $C(4;\ 2)$ pontok között olyan, amelyik mindkét egyenesen rajta van?

Megoldás

Az A pont koordinátáit az egyenesek egyenletébe behelyettesítve rendre a következő kijelentéseket kapjuk: $-5 + 12 = 7$, $-4 - 3 = 14$. Az első kijelentés igaz, a második hamis. Ez azt jelenti, hogy az A pont csak az e egyenesen van rajta, az f-en nincs.

A B pont koordinátáit behelyettesítve: $15 - 8 = 7$, $12 + 2 = 14$. Mindkét kijelentés igaz, tehát a B pont mindkét egyenesnek pontja.

A C pont koordinátáit behelyettesítve: $20 + 8 = 7$, $16 - 2 = 14$. A második kijelentés igaz, az első hamis, tehát a C pont csak az f egyenesen van rajta, az e-n nincs.

Mivel két különböző egyenesről van szó, ezért a két egyenes metszi egymást, a metszéspontjuk a $B(3;\ -2)$ pont.

2. Adjuk meg az e és az f egyenes közös pontját, ha az e egyenlete $3x + y = -1$, az f egyenes egyenlete pedig $2x - 3y = -19$!

Megoldás

Olyan számpárt keresünk, amely mindkét egyenletnek megoldása, tehát megoldása a két egyenes egyenletéből alkotott kétismeretlenes egyenletrendszernek is.

Az egyenletrendszer a következő: $\left.\begin{aligned} 3x + y &= -1 \\ 2x - 3y &= -19 \end{aligned}\right\}$.

A tanult megoldási módszerek közül választhatjuk a *behelyettesítő módszert* is.

Az első egyenletből $y = -3x - 1$, ezt a második egyenletbe behelyettesítve a $2x - 3(-3x - 1) = -19$ *egyismeretlenes egyenletet* kapjuk.

Rendezve: $11x = -22$. Ebből $x = -2$, amit az $y = -3x - 1$ egyenletbe behelyettesítve $y = 5$-t kapunk.

Tehát egyetlen (rendezett) számpár van, amely mindkét egyenletnek megoldása: a $(-2;\ 5)$ számpár.

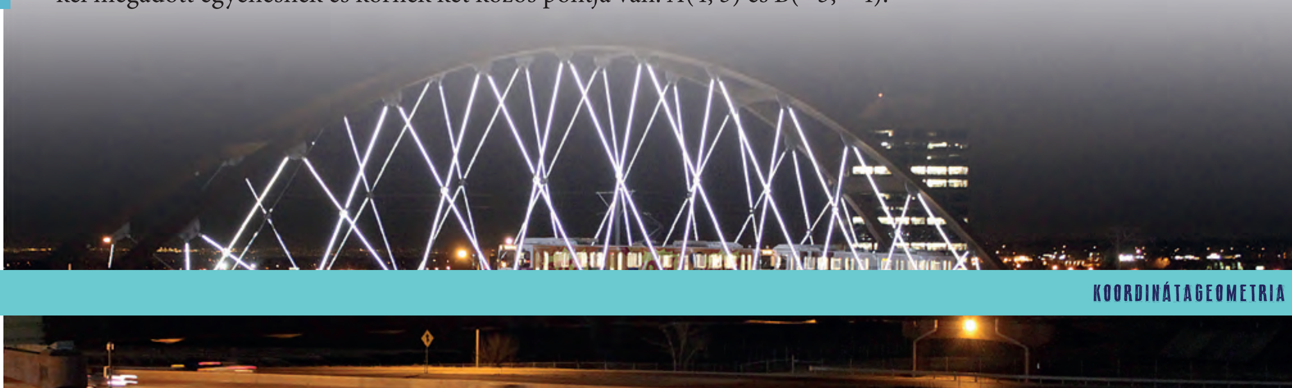
Ez azt jelenti, hogy a két egyenes metszi egymást a $P(-2;\ 5)$ pontban.

ELMÉLET

Ha ismerjük két ponthalmaz egyenletét, akkor a két egyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszer megoldásai éppen a két ponthalmaz közös pontjait adják meg.

Például

- az $\left.\begin{aligned} 5x + 3y &= 4 \\ 15x + 9y &= 7 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer megoldáshalmaza az üres halmaz, ami azt mutatja, hogy az egyenleteknek megfelelő két egyenesnek nincs közös pontja;
- az $\left.\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x^2 + y^2 &= 25 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer megoldáshalmaza az $M = \{(4;\ 3);\ (-3;\ -4)\}$, ami azt mutatja, hogy az egyenletekkel megadott egyenesnek és körnek két közös pontja van: $A(4;\ 3)$ és $B(-3;\ -4)$.



FELADAT

1. Van-e a következő két egyenesnek közös pontja? Ha van, melyik pont az?

a) $3x - 7y = -7$ és $6x - 7y = -28$;

b) $3x - y = 16$ és $2x + 5y = 5$;

c) $6x - 10y = 3$ és $-3x + 5y = 2$;

d) $x - y = 4$ és $5x - 5y = 20$.

2. Add meg az egyenes és a kör közös pontjait!

a) $x - 2y = -5$ és $x^2 + y^2 = 10$;

b) $x + y = 0$ és $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 17$.

HÁZI FELADAT

1. Melyik pontban metszi a $4x - 5y = 13$ egyenletű egyenes a következő egyeneseket?

a) $x + 2y = 0$; **b)** $x + 3y = 2$; **c)** $x + 4y = 4$.

2. Hány közös pontja van az origó középpontú, 10 egység sugarú körnek és a $4x - 3y = -48$ egyenletű egyenesnek?

3. Az e egyenes egyenlete $\sqrt{6}\,x - \sqrt{2}\,y = 2$, az f egyenes egyenlete $\sqrt{6}\,x + \sqrt{2}\,y = 1$, a g egyenes egyenlete $\sqrt{6}\,x - \sqrt{2}\,y = \sqrt{2}$, a h egyenes egyenlete $\sqrt{3}\,x - y = \sqrt{2}$. Milyen ezeknek az egyeneseknek a kölcsönös helyzete?

RÁADÁS

A közös pontok meghatározására megismert módszer (egyenletrendszer megoldása) teljessé teszi az eszköztárunkat: egyenletekkel tudunk kört, illetve egyenest „rajzolni”, és van algebrai módszerünk a „rajzolt” egyszerű alakzatok közös pontjainak meghatározására is.

Távolságot és szögeket a koordináta-rendszer segítségével megadott algebrai adatokból már korábban megtanultunk kiszámítani, ezért mondhatjuk, hogy a síkgeometria minden eddig megismert feladatát, amely csak körző és vonalzó használatát igényli, meg tudjuk oldani csupán algebrai eszközök használatával.

A geometria tehát „művelhető” úgy is, hogy egyetlen pontot sem rajzolunk, egyetlen vonalat sem húzunk meg, csupán számpárokkal, egyenletekkel, egyenletrendszerekkel dolgozunk.

A geometriának ezt a fajta tárgyalását *koordinátageometriának* vagy *analitikus geometriának* nevezik. A koordinátageometria megteremtőjének *René Descartes* (ejtsd: röné dékárt) XVII. századi francia matematikust tartják (egyes nyelveken még az elnevezése is a Descartes latin változatából eredő „*Cartesian*” geometria).

Descartes 1637-ben jelentette meg *Értekezés a módszerről* című filozófiai munkáját, melynek legfontosabb elemei a következők:

– előítéletektől mentesen csak a tisztán, világosan felfogható dolgokat kell igaznak elfogadni;
– a problémákat a lehető legtöbb részre kell szétbontani;
– az egyszerűbb tárgytól fokozatosan kell a bonyolultabb felé haladni;
– törekedni kell a probléma teljes körű tárgyalására.

Műve függelékében Descartes három gyakorlati példán mutatja be filozófiáját, ezek egyike, a *La Géométrie* szól a geometria újszerű, algebrai alapokon történő tárgyalásáról.

Habár a mű eredeti formájában hűvös fogadtatásra talált, a későbbi kiegészítésekkel és kommentárokkal ellátva utat nyitott a matematikai analízis felé, amely ma a fizika és a mérnöki tudományok alapja.

82 Alapszerkesztések egyenletekkel

BEVEZETŐ

A geometriai szerkesztési feladatok megoldásában igen nagy szerepe van a merőleges egyenes és a párhuzamos egyenes szerkesztésének. A síkgeometriai szerkesztések során gyakran ezeket a lépéseket alkalmazzuk:

– az egyenesre egy adott pontjában merőlegest állítunk;
– az egyenesre egy rajta kívüli pontból merőlegest állítunk;
– szakaszfelező merőlegest szerkesztünk;
– az egyenessel párhuzamos egyenest szerkesztünk egy rajta kívüli ponton keresztül.

Mindezeket a feladatokat a megismert koordinátageometriai eszköztárunk segítségével is meg tudjuk oldani.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Az e egyenes egyenlete: $3x + 4y = 16$.

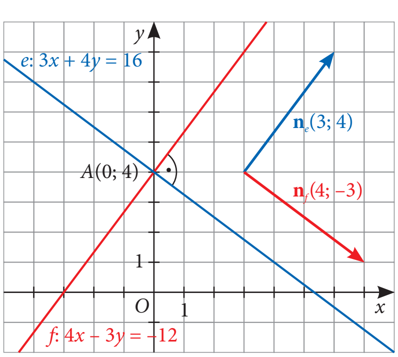
a) Az e egyenes egy tetszőleges pontjában állítsunk merőlegest az e-re!

b) A $P(3;\ 5)$ ponton keresztül állítsunk merőlegest az e-re!

c) A $P(3;\ 5)$ ponton keresztül húzzunk párhuzamost az e-vel!

Megoldás

a) Vegyük fel az $A(0;\ 4)$ pontot az e egyenesen! Az A-n átmenő merőleges egyenes neve legyen f! Az e egyenes $\mathbf{n}_e(3;\ 4)$ normálvektora merőleges az e-re, ezért párhuzamos az f egyenessel, tehát az f egyenes irányvektora: $\mathbf{v}_f = \mathbf{n}_e(3;\ 4)$.



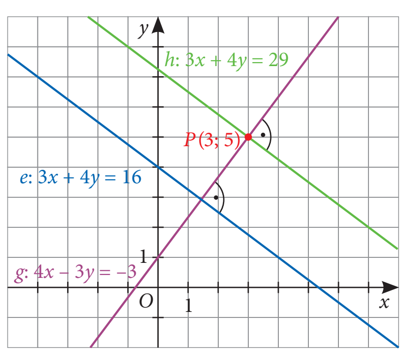
Ha ezt a vektort elforgatjuk 90°-kal, akkor megkapjuk az f egyenes egy normálvektorát: $\mathbf{n}_f(4;\ -3)$.

Az $A(0;\ 4)$ ponton átmenő, $\mathbf{n}_f(4;\ -3)$ normálvektorú f egyenes egyenlete: $4x - 3y = 4 \cdot 0 - 3 \cdot 4$, azaz $4x - 3y = -12$.

Ezzel tehát „megszerkesztettünk” egy e egyenesre merőleges egyenest.

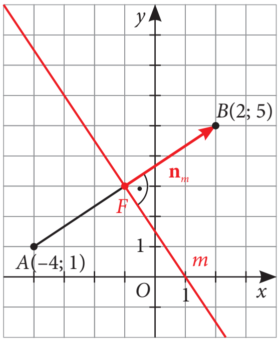
b) A P ponton átmenő, e-re merőleges g egyenes párhuzamos az a)-beli f egyenessel. Emiatt az f egyenes mindegyik normálvektora egyben a g egyenesnek is normálvektora. $\mathbf{n}_g = \mathbf{n}_f = (4;\ -3)$.

A g egyenes egyenlete: $4x - 3y = 4 \cdot 3 - 3 \cdot 5$, azaz $4x - 3y = -3$.



c) A P ponton átmenő, e-vel párhuzamos h egyenes normálvektorai megegyeznek az e egyenes normálvektoraival: $\mathbf{n}_h = \mathbf{n}_e = (3;\ 4)$. A h egyenes egyenlete tehát: $3x + 4y = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 5$, azaz $3x + 4y = 29$.

2. Adott az $A(-4;\ 1)$ és a $B(2;\ 5)$ pont. Adjuk meg az AB szakasz felezőmerőlegesének egyenletét!



Megoldás

Az m felezőmerőleges egyik pontja az AB szakasz F felezőpontja, egyik normálvektora pedig lehet az $\overrightarrow{FB}$ (vagy $\overrightarrow{FA}$, vagy az $\overrightarrow{AB}$ is).

Mivel $F\left(\frac{-4+2}{2};\ \frac{1+5}{2}\right) = F(-1;\ 3)$, és $\mathbf{n}_m = \overrightarrow{FB} = (2;\ 5) - (-1;\ 3) = (3;\ 2)$, ezért az m egyenes egyenlete: $3x + 2y = 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 3$, azaz $3x + 2y = 3$.

FELADAT

1. Az $ABCD$ paralelogramma két szomszédos csúcsa $A(-2;\ -1)$ és $B(6;\ 1)$, a középpontja pedig $K(1{,}5;\ 2)$.

a) Készíts rajzot!

b) Igazold, hogy a C csúcs mindkét koordinátája 5!

c) Igazold, hogy a BC egyenes merőleges az AB egyenesre, vagyis ez a paralelogramma téglalap!

d) Írd fel az oldalegyenesek egyenletét! Ahhoz, hogy az egyenesek egyenletét felírhasd, add meg mindegyik oldalegyenes egy pontját és egy normálvektorát! Oldd meg a feladatot a táblázat segítségével! A füzetedben dolgozz!

	AB egyenes	*AC* egyenes	*BC* egyenes	*CD* egyenes
Egy ismert pont				
Egy irányvektor				
Egy normálvektor				
Az egyenes egyenlete				
Az egyenlet legegyszerűbb alakja				

2. Egy háromszög csúcsai $A(7;\ 6)$, $B(-2;\ 3)$ és $C(6;\ -1)$.

a) Írd fel az A csúcsból a BC oldalra bocsátott merőleges, azaz az A-hoz tartozó magasság egyenesének egyenletét!

b) Számold ki ennek a magasságnak a talppontját: a BC oldalegyenessel való metszéspontját!

HÁZI FELADAT

1. A k egyenes egyenlete $5x + y = 12$. Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az $A(2;\ 7)$ ponton, és

a) párhuzamos a k-val; **b)** merőleges a k-ra!

2. Az A pont az y tengely 6 jelzésű pontjában, a B pont pedig az x tengely 4 jelzésű pontjában van. Hol metszi az AB szakasz felezőmerőlegese

a) az x tengelyt; **b)** az y tengelyt?

3. Egy paralelogramma két oldalegyenesének egyenlete: $x + 4y = 0$ és $3x - 2y = 0$. A paralelogramma egyik csúcsa a $P(8;\ 5)$ pont.

a) Írd fel a P-n átmenő oldalegyenesek egyenletét!

b) Mely pontok a paralelogramma csúcsai?

c) Mekkorák a paralelogramma szögei?

83 Merőleges és párhuzamos egyenesek

KIDOLGOZOTT FELADAT

Az e egyenes egyenlete $-3x+5y=12$. Az f egyenes egyenlete $10x+6y=7$, a g egyenes egyenlete pedig $12x-20y=13$. Mutassuk meg, hogy az f egyenes merőleges az e egyenesre, a g egyenes pedig párhuzamos az e-vel!

Megoldás

Az egyenesek egyenletéből rendre a következő normálvektorokat olvashatjuk ki: $\mathbf{n}_e(-3;\ 5)$, $\mathbf{n}_f(10;\ 6)$ és $\mathbf{n}_g(12;\ -20)$.

$\mathbf{n}_e\mathbf{n}_f=-3\cdot 10+5\cdot 6=0$, tehát a két normálvektor merőleges egymásra. Emiatt a rájuk merőleges két egyenes is merőleges egymásra, tehát valóban igaz, hogy $f\perp e$.

$\mathbf{n}_g=(12;-20)=-4\cdot(-3;5)=-4\cdot\mathbf{n}_e$, tehát a g egyenes normálvektora egyállású az e normálvektorával. Emiatt a rájuk merőleges egyenesek is egyállásúak, azaz párhuzamosak.

Ezzel mindkét állítást beláttuk.

Megjegyzés

Az e és g párhuzamosságának igazolásához felhasználhattuk volna azt is, hogy az f egyenes nemcsak az e-re merőleges, hanem a g-re is [hiszen: $\mathbf{n}_g\mathbf{n}_f=12\cdot 10+(-20)\cdot 6=120-120=0$].

ELMÉLET

- Két egyenes pontosan akkor merőleges egymásra, ha a normálvektoraik skaláris szorzata 0.
  Például a $8x+3y=7$ egyenes merőleges az $1{,}5x-4y=3$ egyenesre, mert $(8;3)\cdot(1{,}5;-4)=12-12=0$.
- Két egyenes pontosan akkor párhuzamos egymással, ha a normálvektoraik egyállásúak.
  Például a $8x+3y=7$ egyenes párhuzamos a $12x+4{,}5y=0$ egyenessel, mert $(12;4{,}5)=1{,}5\cdot(8;3)$.

FELADAT

1. Az e egyenes egyenlete $-4x+20y=12$. Válaszd ki az alábbi egyenletek közül azokat, amelyekhez tartozó egyenesek

a) párhuzamosak az e-vel; **b)** merőlegesek az e-re!

$-x+5y=2$; $\quad -40x+8y=20$;

$2x-10y=-6$; $\quad -40x-8y=20$.

$10x+2y=-5$;

2. Hány egyenest határoz meg az 1. feladatban megadott 6 egyenlet?

3. Az e egyenes egyenlete $6x-15y=2$. Határozd meg a p számot úgy, hogy a $9x+py=5$ egyenletű egyenes

a) merőleges legyen az e-re;

b) párhuzamos legyen az e-vel!

4. Add meg a $P(5;\ 2)$ ponton átmenő egyenest, amely

a) párhuzamos az $y=-3$ egyenletű egyenessel;

b) merőleges az $x=7$ egyenletű egyenesre!

5. Megadunk négy egyenest az egyenletével:

$5x-2y=13$; $\quad 3x-5y=23$;

$2{,}5x+1{,}5y=-3{,}5$; $\quad -x-2{,}5y=9$.

a) Mutasd meg, hogy a négy egyenes egy ponton megy át!

b) Vannak-e merőlegesek a megadott egyenesek között? Ha igen, akkor melyek azok?

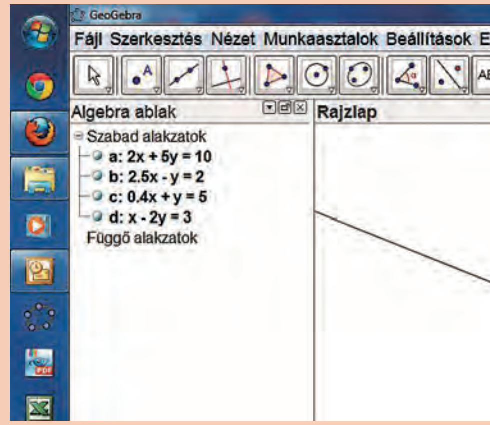
HÁZI FELADAT

1. A következő egyenletekkel egyeneseket adunk meg:
e: $2x + 5y = -1$; f: $4x - 3y = 12$; g: $6x + 8y = 5$;
h: $x - 0{,}4y = 0{,}6$; i: $\dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{4} = 1$; j: $0{,}8x = 1 - 2y$.

a) Hány egyenest adtunk meg?
b) Válaszd ki közülük a merőleges egyeneseket!
c) Válaszd ki közülük a párhuzamos egyeneseket!

2. Dönci megrajzolta az $ABCD$ négyszöget egy koordináta-rendszerben, ahol $A(-4; -2)$, $B(4; 2)$, $C(8; 10)$ és $D(0; 6)$. Szerinte ez a négyszög rombusz. Vizsgáld meg, hogy
a) párhuzamosak-e a négyszög szemközti oldalai;
b) merőlegesek-e az átlói!

3. A *GeoGebra* programnak az ábrán látható egyenletekkel adtuk meg egy négyszög oldalait. Milyen négyszöget rajzolt a program?



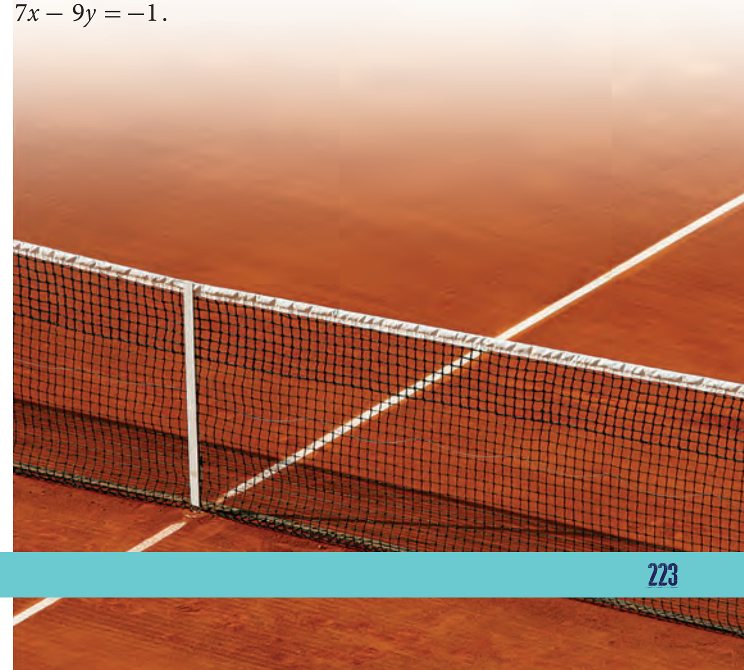
RÁADÁS

Az egyenletek ismeretében könnyen eldönthetjük, hogy két egyenes párhuzamos vagy merőleges-e.

– Ha egy e egyenes párhuzamos az $ax + by = c$ (a, b, c valós számok, illetve a és b egyszerre nem egyenlő 0-val) egyenletű f egyenessel, akkor az e egyenlete felírható $ax + by = d$ ($d \in \mathbf{R}$, $d \neq c$) alakban. Miért? Mert az $\mathbf{n}_f(a; b)$ nemcsak az f-nek, hanem az e-nek is normálvektora. A $d \neq c$ kikötésre pedig azért van szükség, hogy a két egyenes ne ugyanaz legyen.
Például
az $5x - 7y = 9$ egyenes biztosan párhuzamos az $5x - 7y = -32$ egyenessel.

– Ha egy e egyenes merőleges az $ax + by = c$ (a, b, c valós számok, illetve a és b egyszerre nem egyenlő 0-val) egyenletű f egyenesre, akkor az e egyenlete felírható $bx - ay = d$ ($d \in \mathbf{R}$) alakban. Miért? Mert az e normálvektorának választhatjuk az $\mathbf{n}_f(a; b)$ egyik 90°-os elforgatottját, a $(b; -a)$-t.
Például
az $5x + 7y = 9$ egyenes biztosan merőleges a $7x - 5y = -32$ egyenesre.

A fenti összefüggéseket nemcsak a párhuzamosság és a merőlegesség *felismerésére* használhatjuk, de igazán egyszerű módszert adnak arra is, hogy egy adott egyenessel párhuzamos, illetve rá merőleges egyenes egyenletét felírjuk.
Például
ha az a feladat, hogy adjuk meg a $P(5; 4)$ ponton átmenő, $9x + 7y = 33$ egyenessel párhuzamos, illetve rá merőleges egyenes egyenletét, akkor igen egyszerű feladatunk van. A párhuzamos egyenes egyenlete: $9x + 7y = 9 \cdot 5 + 7 \cdot 4$, azaz $9x + 7y = 73$. A merőleges egyenes egyenlete: $7x - 9y = 7 \cdot 5 - 9 \cdot 4$, azaz $7x - 9y = -1$.



84 A háromszög nevezetes vonalai

BEVEZETŐ

9. és 10. osztályban sokat foglalkoztunk háromszögek nevezetes egyeneseivel: oldalfelező merőlegesekkel, szögfelezőkkel, magasságvonalakkal, középvonalakkal, súlyvonalakkal. Ismerjük a háromszög köré és a bele írható kört is. Tudjuk, hogyan szerkeszthetjük meg ezeket a nevezetes vonalakat körzővel és vonalzóval, és ismerjük a tulajdonságaikat is.

A következőkben koordinátákkal, egyenletekkel, számolással, vagyis a megismert koordinátageometriai eszközökkel közeledünk ezekhez a problémákhoz.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Az ABC háromszög csúcsai: $A(-3;\ 5)$, $B(0;\ -4)$, $C(5;\ 1)$.

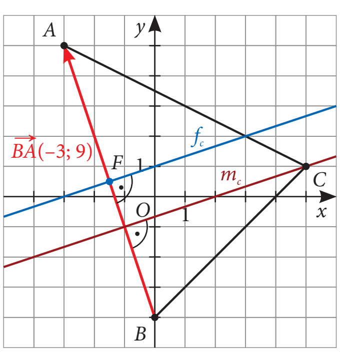
a) Írjuk fel az AB oldal felezőmerőlegesének egyenletét!

b) Írjuk fel az AB oldalhoz tartozó magasságvonal egyenletét!

c) Írjuk fel az AB oldalhoz tartozó súlyvonal egyenletét!

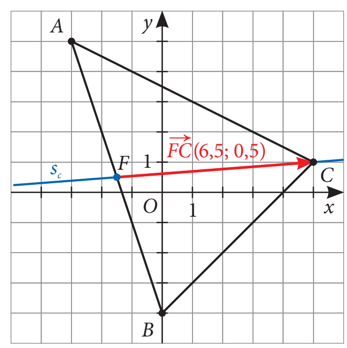
Megoldás

a) Az AB oldal felezőpontja: $F(-1{,}5;\ 0{,}5)$, a felezőmerőleges egy normálvektora a $\overrightarrow{BA}(-3;\ 9)$. Az f_c felezőmerőleges egyenlete:
$-3x + 9y = 9$, azaz $-x + 3y = 3$.



b) Az AB-re merőleges m_c magasságvonal párhuzamos az f_c-vel, és átmegy a háromszög C csúcsán, tehát az egyenlete: $-x + 3y = -1 \cdot 5 + 3 \cdot 1$, vagy másképpen: $-x + 3y = -2$.

c) Az AB oldalhoz tartozó s_c súlyvonal a C csúcson és az F ponton megy át. A súlyvonal egy irányvektora az $\overrightarrow{FC}(6{,}5;\ 0{,}5)$, helyette célszerű a kétszeresét vennünk: $(13;\ 1)$. Ennek 90°-os elforgatottja a súlyvonal normálvektora: $(1;\ -13)$.



A súlyvonal egyenletét a C csúccsal felírva:
$x - 13y = 5 - 13$, azaz $x - 13y = -8$.

FELADAT

1. Folytasd a példát!

a) Melyik pont az ABC háromszög súlypontja?

b) Add meg az A csúcson átmenő magasságvonal egyenletét!

c) Keresd meg az A-ból és a C-ből induló magasságvonal metszéspontját!

d) Ellenőrizd, hogy a c) feladatban kapott M metszéspont rajta van-e a B-ből induló magasságvonalon! (Ehhez elég belátnod, hogy a $\overrightarrow{BM}$ merőleges az $\overrightarrow{AC}$ vektorra.)

e) Írd fel az AB és az AC szakasz felezőmerőlegesének egyenletét, és keresd meg e két egyenes K metszéspontját!

f) Milyen tulajdonságai vannak az e) feladatban kapott pontnak?

g) Írd fel az ABC háromszög köré írható kör egyenletét!

2. Egy háromszög A csúcsán átmenő magasságvonalának egyenlete $x + y = 5$. Az A csúcson átmenő súlyvonal egyenlete $9x + 5y = 21$. A B csúcs koordinátái $B(-2; -2)$. Határozd meg a háromszög csúcsait az alábbi lépések segítségével (először készíts vázlatot)!

a) Add meg az A csúcs koordinátáit!

b) Írd fel a háromszög BC oldalának egyenletét!

c) Add meg a BC oldal F felezőpontjának koordinátáit!

d) Add meg a C csúcs koordinátáit!

HÁZI FELADAT

1. Az órai feladat megoldása során megkerested az ABC háromszög súlypontját (S), magasságpontját (M) és a köré írható kör középpontját (K).

a) Mik az $\overrightarrow{MS}$ koordinátái, és mik az $\overrightarrow{SK}$ koordinátái?

b) Milyen kapcsolat van az $\overrightarrow{MS}$ és az $\overrightarrow{SK}$ között?

c) Írd fel az MK egyenes egyenletét! Ellenőrizd behelyettesítéssel, hogy rajta van az S pont!

2. Egy háromszög csúcsai:
$A(-4; -5)$, $B(11; 0)$, $C(-4; 9)$.

a) Rajzold be egy koordináta-rendszerbe az ABC háromszöget!

b) Melyik pont az ABC háromszög súlypontja?

c) Melyik pont az ABC háromszög magasságpontja?

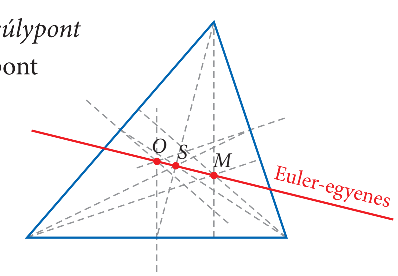
d) Melyik pont az ABC háromszög köré írható kör középpontja?

e) Írd fel az ABC háromszög köré írható kör egyenletét!

f) Igaz-e, hogy a háromszög három nevezetes pontja (magasságpont, súlypont és a köré írható kör középpontja) egy egyenesre illeszkedik?

RÁADÁS

Minden háromszögre igaz: *a körülírt kör O középpontja, az M magasságpont és az S súlypont egy egyenesre esik.* Ezt az egyenest a háromszög **Euler-egyenesének** nevezzük. A súlypont a másik két pont között helyezkedik el, kétszer akkora távolságra M-től, mint O-tól. [*Leonhard Euler* (1707–1783) svájci születésű tudós volt. Nevét így ejtjük: ajler.]
Az 1. és a 2. házi feladatban egy konkrét háromszög esetében igazolhatjuk ezt az összefüggést.



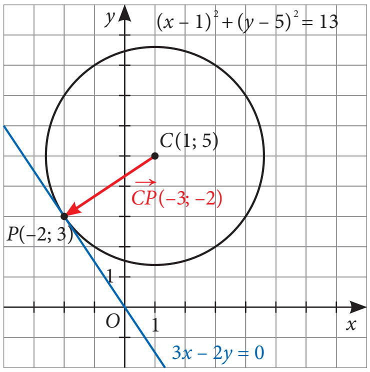
85 A kör érintője

KIDOLGOZOTT FELADAT

Adott az $(x-1)^2+(y-5)^2=13$ egyenletű kör.

a) Mutassuk meg, hogy a $P(-2;\ 3)$ pont rajta van a körön!

b) Írjuk fel a P pontban húzható érintő egyenletét!



Megoldás

a) A P koordinátáit behelyettesítve kapjuk:
$(-2-1)^2+(3-5)^2=13$, $(-3)^2+(-2)^2=13$, vagyis $13=13$. Ez igaz, tehát a P valóban rajta van a körön.

b) Az érintő egyenletének felírásához felhasználjuk azt, hogy az érintési pontba vezető sugár merőleges az érintőre. Tehát a kör $C(1;\ 5)$ középpontjából a P pontba mutató $\overrightarrow{CP}\,(-3;\ -2)$ vektor éppen az érintő egyik normálvektora. Egyszerűbb egyenletet kapunk, ha a $\overrightarrow{CP}$ helyett az ellentettjét, a $(3;\ 2)$ vektort választjuk normálvektornak. Ezzel az érintő egyenlete: $3x+2y=3\cdot(-2)+2\cdot 3$, vagyis $3x+2y=0$.

FELADAT

1. Írd fel az $(x+6)^2+(y+4)^2=20$ egyenletű körhöz a kör $(-8;\ 0)$ pontjában húzható érintő egyenletét!

2. Egy x-y koordináta-rendszerben az FGH háromszög beírt körének egyenlete:
$x^2+y^2-6x-10y+9=0$.
A háromszög oldalai ezt a kört a $P(3;\ 0)$, a $Q(6;\ 9)$, illetve az $R(-2;\ 5)$ pontokban érintik.

a) Határozd meg a kör középpontját és sugarát!

b) Rajzold meg a kört, jelöld meg az érintési pontokat, vázold fel a háromszöget!

c) Írd fel a háromszög oldalegyeneseinek egyenletét!

d) Számítsd ki a csúcspontok koordinátáit!

e) Mekkorák a háromszög oldalai?

f) Mekkorák a háromszög szögei?

g) Írd fel két szögfelező egyenletét! (A beírt kör középpontja illeszkedik a szögfelezőre!)

3. Az űrbeli koordináta-rendszerünk $N(6;\ -2)$ pontjában található csillag körül egy bolygó kering a koordináta-rendszer síkjában, egy kör alakúnak tekinthető pályán, a csillagtól 2,5 egység távolságban.

a) Írd fel a körpálya egyenletét!

b) Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely mentén a bolygó akkor mozogna, ha a pálya $P(4;\ -0{,}5)$ pontjában hirtelen megszűnne a bolygót körpályán tartó gravitációs erő (ekkor a P-ben a körhöz húzható érintőn haladna tovább a bolygó)!

HÁZI FELADAT

1. Írd fel annak a körnek az egyenletét, amelynek a középpontja a $K(2;\ -3)$ pont, és amely érinti

a) az x tengelyt; **b)** az y tengelyt!

2. Az $x^2 + y^2 + 4x + 8y - 5 = 0$ egyenletű kör az x tengelyt a $P(-5; 0)$ és a $Q(1; 0)$ pontban metszi.

a) Melyik pont ennek a körnek a középpontja?

b) Írd fel a kör P-beli és Q-beli érintőjének az egyenletét!

c) Hol metszi egymást ez a két érintő?

d) Mekkora a két érintő szöge?

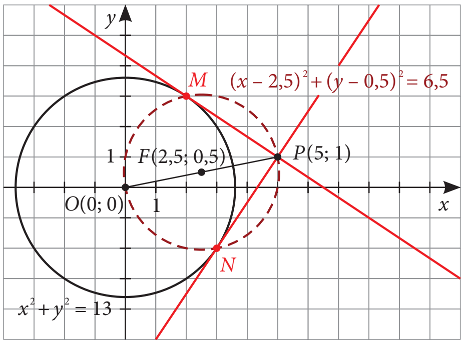
3. Az $ABCD$ négyzet minden oldala érinti az $x^2 + y^2 - 8x - 14y + 40 = 0$ egyenletű kört. Az AB oldal érintési pontja a $P(1; 11)$ pont.

a) Keresd meg a másik három érintési pontot!

b) Írd fel a négyzet oldalegyeneseinek egyenletét!

EMELT SZINT

Hogyan írhatjuk fel egy körhöz egy külső pontból húzott érintőinek egyenletét?
Írjuk fel a $P(5;\ 1)$ pontból az $x^2 + y^2 = 13$ egyenletű körhöz húzható érintők egyenletét, és mutassuk meg, hogy ezek merőlegesek egymásra!



Az érintési pontban húzott sugár merőleges az érintőre. Ezért az érintési pontok rajta vannak a PO szakasz Thalész-körén. Ennek a Thalész-körnek a segítségével lehet síkgeometriai úton megszerkeszteni az érintési pontokat, majd az érintőket. Ezt a gondolatmenetet követjük a koordinátageometria eszközeivel.
Az OP szakasz felezőpontja $F(2{,}5;\ 0{,}5)$, ezért az OP átmérőjű Thalész-kör sugarának négyzete: $r^2 = OF^2 = 2{,}5^2 + 0{,}5^2 = 6{,}5$. A Thalész-kör egyenlete: $(x - 2{,}5)^2 + (y - 0{,}5)^2 = 6{,}5$, vagy másképpen: $x^2 + y^2 - 5x - y = 0$.
A P-ből húzható érintők érintési pontját az origó középpontú $x^2 + y^2 = 13$ egyenletű kör és a Thalész-kör közös pontjai adják.

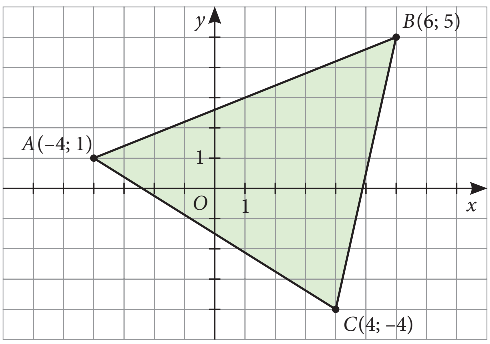
Meg kell tehát oldanunk az $\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 13 \\ x^2 + y^2 - 5x - y &= 0 \end{aligned}\right\}$ másodfokú egyenletrendszert.

A második egyenletben az $x^2 + y^2$ helyébe 13-at helyettesítve kapjuk, hogy $13 - 5x - y = 0$. Ebből az y-t kifejezve: $y = 13 - 5x$.
Ezt az első egyenletbe behelyettesítve az $x^2 + (13 - 5x)^2 = 13$ egyismeretlenes egyenlethez jutunk. Ennek a megoldásai adják az érintési pontok első koordinátáit.
Az egyenletet 0-ra rendezzük, majd mindkét oldalt elosztjuk 26-tal:
$26x^2 - 130x + 156 = 0,$
$x^2 - 5x + 6 = 0.$
Ennek az egyenletnek két megoldása van, a 2 és a 3. Tehát az egyik érintési pont első koordinátája 2, a másiké 3.
Ha az érintési pont első koordinátája 2, akkor a második koordinátája $13 - 5 \cdot 2 = 3$, ha az első koordináta 3, akkor a második $13 - 5 \cdot 3 = -2$.
Tehát a két érintő az $M(2;\ 3)$, illetve $N(3;\ -2)$ pontban érinti az adott kört.
Az $\overrightarrow{OM}(2; 3)$ a PM érintő normálvektora, az $\overrightarrow{ON}(3; -2)$ pedig a PN érintőé.
A PM érintő egyenlete: $2x + 3y = 13$, a PN érintő egyenlete: $3x - 2y = 13$.
Mivel $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 0$, ezért a két érintő valóban merőleges egymásra.

86 A háromszög területe

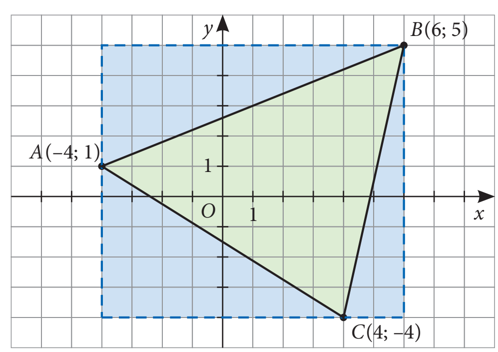
BEVEZETŐ

Egy 11.-es matematikaórán egy háromszög területének meghatározása a feladat. Kövesd a diákok gondolatmenetét!
Feladat: Az ABC háromszög csúcsai $A(-4;\ 1)$, $B(6;\ 5)$ és $C(4;\ -4)$. Mekkora a területe?



– Kiszámítjuk az egyik oldal hosszát és a hozzá tartozó magasságot – mondja mindjárt Panni –, és alkalmazzuk a $T = \frac{a \cdot m}{2}$ képletet!

– Jó, jó! – aggályoskodik Bence –, de a magasság kiszámítása nagyon hosszadalmas dolog! Jobbat mondok: a három oldal hosszát könnyű kiszámítani, aztán koszinusztétellel vagy skaláris szorzással megkapjuk az egyik szöget, és a $T = \frac{ab \sin \gamma}{2}$ képletet használjuk!
Jocó ötlete következik:
– Ha ismerjük a három oldal hosszát, a-t, b-t és c-t, akkor a Hérón-képletet fogom használni. Kiszámítom a kerület felét, ezt s-sel jelölöm, és a $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ képlettel megkapom a háromszög területét.
Bence és Jocó mindjárt elkezdi számolni, mekkorák a háromszög oldalai:
$AB = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116} \approx 10{,}77, \ldots$
– De csúnya számok! – állapítja meg Bence. – Ezekkel aztán ügyeskedhetsz, Jocó! Ha a Hérón-képletet akarod felírni, akkor elég hosszadalmas lesz a számolás!
Ekkor azonban Dönci akasztja meg a beszélgetést, és egy rajzot mutat:



– Nem kell ide semmiféle fakszni meg koszinusztétel, Hérón-képlet! Nézzétek meg: a téglalap területéből elhagyom a három derékszögű háromszög területét, és megmarad, amit keresünk! Egysornyi számolás az egész!
– Nagy vagy, Dönci! – mondja a legnagyobb dicséretét Bence. – És figyeljétek meg: így „pontos” lesz az eredmény!

FELADAT

1. Számítsd ki Dönci ötlete alapján a bevezető feladatban megadott ABC háromszög területét!

a) Mekkorák a téglalap oldalai, és mennyi a téglalap területe?

b) Mekkorák a jobb oldali derékszögű háromszög oldalai, és mennyi a területe?

c) Mekkorák a bal oldali felső derékszögű háromszög oldalai, és mennyi a területe?

d) Mekkorák a bal oldali alsó derékszögű háromszög oldalai, és mennyi a területe?

e) Mennyi az ABC háromszög területe?

f) Közelítő vagy pontos eredményt kaptál?

2. Számítsd ki Bence egyik gondolatmenete alapján a bevezető feladatban megadott ABC háromszög területét!

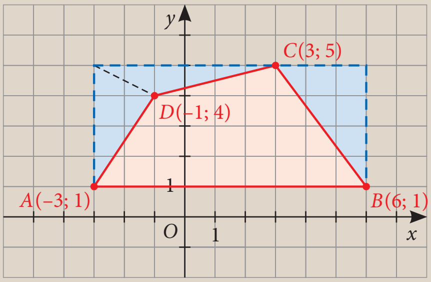
a) Mik a $\overrightarrow{BA}$ koordinátái? Mekkora az AB oldal?

b) Mik a $\overrightarrow{BC}$ koordinátái? Mekkora a BC oldal?

c) Írd fel kétféleképpen a $\overrightarrow{BA}$ és a $\overrightarrow{BC}$ skaláris szorzatát; számítsd ki az ABC szöget!

d) Mennyi az ABC háromszög területe?

3. Számítsd ki Dönci módszerével az ábrán megadott $ABCD$ négyszög területét!



a) Rajzolj olyan téglalapot, amely magába foglalja a négyszöget, és az oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel!

b) Mekkora a téglalap területe?

c) Mennyi az $ABCD$ négyszöghöz toldott rész területe?

d) Mennyi az $ABCD$ négyszög területe?

HÁZI FELADAT

1. Rajzolj egy koordináta-rendszert! Jelöld meg az $A(-4;\ -7)$, $B(8;\ -3)$, $C(-4;\ 3)$, $D(0;\ 3)$, $E(3;\ -7)$, $F(8;\ 3)$, $G(-4;\ -1)$ pontokat! Számítsd ki

a) az ABC háromszög;
b) az ABD háromszög;
c) az EFC háromszög;
d) az EFG háromszög

területét!

2. Az 1. házi feladat melyik részében volt a legegyszerűbb a $T = \frac{a \cdot m}{2}$ képlettel számolni a területet? Miért?

3. Használd az 1. házi feladat adatait! Mekkora az $AEBDG$ sokszög területe?

RÁADÁS

Dönci módszerével általánosan igaz kijelentésekhez juthatunk.

– Ha egy háromszög mindhárom csúcsának a koordinátái egész számok (úgynevezett *rácsháromszög*), akkor a háromszög területe vagy pozitív egész szám, vagy egy természetes számnál 0,5-del nagyobb szám.

– Mivel a konvex sokszögek mindegyike felosztható háromszögekre úgy is, hogy egy csúcsból meghúzzuk a sokszög átlóit, ezért az is igaz, hogy ha egy konvex sokszög *rácssokszög*, akkor a területe a rácsháromszögek területének összegével egyenlő. Ebből pedig az következik, hogy a rácssokszögek területe is vagy egy pozitív egész számmal egyenlő, vagy egy természetes számnál 0,5-del nagyobb. (Az állítás nem konvex rácssokszögekre is igaz.)

87 Alakzatok távolsága

KIDOLGOZOTT FELADAT

A $P(3;\ 9)$ pontba telepített, nagy teljesítményű jeladó hatótávolsága 7 km. Észlelhető-e az adó által sugárzott jel a $2x - 3y = 5$ egyenletű országúton? (A koordináta-rendszer tengelyein 1 egység 1 km-t jelent.)

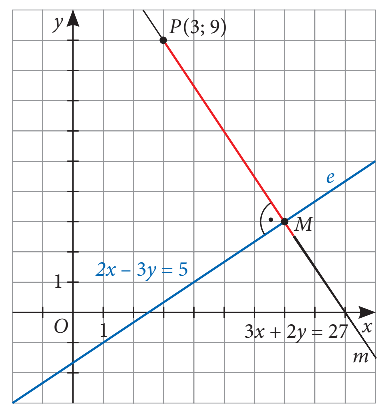
Megoldás

Azt kell megvizsgálnunk, hogy mekkora a P pont és a $2x - 3y = 5$ egyenletű e egyenes távolsága. Ezt a P-ből az e-re állított m merőlegesen olvashatjuk le.

Az m egyenlete: $3x + 2y = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 9$; $3x + 2y = 27$.

Az e és az m egyenes M metszéspontját a két egyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása adja meg. A $\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= 5 \\ 3x + 2y &= 27 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer megoldása a $(7;\ 3)$ rendezett számpár, tehát e és m metszéspontja az $M(7;\ 3)$ pont.

Mivel $PM = \sqrt{4^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} \approx 7{,}2$ km, ezért az országúton nem érzékelhető a jeladó által sugárzott adás.



Megjegyzés

Vizsgálhattuk volna a $P(3;\ 9)$ középpontú, 7 (km) sugarú kör és az adott egyenes közös pontjainak számát. Az $\left.\begin{aligned} (x-3)^2 + (y-9)^2 &= 49 \\ 2x - 3y &= 5 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszernek nincs megoldása, ezért az országút a jeladótól 7 km-nél távolabb van. Az adás tehát nem fogható.

FELADAT

1. Egy paralelogramma egyik csúcsa az $A(2;\ 6)$ pont, két oldalegyenesének egyenlete pedig az $x + y = 2$, illetve az $x + 2y = 2$.

Az a)–c) feladatok megoldásával állapítsd meg, melyik oldalegyeneshez van közelebb az A pont!

a) Készíts rajzot!

b) Mekkora távolságra van az A pont az $x + y = 2$ egyenletű egyenestől?

c) Mekkora távolságra van az A pont az $x + 2y = 2$ egyenletű egyenestől?

d) Melyik a kisebb távolság?

e) Mekkorák ennek a paralelogrammának a magasságai?

2. A kidolgozott feladatban szereplő jeladó hatósugarát 8 km-re növelték. Az országútnak mekkora szakaszán észlelhető a jeladó által sugárzott adás?

3. Az $x + 3y = 15$ és az $x + 3y = -3$ egyenletű egyeneseket érintő kört rajzoltunk. A kör az $E(0;\ 5)$ pontban érinti az egyik egyenest.

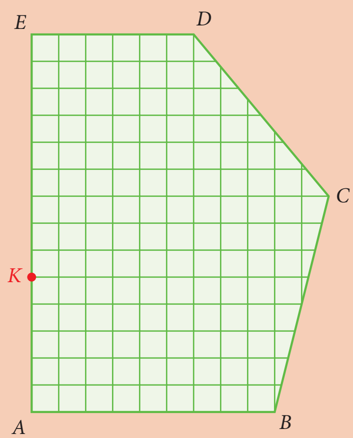
a) Melyik pontban érinti a kör a másik egyenest?

b) Mekkora ennek a körnek a sugara?

HÁZI FELADAT

1. Mekkora távolságra van az origótól az $5x + 7y = 74$ egyenletű egyenes?

2. Egy kissé szokatlan, ötszög alakú helyiség padlóját 40 cm × 40 cm-es négyzet alakú járólapokkal burkolták (az ábra szerint).



a) Mekkora a helyiség alapterülete?

b) A helyiség falait szeretnénk polcokkal, virágtartókkal, képekkel hangulatosabbá tenni, de ehhez lyukakat kellene fúrni a falakba. Sikerülhet-e ez mindegyik fal esetében, ha a fúrógép zsinórja 4 m hosszú, csak a *K*-val jelölt helyen van dugaszolóaljzat (konnektor), hosszabbító pedig nincs?

3. Megadjuk három egyenes egyenletét:

$6x - 8y = 0 \qquad (a),$

$4y = 3x + 6 \qquad (b),$

$y = 0{,}75x - 1 \qquad (c).$

a) Igazold, hogy ez a három egyenes párhuzamos!

b) Mekkora az *a* és a *b* egyenes távolsága?

c) Mekkora az *a* és a *c* egyenes távolsága?

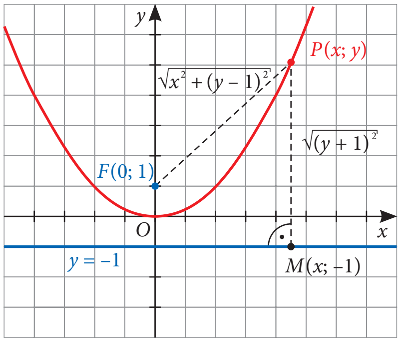
d) Mekkora a *b* és a *c* egyenes távolsága?

RÁADÁS

A parabola egyenlete, a másodfokú függvény grafikonja parabola.

Tizedik osztályban már találkoztunk a parabolával. Vegyünk fel egy síkban egy egyenest és egy olyan pontot, amely nincs rajta ezen az egyenesen. Nevezzük a pontot fókusznak (F), az egyenest pedig vezéregyenesnek (v). A sík összes olyan pontjának a halmazát, amely egyenlő távolságra van a fókusztól és a vezéregyenestől, parabolának nevezzük.

Legyen a parabola fókusza a koordináta-rendszer $F(0;\,1)$ pontja, vezéregyenese pedig az $y = -1$ egyenletű egyenes. A sík egy tetszőleges $P(x;\,y)$ pontjából állítsunk merőlegest a vezéregyenesre! Ez a merőleges a vezéregyenest az $M(x;\,-1)$ pontban metszi. A vezéregyenes és a P pont távolsága tehát $PM = \sqrt{(x-x)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(y+1)^2}$.
A P pont és a fókuszpont távolsága: $FP = \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$.
A $P(x;\,y)$ pontosan akkor van rajta a parabolán, ha $PM = FP$, azaz $\sqrt{(y+1)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$.
Ez tehát a parabola egy egyenlete. Egyszerűbb alakra is juthatunk, ha ekvivalens átalakításokat végzünk. A négyzetre emelés most ekvivalens átalakítás, hiszen mindkét oldalon nemnegatív számok vannak, és a négyzetgyök alatt is mindkét oldalon nemnegatív számok állnak.
Az $(y+1)^2 = x^2 + (y-1)^2$ egyenletben elvégezve a kéttagúak négyzetre emelését:
$y^2 + 2y + 1 = x^2 + y^2 - 2y + 1$.
Rendezés után kapjuk: $y = \frac{1}{4}x^2$.



Eredményünk azt bizonyítja, hogy az $x \mapsto \frac{1}{4}x^2$ másodfokú függvény grafikonja egy olyan parabola, amelynek fókusza az $F(0;\,1)$ pont, vezéregyenese pedig az $y = -1$ egyenletű egyenes.
A másodfokú függvények vizsgálatánál elfogadtuk, de a fentiekhez hasonlóan bizonyíthatjuk is, hogy minden másodfokú függvény grafikonja egy-egy parabola.

88 Párhuzamosság, merőlegesség és a meredekség

KIDOLGOZOTT FELADAT

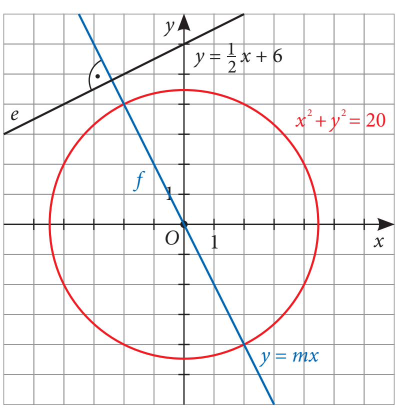
Adva van az $x^2 + y^2 = 20$ egyenletű k kör és az $y = \frac{1}{2}x + 6$ egyenletű e egyenes.

a) Melyik pontban érintik a kört az e-vel párhuzamos érintői?

b) Írjuk fel a kör e-vel párhuzamos érintőinek egyenletét!

Megoldás

a) Az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre, így merőleges a vele párhuzamos e egyenesre is. Ezért az érintési pontot megkaphatjuk úgy is, hogy a kör középpontjából (az origóból) merőlegest állítunk az e-re, és megkeressük ennek a merőlegesnek a körrel alkotott metszéspontjait.



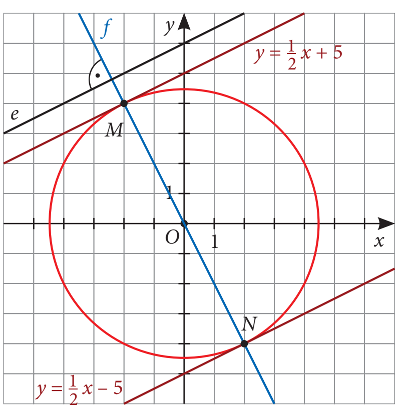
Az e-re merőleges, origón átmenő f egyenes egyenletét $y = mx$ alakban is felírhatjuk. Ez átrendezve: $mx - y = 0$, amiről leolvashatjuk, hogy az f-nek egy normálvektora az $(m; -1)$ vektor. Az e egyenes egyenlete: $\frac{1}{2}x - y = -6$, tehát az e egy normálvektora az $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$ vektor. A két egyenes pontosan akkor merőleges egymásra, ha a két normálvektor skaláris szorzata nulla: $\frac{1}{2}m + 1 = 0$, vagyis $m = -2$.

Az f egyenes egyenlete tehát: $y = -2x$.

Az érintési pontokat keressük. Ezek a k kör és az f egyenes metszéspontjai.

Meg kell oldanunk az $\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 20 \\ y &= -2x \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszert. Behelyettesítéssel dolgozva az első egyenletből kapjuk, hogy $x^2 + 4x^2 = 20$, vagyis $x^2 = 4$. Ebből $x = -2$ vagy $x = 2$ adódik, tehát az egyik érintési pont az $M(-2; 4)$, a másik érintési pont az $N(2; -4)$.

b) Az e-vel párhuzamos érintő irányszöge és így meredeksége is ugyanannyi, mint az e egyenesé, egyenlete tehát $y = \frac{1}{2}x + b$ alakban is megadható.



Az $M(-2; 4)$ pont koordinátáit behelyettesítve: $4 = -1 + b$, amiből $b = 5$ adódik. Az M ponton átmenő, e-vel párhuzamos érintő egyenlete tehát: $y = \frac{1}{2}x + 5$.

Az $N(2; -4)$ pont koordinátáit behelyettesítve: $-4 = 1 + b$, amiből $b = -5$ adódik. Az N ponton átmenő, e-vel párhuzamos érintő egyenlete: $y = \frac{1}{2}x - 5$.

ELMÉLET

Az m_1, illetve m_2 meredekségű egyenesek pontosan akkor párhuzamosak, ha meredekségük egyenlő $(m_1 = m_2)$, és pontosan akkor merőlegesek, ha a meredekségük szorzata (-1)-et ad eredményül $(m_1 m_2 = -1)$.

FELADAT

1. Folytasd a kidolgozott feladatot!

a) Add meg az e-re merőleges érintők érintési pontjait! (A vektor 90°-os elforgatásával dolgozz!)

b) Add meg az e-re merőleges érintők egyenletét!

c) Az e-re merőleges és az e-vel párhuzamos érintők egy négyzetet határoznak meg. Add meg a négyzet csúcsait! (Használhatsz vektorokat a csúcsok megadásához, vagy meghatározhatod ezeket két-két egyenes metszéspontjaként is.)

2. Add meg a $P(-3;\ 4)$ ponton átmenő e egyenes egyenletét, ha

a) az e párhuzamos az $y = 4x - 5$ egyenletű egyenessel;

b) az e merőleges az $y = 4x - 5$ egyenletű egyenesre!

3. Az ABC szabályos háromszög két csúcsa $A(0;\ 0)$ és $B(6;\ 0)$.

a) Írd fel a háromszög oldalegyeneseinek egyenletét! Használd fel az oldalegyenesek irányszögét!

b) Írd fel a háromszög súlyvonalainak egyenletét! Használd fel, hogy a szabályos háromszög súlyvonalai merőlegesek egy-egy oldalegyenesre!

HÁZI FELADAT

1. Az e egyenes átmegy az origón, egy irányvektora a $\mathbf{v}(-5,\ 2)$.

a) Add meg e-nek három normálvektorát!

b) Írd fel az egyenletét!

c) Add meg az e iránytangensét!

d) Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(0;\ 2)$ ponton, és párhuzamos az e-vel!

e) Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az origón, és merőleges az e-re!

f) Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(0;\ 2)$ ponton, és merőleges az e-re!

2. Add meg az 1. feladatban szereplő összes egyenes

a) iránytangensét; **b)** irányszögét!

3. Milyen helyzetűek az $y = 1{,}25x$ egyenletű egyeneshez képest az alábbi egyenesek?

a) $y = -1{,}25x$; **c)** $y = -0{,}8x$;

b) $y = 1{,}25x + 2$; **d)** $y = 0{,}8x + 5$.

RÁADÁS

A kidolgozott feladat b) részét kevesebb geometria és több algebra alkalmazásával is megoldhatjuk, ráadásul nincs szükség az a) rész eredményére sem.

Az e-vel párhuzamos egyenesek egyenlete $y = 0{,}5x + b$ alakban írható.

Vizsgáljuk azt, hogy hány közös pontjuk van ezeknek az egyeneseknek a k körrel.

Meg kell oldanunk az $\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 20 \\ y &= 0{,}5x + b \end{aligned}\right\}$

egyenletrendszert.

Az első egyenletbe behelyettesítve az y-t a második egyenletből: $x^2 + (0{,}5x + b)^2 = 20$.

A zárójelet felbontva és az egyenletet nullára rendezve az $1{,}25x^2 + bx + (b^2 - 20) = 0$ egyenlethez jutunk. Annyi közös pont van, ahány megoldása van ennek a másodfokú egyenletnek.

Ha az érintőt keressük, akkor az egyenlet diszkriminánsának 0-val egyenlőnek kell lennie, hiszen az érintőnek egy közös pontja van a körrel.

A diszkrimináns: $b^2 - 4 \cdot 1{,}25 \cdot (b^2 - 20) = 100 - 4b^2$. Ez pontosan akkor nulla, ha $b^2 = 25$. Két érintő is van tehát, mert a b értéke lehet 5 és lehet (-5) is.

A két érintő: $y = 0{,}5x + 5$, illetve $y = 0{,}5x - 5$.

89 Vektorok, egyenesek, körök

FELADAT

1. Megadjuk a következő vektorokat: $\mathbf{a}(2;\ -3)$, $\mathbf{b}(-2;\ 3)$, $\mathbf{c}(4;\ -6)$, $\mathbf{d}(6;\ 4)$, $\mathbf{e}(10;\ -2)$; $\mathbf{f}(-4;\ -1)$.
Válassz ki közülük
a) két párhuzamos vektort;
b) két merőleges vektort;
c) egy olyan vektort, amelyik éppen két másiknak az összege;
d) egy olyan vektort, amelyik éppen két másiknak a különbsége;
e) egy olyan vektort, amelyik pontosan valamelyik másiknak a $+90°$-os elforgatottja!
Egyes esetekben több megoldás is létezhet!

2. Az ABC egyenlő szárú háromszög alapjának végpontjai $A(4;\ 1)$, $B(10;\ 5)$. Tudjuk, hogy a háromszög ezen alaphoz tartozó magassága kétszerese az alap hosszának.
a) Hány ilyen háromszög rajzolható a koordinátarendszerben?
b) Add meg a harmadik csúcs koordinátáit!
c) Add meg a háromszög súlypontjának koordinátáit!
d) Add meg az $\overrightarrow{AB}$ és az $\overrightarrow{AC}$ koordinátáit, és számítsd ki a hosszukat (a háromszög oldalainak hosszát)!
e) Mekkorák a háromszög szögei?

3. Az $x^2 + y^2 - 12x + 16y = 69$ egyenletű k kör középpontja a K pont.
a) Add meg a K koordinátáit!
b) Mekkora a k sugara?
c) Igaz-e, hogy a k az x tengelyt a $(-4;\ 0)$ és a $(16;\ 0)$ pontban metszi?
d) Hol metszi a k az x tengelyt?

4. Az f egyenes egyenlete $5x - 12y + 43 = 0$.
a) Add meg az f egy normálvektorát!
b) Add meg az f iránytangensét!
c) Mekkora szöget alkot az f a koordinátatengelyekkel?
d) Hol metszi az f a koordinátatengelyeket?

5. A diákok az $5x - 12y + 43 = 0$ egyenletű f egyenesre, illetve az $x^2 + y^2 - 12x + 16y = 69$ egyenletű k körre vonatkozóan a következő feladatot kapták:
Igaz-e, hogy az f egyenes az $E(1;\ 4)$ pontban érinti a k kört?
Kövesd a diákok gondolatmenetét!
Jocó válasza:
– Megoldom a két egyenletből álló egyenletrendszert. Ha egy megoldást kapok, az $(1;\ 4)$ rendezett számpárt, akkor igaz, minden más esetben hamis az állítás.
Sári válasza:
– Megnézem, hogy E rajta van-e a körön is és az egyenesen is. Ha valamelyiken nincs rajta, akkor hamis az állítás. Ha mindkettőn rajta van, akkor pechem van, valahogy még igazolni kell, hogy több közös pontjuk nincs.
a) Hogyan értékelnéd Jocó megoldását? Ha tetszik neked, végezd el a számításokat!
b) Kezdd el Sári megoldását! Rajta van-e E az f-en és a k-n?
c) Bence a k kör középpontját K-val jelölte, és megvizsgálta az $\overrightarrow{EK}$-t, merőleges-e az f-re. Vizsgáld meg te is! Mit tapasztalsz? Mire következtethetsz ebből?
d) Melyik módszert ajánlanád a társaidnak? Miért?
e) Mi a te válaszod a feladatra?

HÁZI FELADAT

1. Vedd fel a koordináta-rendszerben az $A(1;\ 6)$, a $B(3;\ -4)$ és a $C(-6;\ 2)$ pontokat. Add meg az ABC háromszög
- **a)** súlypontját;
- **b)** körülírt körének egyenletét;
- **c)** magasságpontját!

2. Az $ABCD$ négyszög csúcsai: $A(-3;\ 1)$, $B(-1;\ 3)$, $C(5;\ -3)$, $D(-1;\ -5)$.
- **a)** Igazold, hogy a négyszögnek van két derékszöge!
- **b)** Az a)-ban kapott eredmény alapján igazold, hogy a négyszög húrnégyszög (azaz a csúcsai egy körön vannak)!
- **c)** Add meg a négyszög köré írható kör egyenletét!

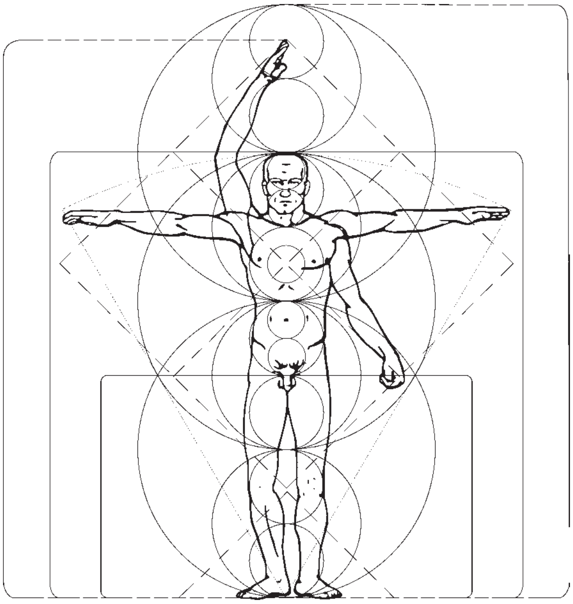
RÁADÁS

Megismerkedtünk a koordinátageometria alapjaival. Láthattuk, hogy a geometria igen szoros kapcsolatba hozható az algebrával. A kapcsolat megmutatását, elemzését a derékszögű koordináta-rendszer és a vektorok számpárok segítségével történő megadása tette lehetővé.

A geometriai feladatok megoldására hatékony módszer lehet a probléma algebrai formába öntése; erre mutatunk egy példát az alábbiakban.

Adott az ABC háromszög. Határozzuk meg a síkjában azt a P pontot, amelyre a $PA^2 + PB^2 + PC^2$ összeg a legkisebb!

Ez bizony egy elég nehéz síkgeometriai feladat. Ám ha koordináta-rendszerbe helyezzük a háromszöget, akkor egy „közepesen nehéz” algebrai feladat lesz belőle. Lássuk, hogyan!



Legyenek a háromszög rögzített csúcspontjai például $A(2;\ 4)$, $B(5;\ 7)$ és $C(-1;\ 10)$, a sík egy tetszőleges pontja $P(x;\ y)$.
Ekkor $PA^2 + PB^2 + PC^2 = (x-2)^2 + (y-4)^2 + (x-5)^2 + (y-7)^2 + (x+1)^2 + (y-10)^2$.
Azt kérdezzük, hogy mely számokat írjuk az x, illetve az y helyébe, hogy a helyettesítési érték a lehető legkisebb legyen.
Alakítsuk át algebrai azonosságok alkalmazásával a hattagú összeget:
$PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3x^2 + 3y^2 - 12x - 42y + 195 = 3(x^2 - 4x) + 3(y^2 - 14y) + 195$. A teljes négyzetté kiegészítés módszerével: $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3(x-2)^2 + 3(y-7)^2 + 36$.
Ebből már világos, hogy az összeg pontosan akkor lesz a legkisebb, ha a négyzetes kifejezések értéke 0, azaz $x = 2$ és $y = 7$.
A $PA^2 + PB^2 + PC^2$ összeg tehát akkor a legkisebb, ha a P pont koordinátái $(2;\ 7)$. A legkisebb összeg a 36.

Megjegyzés
Könnyen ellenőrizhető, hogy az ABC háromszög súlypontja éppen a $(2;\ 7)$ pont. Ez persze nem véletlen. Bizonyítható általánosan is, hogy a minimális négyzetösszeget adó P pont minden esetben a háromszög súlypontjával azonos.

90 Tudáspróba

TUDÁSPRÓBA I.

1. Megadunk három vektort, $\mathbf{a}(1;\ 4)$, $\mathbf{b}(-3;\ 6)$ és $\mathbf{c}\left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right)$.

a) Mik az $\mathbf{a} + 4\mathbf{c}$ koordinátái?

b) Mennyi az $\mathbf{ac}$, és mennyi az $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c}$?

c) Add meg az $\frac{1}{2}\mathbf{b}$ vektor 90°-os elforgatottjainak a koordinátáit!

d) Add meg az ABC háromszög súlypontjának koordinátáit, ha a csúcsok helyvektorai **a**, **b** és **c**!

2. Az $ABCD$ rombusz két szemközti csúcsa az $A(1;\ 4)$ és a $C(9;\ -6)$ pont, az AB oldalegyenes egyenlete $13x - 6y = -11$.

a) Írd fel a BD átló egyenesének az egyenletét!

b) Határozd meg a B és a D csúcs koordinátáit!

c) Mekkorák a rombusz oldalai?

3. Mely ponthalmazok egyenletei a következők?

a) $(x - 4)^2 - (x + 1)^2 = 5$

b) $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 0$

c) $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 8$

d) $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = x^2 + y^2$

4. Az $x^2 + (y - 4)^2 = 16$ egyenletű kör egy négyzetnek mind a négy oldalát érinti. Az egyik érintési pont az $E(-3{,}2;\ 1{,}6)$.

a) Hol van ennek a körnek a középpontja, és mekkora a sugara?

b) Melyik a másik három érintési pont?

c) Határozd meg a négyzet csúcsait!

TUDÁSPRÓBA II.

1. Megadunk három vektort, $\mathbf{a}(2;\ 4)$, $\mathbf{b}(-12;\ 3)$ és $\mathbf{c}\left(-\frac{2}{3};\ \frac{5}{3}\right)$-t.

a) Mik az $\mathbf{a} + 6\mathbf{c}$ koordinátái?

b) Mennyi a $\mathbf{bc}$, és mennyi az $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c}$?

c) Add meg az $\frac{1}{2}\mathbf{a}$ vektor 90°-os elforgatottjainak a koordinátáit!

d) Add meg az ABC háromszög súlypontjának koordinátáit, ha a csúcsok helyvektorai **a**, **b** és **c**!

2. Az ABC derékszögű háromszög AB oldalegyenesének egyenlete $3x - 2y = -23$. Az átfogó végpontjai: $A(-3;\ 7)$ és $C(-1;\ 23)$.

a) Írd fel a BC oldalegyenes egyenletét!

b) Add meg a B csúcs koordinátáit!

c) Írd fel a háromszög körülírt körének egyenletét!

3. Mely ponthalmazok egyenletei a következők?

a) $(y + 2)^2 - (y - 6)^2 = 32$

b) $(x + 2)^2 - (y - 6)^2 = 0$

c) $(x + 2)^2 + (y - 6)^2 = 12{,}25$

d) $(x + 2)^2 + (y - 6)^2 = x^2 + y^2$

4. Az $(x + 6)^2 + y^2 = 36$ egyenletű kör egy négyzetnek mind a négy oldalát érinti. Az egyik érintési pont az $E(-2{,}4;\ 4{,}8)$.

a) Hol van ennek a körnek a középpontja, és mekkora a sugara?

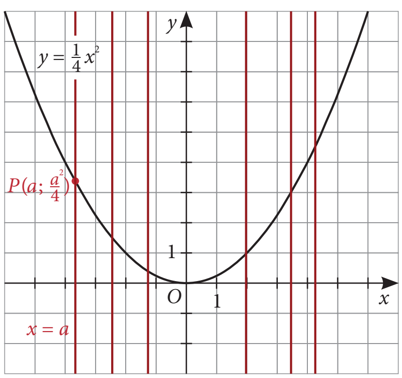
b) Melyik a másik három érintési pont?

c) Határozd meg a négyzet csúcsait!

A parabola és az egyenes

A 87. lecke ráadásában láttuk, hogy az $y = \frac{1}{4}x^2$ egyenletű görbe egy olyan parabola, amelynek fókusza az $F(0; 1)$ pont, vezéregyenese pedig az $y = -1$ egyenletű egyenes. A parabola tulajdonságairól nem sokat tanultunk eddig (csak a meghatározását), pedig sok érdekesség kapcsolódik hozzá (elég, ha csak a parabolaantennát említjük).
A koordinátageometria ereje abban van, hogy kevés előismerettel is komoly problémákat oldhatunk meg. Az egyik ilyen kérdés az, hogy a parabolának és a síkjában lévő egyenesnek hány közös pontja lehet.

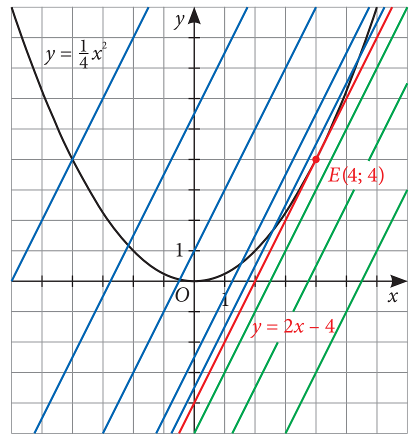
Vizsgáljuk az $y = \frac{1}{4}x^2$ parabolát és a síkjában lévő egyeneseket!



– A parabola tengelyével, azaz az y tengellyel párhuzamos egyenesek egyenlete $x = a$ alakban is írható. Az egyenes és a parabola közös pontjának második koordinátáját behelyettesítéssel is megkaphatjuk: $y = \frac{1}{4}a^2$.
A parabola tengelyével párhuzamos egyenesnek és a parabolának tehát minden esetben van közös pontja, de mindig csak egy közös pontja van, mégpedig a $P\left(a; \frac{a^2}{4}\right)$ pont. Ez fontos információ a parabola „alakjára" nézve.
– A parabola tengelyével nem párhuzamos egyenesek közül válasszuk ki például a 2 meredekségű egyeneseket, és vizsgáljuk meg, hogy ezeknek hány közös pontjuk lehet a parabolával!
A 2 meredekségű egyenesek egyenlete írható $y = 2x + b$ alakban is. Az egyenes és a parabola közös pontjait az

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x + b \\ y = \frac{1}{4}x^2 \end{array}\right\}$$ egyenletrendszer megoldása adja.

A második egyenletben kifejezett y-t írjuk az első egyenletbe: $\frac{1}{4}x^2 = 2x + b$. Az egyenletet nullára rendezve az $x^2 - 8x - 4b = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk.



Az egyenesnek és a parabolának annyi közös pontja van, ahány megoldása létezik ennek az egyenletnek. A másodfokú egyenlet megoldásainak számát a diszkriminánsának előjele határozza meg. Az $x^2 - 8x - 4b = 0$ egyenlet diszkriminánsa a $64 + 16b$ értékével egyenlő.
– Ha $b < -4$, akkor a diszkrimináns negatív, az egyenesnek tehát nincs közös pontja a parabolával. Közülük néhányat zöldre színeztünk.
– Ha $b = -4$, akkor az $y = 2x - 4$ egyenesről van szó. Ennek az egyenesnek egyetlen közös pontja van a parabolával, mégpedig az $E(4; 4)$ pont. Ezt az egyenest, amelyet ábránkon pirosra színeztünk, a parabola E-beli *érintőjének* nevezzük.
– Ha $b > -4$, akkor az egyenesnek két közös pontja van a parabolával. Ábránkon ilyenek a kékkel rajzolt egyenesek. Más eset nem lehetséges, tehát a 2 meredekségű egyeneseknek és a parabolának 0, 1 vagy 2 közös pontja lehet.

A 2 meredekség helyett választhatunk bármely más meredekséget, ugyanazt kapjuk: a parabolának és az egyenesnek 0, 1 vagy 2 közös pontja lehet. Az olyan egyenest, amelynek 1 közös pontja van a parabolával, de nem párhuzamos a parabola tengelyével, és nem is maga a tengely, a parabola *érintőjének* nevezzük. A parabolának minden pontjában pontosan egy érintője van.

Témazáró feladatgyűjtemény

1. Adva van a koordináta-rendszerben az $A(3; 4)$ és $B(-2; 1)$ pont.

a) Ábrázold az origóból a pontokba mutató vektorok összegét, különbségét!

b) Add meg koordinátákkal az origóból a pontokba mutató vektorok összegét, különbségét!

2. Adva van a koordináta-rendszerben az $A(3; 4)$, $B(-2; 1)$ és a $C(-1; 5)$ pont.

a) Ábrázold az $\overrightarrow{AB}$ és az $\overrightarrow{AC}$ vektorok összegét, különbségét!

b) Add meg az $\overrightarrow{AB}$ és az $\overrightarrow{AC}$ vektorok összegét, különbségét!

3. Adva van egy paralelogramma négy csúcspontja: $A(1; 2)$, $B(-5; 1)$, $C(-7; 4)$ és $D(-1; 5)$.

a) A paralelogramma definíciója alapján mutasd meg, hogy valóban paralelogramma!

b) Mekkorák az oldalai?

c) Add meg az átlóvektorokat!

d) Milyen hosszúak az átlók?

4. Adva van a koordináta-rendszerben két pont: $A(7; 8)$ és $B(2; -5)$.

a) Add meg az origóból a pontokba mutató vektorok skaláris szorzatát!

b) Mekkora szöget zár be egymással az origóból az A és B pontba mutató két vektor?

5. Adott a koordináta-rendszerben három pont: $A(3; 1)$; $B(5; 0)$ és $C(6; 7)$.

a) Add meg az $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AB}$ vektorok skaláris szorzatát!

b) Add meg az $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AB}$ vektorok által bezárt szöget!

c) Mekkora szöget zár be egymással az $\overrightarrow{AC}$ és a $\overrightarrow{BC}$ vektor?

d) Add meg az ABC háromszög belső szögeit!

6. Adott a koordináta-rendszerben három pont: $A(-4; 2)$; $B(6; -8)$ és $C(3; 7)$.

a) Add meg az origóból az AB szakasz felezőpontjába mutató vektort!

b) Add meg a C pontból az AB szakasz felezőpontjába mutató vektort!

7. Adva van az $A(-5; 2)$ és a $B(10; 4)$ pont. Add meg az alábbi pontok koordinátáit! Megoldásodat ellenőrizd a koordináta-rendszerben!

a) az AB szakasz felezőpontja,

b) az AB szakasz harmadolópontjai,

c) az AB szakaszt öt egyenlő részre osztó pontok közül az A-hoz és a B-hez legközelebbi pontok.

8. Adva van az ABC háromszög. Legyen $A(-2; -3)$, $B(-1; 4)$, $C(4; 3)$.

a) Add meg a háromszög három oldalfelező pontját!

b) Add meg a csúcspontokból a szemközti oldalfelező pontokba mutató vektorokat!

c) Add meg az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{CA}$ oldalvektorokat!

d) Mekkorák a háromszög oldalai?

e) Mekkora két-két oldalvektor összege és különbsége?

f) Add meg az oldalfelező pontok által meghatározott vektorokat!

g) Milyen hosszúak ezek a vektorok?

9. Adva van egy paralelogramma négy csúcspontja: $A(1; 2)$, $B(-5; 1)$, $C(-7; 4)$ és $D(-1; 5)$.

a) Add meg az átlók metszéspontját!

b) Add meg az oldalak felezőpontjait!

c) Milyen négyszöget alkot a négy oldalfelező pont? Miért?

10. Adva van egy trapéz négy csúcsa. $A(1; 2)$, $B(-5; 1)$, $C(-7; 4)$ és $D(-4; 4{,}5)$.

a) A trapéz definíciója alapján mutasd meg, hogy valóban trapéz!

b) Mekkorák az oldalai?

c) Add meg az átlóvektorokat!

d) Milyen hosszúak az átlók?

e) Add meg a két szár felezőpontját!

f) Igazold, hogy a szárak felezőpontja által meghatározott szakasz – a trapéz középvonala – hossza az alapok hosszának számtani közepe!

11. Adva van két pont, $A(3; 4)$, illetve $B(-3; 1)$.

a) Egészítsd ki négyzetté úgy, hogy AB a négyzet egyik oldal legyen! Figyelj, két ilyen négyzet is van!

b) Számítsd ki a négyzet oldalának és átlójának hosszát!

c) Add meg az oldalakat mint vektorokat!

12. Egy háromszög három csúcsa rendre $A(3; 4)$, $B(2; 6)$, $C(-2; 5)$.

a) Hol van a súlypontja?

b) Milyen hosszúak az oldalai?

c) Mekkora a háromszög kerülete és területe?

d) Add meg az oldalakat vektorként!

e) A skaláris szorzat segítségével határozd meg, mekkorák a háromszög szögei?

13. Egy háromszög csúcsai $A(1; 1)$, $B(1; 5)$, $C(-4; 3)$.

a) Igazold, hogy a háromszög egyenlő szárú!

b) Mekkora a szárak hossza?

c) Mekkorák az alapon fekvő szögei?

d) Mekkora a háromszög kerülete, területe?

e) Mekkorák a magasságai?

f) Mekkorák a súlyvonalai?

14. Egy háromszög csúcsai $A(1; 1)$, $B(1; 5)$, $C(-4; 4)$.

a) Mekkora az oldalak hossza?

b) Mekkorák a szögei?

c) Mekkora a háromszög kerülete, területe?

d) Mekkorák a magasságai?

e) Mekkorák a súlyvonalai?

15. Egy háromszög csúcsai $A(1; 1)$, $B(1; 5)$, $C(-4; 5)$.

a) Mekkora az oldalak hossza?

b) Mekkorák a szögei?

c) Mekkora a háromszög kerülete, területe?

d) Mekkorák a magasságai?

e) Mekkorák a súlyvonalai?

f) Add meg a körülírt körének a középpontját és sugarát!

16. Add meg annak a körnek az egyenletét, amelynek

a) középpontja az origó, sugara 5 egység,

b) középpontja a $K(4; 5)$ pont, sugara 5 egység,

c) középpontja a $K(-2; 3)$ pont, sugara $\sqrt{5}$ egység,

d) középpontja a $K(-3; -5)$ pont, sugara 10 egység!

17. Mi a középpontjuk és a sugaruk az alábbi köröknek?

a) $x^2 + y^2 = 16$;

b) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 16$;

c) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 17$;

d) $(x - 3)^2 + (y - 10)^2 = 25$;

e) $x^2 + (y - 1)^2 = 16$.

18. Egy kör középpontja $K(2; 3)$, sugara 5 egység.

a) Add meg az egyenletét!

b) Add meg a 2 abszcisszájú pontjaihoz húzott érintőinek az egyenletét!

c) Add meg a 3 ordinátájú pontjaihoz húzott érintőinek az egyenletét!

19. Add meg azoknak a köröknek az egyenletét, amelyek

a) érintik mindkét tengelyt, és sugaruk 2 egység;

b) középpontjának abszcisszája 3, és mindkét tengelyt érintik;

c) középpontjának ordinátája -4, és mindkét tengelyt érintik;

d) középpontja rajta van az $y = x$ egyenesen, sugaruk 5 egység, és érintik mindkét tengelyt!

20. Add meg azoknak a köröknek az egyenletét, amelyek

a) középpontja rajta van az $y = 2x + 1$ egyenesen, a középpont abszcisszája 3, és érintik az x tengelyt;

b) középpontja rajta van az $y = 2x + 1$ egyenesen, a középpont ordinátája 9, és érintik az x tengelyt;

c) középpontja rajta van az $y = 2x + 1$ egyenesen, sugara 3 egység, és érintik valamelyik tengelyt!

21. Adva van egy kör $K(2; 3)$ középponttal, amelynek 4 egység a sugara.

a) Add meg annak a körnek az egyenletét, amely kívülről érinti, sugara 2 egység, és a középpont ordinátája 3!

b) Add meg annak a körnek az egyenletét, amely belülről érinti, sugara 2 egység, és a középpont ordinátája 3!

c) Add meg annak a körnek az egyenletét, amely kívülről érinti, sugara 2 egység, és a középpont abszcisszája 2!

d) Add meg annak a körnek az egyenletét, amely belülről érinti, sugara 2 egység, és a középpont abszcisszája 2!

22. Add meg az egyenes egyenletét, ha

a) normálvektora $\mathbf{n}(2; 7)$, és átmegy a $P(-2; 4)$ ponton,

b) normálvektora $\mathbf{n}(4; 14)$, és átmegy a $P(-2; 4)$ ponton;

c) normálvektora $\mathbf{n}(-1; 6)$, és átmegy a $P(7; -3)$ ponton!

23. Add meg az egyenes egyenletét, ha

a) irányvektora a $\mathbf{v}(-1; 6)$, és átmegy a $P(7; -3)$ ponton;

b) irányvektora $\mathbf{v}(6; 1)$, és átmegy a $P(7; -3)$ ponton!

24. Add meg az egyenes egyenletét, ha

a) átmegy a $P(2; 5)$ és a $Q(-2; 8)$ ponton;

b) átmegy a $K(-24; 6)$ és $L(-32; -18)$ pontokon!

c) Mekkora a meredekségük a fenti egyeneseknek?

25. Add meg az egyenes egy normálvektorát és a meredekségét, ha az egyenlete

a) $4x + 3y = 18$,

b) $-4x + 3y = 18$,

c) $-4x - 3y = 18$,

d) $4x - 3y = 18$,

e) $y = 3x + 12$,

f) $y = -x + 6$,

g) $y = -0{,}5x - 0{,}5$,

h) $2y - 6 = 3x$,

i) $4x + 8 = 5y$.

26. Tekintsük a 25. feladat egyeneseit! Adj meg egy-egy rájuk merőleges és velük párhuzamos egyenest!

27. Tekintsük a 25. feladat egyeneseit!

a) Hol metszik a 25. feladat egyenesei az x és az y tengelyeket?

b) Mekkora szögben metszik az egyenesek az x tengelyt?

28. Adva van egy háromszög $A(2; 3)$, $B(-2; 5)$, $C(-2; -1)$ három csúcsa.

a) Add meg az oldalak hosszát!

b) Add meg az oldalegyeneseinek az egyenletét!

c) Add meg az oldalfelező merőlegeseik egyenletét!

d) Határozd meg az oldalfelező merőlegeseik metszéspontját!

e) Add meg a körülírt körének egyenletét!

29. A 28. feladatban megadott háromszöggel dolgozz tovább!

a) Add meg a magasságvonalainak az egyenletét!

b) Add meg a magasságvonalak hosszát!

c) Add meg a magasságpontját!

d) Számítsd ki a területét!

e) Mekkorák a háromszög szögei?

f) Add meg a háromszög súlypontját!

30. Folytasd a számolást a 28. feladat háromszögével!

a) Add meg a körülírt kör középpontjából a magasságpontba mutató vektort, és határozd meg a hosszát!

b) Add meg a körülírt kör középpontjából a súlypontba mutató vektort, és határozd meg a hosszát!

c) Add meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a súlyponton és a körülírt kör középpontján!

d) Add meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a magasságponton és a körülírt kör középpontján!

31. Egy kör középpontja a $K(-1; 2)$ pont, sugara 3 egység.

a) Milyen messze van a $P(4; 2)$ pont a K középponttól?

b) Legyen M és N a P pontból a körhöz húzott érintők érintési pontja! Add meg az MP és az NP érintőszakaszok hosszát! (M és N meghatározása nem kell hozzá!)

c) Add meg a P középpontú, MP sugarú kör egyenletét!

d) Add meg a két kör metszéspontját (oldd meg a két köregyenletből álló egyenletrendszert)! Ezek lesznek M és N érintési pontok.

e) Add meg az érintők egyenletét!

f) Mekkora szöget zárnak be az érintők egymással?

32. Adva van egy $P(1; 4)$ pont és a $-2x + 3y = -3$ egyenletű e egyenes.

a) Add meg a P pontból az e egyenesre merőleges egyenes egyenletét!

b) Add meg a két egyenes metszéspontját!

c) Milyen messze van a P pont az e egyenestől?

d) Add meg a P ponton átmenő e egyenessel párhuzamos f egyenes egyenletét!

e) Add meg az e egyenestől ugyanolyan messze haladó másik párhuzamos egyenes egyenletét!

33. Adva van az $y = -2x + 5$ egyenletű e egyenes és a $P(4; 2)$ pont.

a) Add meg az egyenes egy normálvektorát!

b) Add meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely merőleges az e egyenesre, és átmegy P-n!

c) Add meg ennek az egyenesnek is egy normálvektorát!

d) Hol metszi egymást a két egyenes?

e) Mekkora a távolsága a P pontnak és az e egyenesnek?

f) Add meg annak az f egyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos az e egyenessel, és átmegy P-n!

g) Mekkora a távolsága az e és az f egyenesnek?

34. Érettségi feladat, 2006. február.

Egy négyzet oldalegyenesei a koordinátatengelyek és az $x = 1$, valamint az $y = 1$ egyenletű egyenesek.

a) Ábrázolja derékszögű koordináta-rendszerben a négyzetet, és adja meg csúcsainak koordinátáit!

b) Írja fel a négyzet köré írható kör egyenletét!

c) Állapítsa meg, hogy a négyzet kerülete hány százaléka a kör kerületének!

d) Az $y = -4x + 2$ egyenletű egyenes a négyzetet két részre bontja. Számítsa ki e részek területének arányát!

35. Érettségi feladat, 2008. május.

Adott a koordináta-rendszerben az $A(9; -8)$ középpontú, 10 egység sugarú kör.

a) Számítsa ki az $y = -16$ egyenletű egyenes és a kör közös pontjainak koordinátáit!

b) Írja fel a kör $P(1; -2)$ pontjában húzható érintőjének egyenletét! Adja meg ennek az érintőnek az iránytangensét (meredekségét)!

36. Érettségi feladat, 2009. október.

Adott az $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 56 = 0$ egyenletű kör és az $x - 8{,}4 = 0$ egyenletű egyenes.

a) Számítsa ki a kör és az egyenes közös pontjainak koordinátáit!

b) Mekkora távolságra van a kör középpontja az egyenestől?

37. Érettségi feladat, 2010. május.

Az ABC háromszög csúcspontjainak koordinátái: $A(0; 0)$, $B(-2; 4)$, $C(4; 5)$.

a) Írja fel az AB oldal egyenesének egyenletét!

b) Számítsa ki az ABC háromszög legnagyobb szögét! A választ tizedfokra kerekítve adja meg!

c) Számítsa ki az ABC háromszög területét!

38. Érettségi feladat, 2011. május.

Az ABC háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-3; 2)$, $B(3; 2)$ és $C(0; 0)$.

a) Számítsa ki az ABC háromszög szögeit!

b) Írja fel az ABC háromszög körülírt körének egyenletét!

39. Érettségi feladat, 2011. október.

Adott két egyenes:

e: $5x - 2y = -14{,}5$ és f: $2x + 5y = 14{,}5$.

a) Határozza meg a két egyenes P metszéspontjának koordinátáit!

b) Igazolja, hogy az e és az f egyenesek egymásra merőlegesek!

c) Számítsa ki az e egyenes x tengellyel bezárt szögét!

40. Érettségi feladat, 2012. október.

Egy háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-2; -1)$, $B(9; -3)$ és $C(-3; 6)$.

a) Írja fel a BC oldal egyenesének egyenletét!

b) Számítsa ki a BC oldallal párhuzamos középvonal hosszát!

c) Számítsa ki a háromszögben a C csúcsnál lévő belső szög nagyságát!

41. Érettségi feladat, 2013. május.

A PQR háromszög csúcsai: $P(-6; -1)$, $Q(6; -6)$ és $R(2; 5)$.

a) Írja fel a háromszög P csúcsához tartozó súlyvonal egyenesének egyenletét!

b) Számítsa ki a háromszög P csúcsnál lévő belső szögének nagyságát!

42. Érettségi feladat, 2013. október.

Adott a koordináta-rendszerben két pont: $A(1; -3)$ és $B(7; -1)$.

a) Írja fel az A és B pontokra illeszkedő e egyenes egyenletét!

b) Számítással igazolja, hogy az A és a B pont is illeszkedik az $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 10$ egyenletű k körre, és számítsa ki az AB húr hosszát!

Az f egyenesről tudjuk, hogy illeszkedik az A pontra, és merőleges az AB szakaszra.

c) Számítsa ki a k kör és az f egyenes (A-tól különböző) metszéspontjának koordinátáit!

43. Érettségi feladat, 2014. május.

Adott az $A(5; 2)$ és a $B(-3; -2)$ pont.

a) Számítással igazolja, hogy az A és B pontok illeszkednek az $x - 2y = 1$ egyenletű e egyenesre!

b) Írja fel az AB átmérőjű kör egyenletét!

c) Írja fel annak az f egyenesnek az egyenletét, amely az AB átmérőjű kört a B pontban érinti!

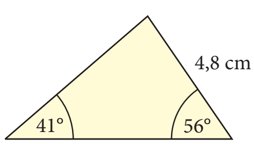
Ráadás Itt a nyár!

Akik egy évvel előttetek járnak, már megírták az érettségiket. A következő feladatokat az előző évek középszintű érettségi feladatsoraiból válogattuk. Érdemes megpróbálkoznotok a megoldásukkal.

A következő öt *egyszerű feladat* közül 4-et oldjatok meg!

1. A 2, 4 és 5 számjegyek mindegyikének felhasználásával elkészítjük az összes, különböző számjegyekből álló háromjegyű számot. Ezek közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az így kiválasztott szám páratlan? Válaszát indokolja!
(A 2011. májusi középszintű érettségi 2. feladata.)

2. Az ábrán látható háromszögben hány cm hosszú az 56°-os szöggel szemközti oldal?
(Az eredményt egy tizedesjegy pontossággal adja meg!)



Írja le a számítás menetét!
(A 2007. májusi középszintű érettségi 8. feladata.)

3. Adottak az $\boldsymbol{a}(4;\,3)$ és a $\boldsymbol{b}(-2;\,1)$ vektorok.
a) Adja meg az $\boldsymbol{a}$ hosszát!
b) Számítsa ki az $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ koordinátáit!
(A 2005. májusi középszintű érettségi 12. feladata.)

4. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P_0(3;\,-5)$ ponton, és párhuzamos a $4x + 5y = 0$ egyenletű egyenessel!
(A 2006. májusi középszintű érettségi 10. feladata.)

5. Az $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 3 + \log_2 x$ függvény az alábbiak közül melyikkel azonos?
A: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 3\log_2 x$
B: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \log_2(8x)$
C: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \log_2(3x)$
D: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \log_2(x^3)$
(A 2010. májusi középszintű érettségi 4. feladata.)

A következő öt *összetett feladat* közül 3-at oldjatok meg!

6. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!
$\cos^2 x + 4\cos x = 3\sin^2 x$
(A 2005. májusi középszintű érettségi 13. feladata.)

7. Az e egyenesről tudjuk, hogy a meredeksége 0,5, és az y tengelyt 4-ben metszi.
a) Ábrázolja koordináta-rendszerben az e egyenest, és írja fel az egyenletét!
b) Mutassa meg, hogy a $P(2;\,5)$ pont rajta van az e egyenesen! Állítson merőlegest ezen a ponton át az egyenesre. Írja fel ennek az egyenesnek az egyenletét!
c) E két egyenest elmetsszük a $4x - 3y = -17$ egyenletű egyenessel, a metszéspontok A és B. Számítsa ki az A és B metszéspontok koordinátáit!
d) Számítsa ki a PAB háromszög területét!
e) Adja meg a PAB háromszög köré írható kör középpontjának koordinátáit! (A 2007. májusi angol nyelvű középszintű érettségi 16. feladata.)

8. Egy autó ára újonnan 2 millió 152 ezer forint, a megvásárlása után öt évvel ennek az autónak az értéke 900 ezer forint.
a) A megvásárolt autó tulajdonosának a vezetési biztonságát a vásárláskor 90 ponttal jellemezhetjük. Ez a vezetési biztonság évente az előző évinek a 6%-ával nő. Hány pontos lesz 5 év elteltével az autótulajdonos vezetési biztonsága? Válaszát egész pontra kerekítve adja meg!
b) Az első öt év során ennek az autónak az értéke minden évben az előző évi értékének ugyanannyi százalékával csökken. Hány százalék ez az éves

csökkenés? Válaszát egész százalékra kerekítve adja meg!

(A 2011. májusi középszintű érettségi 14. feladata.)

9. Egy szerencsejáték a következőképpen zajlik:

A játékos befizet 7 zsetont, ezután a játékvezető feldob egy szabályos dobókockát. A dobás eredményének ismeretében a játékos abbahagyhatja a játékot; ez esetben annyi zsetont kap, amennyi a dobott szám volt. Dönthet azonban úgy is, hogy nem kéri a dobott számmal egyenlő számú zsetont, hanem újabb 7 zseton ellenében még egy dobást kér. A játékvezető ekkor újra feldobja a kockát. A két dobás eredményének ismeretében annyi zsetont ad át a játékosnak, amennyi az első és a második dobás eredményének szorzata. Ezzel a játék véget ér.

Zsófi úgy dönt, hogy ha 3-nál kisebb az első dobás eredménye, akkor abbahagyja, különben pedig folytatja a játékot.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Zsófi tovább játszik?

b) Zsófi játékának megkezdése előtt számítsuk ki, mekkora valószínűséggel ad majd neki a játékvezető pontosan 12 zsetont!

Barnabás úgy dönt, hogy mindenképpen két dobást kér majd. Áttekinti a két dobás utáni lehetséges egyenlegeket: a neki járó és az általa „befizetett” zsetonok számának különbségét.

c) Töltsd ki a táblázatot a füzetedben a két dobás utáni egyenlegekkel!

		második dobás eredménye					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
első dobás eredménye	**1**	−13					
	2						
	3						
	4						10
	5						
	6						

d) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Barnabás egy (két dobásból álló) játszmában nyer?

(A 2008. májusi középszintű érettségi 18. feladata.)

10. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$\lg\sqrt{3x-2} + \lg\sqrt{4x-7} = \lg 2$

(A 2006. májusi angol nyelvű középszintű érettségi 13. feladata.)

Számítógépes megoldások, segédprogramok használata

A programok telepítése előtt győződjünk meg a használati jogosultságról!

1. Ábrázoljuk a *GeoGebra* program segítségével a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto a\sin(bx)+c$ függvényeket $(ab \neq 0)$, illetve az $x \mapsto a\sin(x+b)+c$ függvényeket!

Segítség

– Hozzunk létre egy-egy *csúszkát* *a*, *b*, illetve *c* névvel, állítsuk a lehetséges értékeiket a vizsgálni kívánt eseteknek megfelelően!

– Definiáljuk a *Parancssorba* gépeléssel az $f(x)=a\sin(bx)+c$ képlettel az f függvényt [vagy az $y=a\sin(bx)+c$ képlettel egy görbét, amelyik az *f* függvény grafikonja]! Ekkor a program a csúszkán beállított aktuális értékeknek megfelelően megrajzolja a szinuszfüggvény transzformáltját, ha az *a* és a *b* csúszka értéke nem 0.

– Változtassuk a csúszkák értékét, és figyeljük, hogyan változik a függvény grafikonja (a függvény maximuma, minimuma, periódusa)!

Kiegészítés

A *GeoGebra* program más függvények grafikonjának megjelenítésére is alkalmas (például exponenciális és logaritmusfüggvények). Ábrázolhatók adott intervallumon értelmezett függvények vagy intervallumonként más-más hozzárendelési szabályú függvények is.

2. Ábrázoljuk a függvényt, vizsgáljuk a zérushelyét, szélsőértékét (és monotonitását) a *Graph* program segítségével! (Ingyenes matematikai szoftver, letölthető a *www.padowan.dk* oldalról.) A program többek között magyar nyelvű menüvel is futtatható, a kívánt nyelvi környezet a *Szerkesztés* → *Beállítások* (angol nyelvű környezetben az *Edit* → *Options*) menüpontban választható ki.

Segítség

– A programban a *Függvény* → *Függvény beszúrása* menüpontban adjuk meg a függvény hozzárendelési szabályát és a függvény értelmezési tartományát, ügyelve a szintaxisra (például tizedespontot kell használnunk, a négyzetgyökfüggvény neve *sqrt*(), az abszolútérték-függvény neve *abs*(), a tangensfüggvény neve *tan*(), a hatványkitevőt az AltGr+3 billentyűkombináció lenyomását követően lehet beírni, például így: *x*^5)! Állítsuk be a grafikon színét, vonalvastagságát!

– Jelöljük meg a vizsgálni kívánt függvényt, és indítsuk el a *Számítások* menüpontban a *Számítás*-t! Ekkor megjelenik egy segédtáblázat (jellemzően a képernyő bal alsó részén).

– A segédtáblázatban az *Illesztés* legördülő menüjében kiválaszthatjuk, hogy milyen vizsgálatot szeretnénk. Például a zérushely kereséséhez az *„x tengelyhez”* sort kell választani. Ezután a kiválasztott függvény grafikonján egérrel kattintva a zérushely közelében a program azonnal kiírja a segédtáblázatban a zérushelyet (és a „zérushelyhez” tartozó helyettesítési értéket, továbbá az adott helyen az első és második derivált értékét is, ha ezek léteznek).

3. Egyenlet, egyenletrendszer és egyenlőtlenség (grafikus) megoldására akár a *Graph*, akár a *GeoGebra* program is használható.

Segítség

Egyismeretlenes egyenlet, egyenlőtlenség megoldása:

– Ábrázoljuk a kiválasztott program segítségével az egyenlet bal, illetve jobb oldalán álló kifejezéssel definiált függvényeket (a megfelelő értelmezési tartományon)!

– Ha az egyenlet egyik oldalán a 0 áll, akkor olvassuk le az ábrázolt függvény zérushelyét; ha nem, akkor az ábrázolt két függvény metszéspontjának (metszéspontjainak) első koordinátája adja az egyenlet megoldását.

– Az egyenlet megoldásának ismeretében az egyenlőtlenség megoldása értelemszerűen adódik.

Kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása a *Graph* programban akkor lehetséges, ha mindkét egyenlet egy-egy függvény grafikonjának egyenlete. A *GeoGebra* program alkalmas más görbék ábrázolására is, tehát akkor is alkalmazható, ha az egyenletrendszer egyenletei nem függvénygrafikonok egyenletei.

Az egyenletrendszer megoldásának lépései:
– Ábrázoljuk a program segítségével a két egyenletnek megfelelő két görbét!
– A két görbe egy közös pontjának két koordinátája adja meg az egyenletrendszer egy megoldását; több közös pont esetén természetesen több megoldása van az egyenletrendszernek.

4. Koordinátageometria-feladatok megoldása a *GeoGebra* programmal.
A *GeoGebra* program igen sokrétűen használható tanulói kísérletezésre, ismeretszerzésre, feladatmegoldásra, a megoldások ellenőrzésére is. Az adatok dinamikus változtatásával *(csúszkákkal)* általános összefüggések szemléltethetők, illetve ilyenek fedezhetők fel, sőt animációk is készíthetők.

Segítség
– Az $A(2; 5)$ pontot így adjuk meg a *Parancssorba* gépeléssel: $A = (2, 5)$. Figyelni kell arra, hogy a program tizedespontot, pontosvessző helyett pedig egyszerű vesszőt használ. Tehát a $B(3{,}8; 2{,}4)$ pontot így kell megadni: $B = (3.8, 2.4)$.
– Egy kétismeretlenes egyenlet *Parancssorba* történő beírása után a képernyőn az egyenletnek megfelelő ponthalmaz lesz látható (például egy egyenes vagy egy kör). A $2x + y - 3 = 0$ egyenlet beírása után egy egyenes, az $x\hat{}2 + y\hat{}2 = 4x$ egyenlet beírása után egy kör jelenik meg (ne feledjük, hogy a hatványkitevő begépelése az AltGr+3 billentyűkombináció lenyomását követően lehetséges!). *Csúszkák* használatával egyszerre sok egyenest vagy sok kört is könnyen megadhatunk.
– A program ábrázolja a kétismeretlenes egyenlőtlenségekhez tartozó ponthalmazokat is (félsík, körlap stb.). Például az $x\hat{}2 + y\hat{}2 + 6y < 0$ begépelése után egy nyílt körlap jelenik meg.
– Két ponthalmaz metszéspontjainak megjelenítéséhez először válasszuk az *„Új pont”* legördülő menüből a *„Két alakzat metszéspontja”* parancsot! Ezután az egérrel kattintsunk először az egyik, majd a másik alakzatra! Megjelennek a közös pontok (ha ezek száma véges). A metszéspontok koordinátái – beállítástól függően – vagy megjelennek a képernyőn, vagy az *Algebra ablakban* tekinthetők meg (*Ctrl+Shift+A* vagy *Nézet menü* → *Algebra ablak*).

Tárgymutató

NÉHÁNY FELADAT VÉGEREDMÉNYE

1. lecke: 1. a) 6 és 65,6°; 7 és 69°; 7,9 és 71,6°; 8,3 és 65°; 9,2 és 67,6°. **b)** J6. **2. a)** (4; 3). **b)** (−4; 3). **3. a)** 10 egység. **b)** 10 egység. **c)** 12,65 egység. **d)** 12,65 egység. **4.** 53,13°; 126,87°; 71,57°; 251,57°.
2. lecke: 1. 88 m. **2. a)** 67,1°; 22,9°és 90°. **b)** 67,1° és 112,9°. **c)** 5 cm. **d)** 12,6 cm^2. **3. a)** 500 m; 53,1°. **b)** 138 m. **c)** 223 m. **d)** 139 m.
3. lecke: 1. a) igaz. **b)** igaz. **c)** igaz. **2.** 19 km, 12 m, 17 cm, 90°, 339 cm^2. **3.** Nem. Tompaszög is lehet: 148,6°. **4. a)** 1115 mm^2. **b)** 558 mm^2.
4. lecke: 1. 67,3 m. **2.** $d = 157$ m; $e = 97$ m; $BP = 51$ m; $PQ = 70$ m; $QC = 79$ m.
5. lecke: 1. 12 m. **2. a)** 264 m és 320 m. **b)** 252 m. **3. a)** 1 db van; 32°és 103°. **b)** 1 db van; 90°és 60°. **c)** nincs. **d)** 2 db van; egyik 39°és 111°; másik 141°és 9°.
6. lecke: 1. b) 262 m. **c)** 50 m. **2.** 14°. **3.** 14 m.
7. lecke: 2. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ és 0,5. **b)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ és 0,5. **3. a)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ vagy $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **b)** 0,678 vagy −0,678 (mert $\alpha = 47{,}3°$ vagy $\alpha = 132{,}7°$). **4. a)** igaz. **b)** igaz. **c)** igaz.
8. lecke: 2. a) 180° vagy −180°. **b)** 270° vagy −90°. **c)** 45° vagy −315°. **d)** 225° vagy −135°. **4. a)** 1. **c)** −45°; 135°; 225°.
9. lecke: 1. a) 63,9 mm. **b)** 119 mm. **2. a)** 78,5°. **b)** 90°. **c)** 127,6°. **3.** 13,5 km.
11. lecke: 1. a) 106°. **b)** 34 cm^2. **c)** 15,5 cm. **d)** 37,2 cm. **e)** 65 cm^2, illetve 156 cm^2. **f)** 31 cm^2, illetve 190 cm^2. **2.** 29 cm^2. **3. a)** 141°. **b)** 824 cm^2. **c)** 214 dm^3. **d)** 29%.
12. lecke: 1. a) 10,5 dm^2. **b)** 14,6 dm^2. **2. a)** 47,6 mm és 18°. **b)** 126°. **c)** 65,5 mm és 18°. **d)** 108°. **e)** 76,9 mm és 18°. **f)** 90°. **g)** 80,9 mm és 18°. **h)** 76,9 mm; 65,5 mm és 47,6 mm. **i)** 8 db háromszög: 2 derékszögű és 6 tompaszögű.
13. lecke: 1. 8 g. **2. a)** 34,5 cm. **b)** 40,5 cm. **c)** 63 cm, illetve 66 cm. **d)** 1 : 280. **3. a)** 8. **b)** 9,1 cm. **c)** 4,4 cm. **d)** 125 cm^2.
14. lecke: 1. a) 89 m. **b)** 43°; 57°; 123° és 137°. **c)** 70 m és 223 m. **2. a)** 89 m. **b)** 165 m és 128 m. **c)** 43°; 123°; 57° és 137°. **3. a)** 2,75 km. **b)** 78°. **c)** 3,1 km. **d)** 283.
16. lecke: 1. a) IV. **b)** pozitív. **c)** 55°. **d)** 0,574. **e)** negatív. **f)** 55°. **g)** −0,819.
17. lecke: 1. $M(0{,}906; 0{,}423)$; $V(-0{,}423; 0{,}906)$; $K(-0{,}906; -0{,}423)$; D(0,423; −0,906).
2. a) $\beta = 123° + k \cdot 360°$. **b)** $\beta = 57° + k \cdot 360°$.
c) $\beta = 237° + k \cdot 360°$ ($k \in \mathbf{Z}$).
18. lecke: 1. 12 $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$; −7,8 $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$; 4,9 $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$. **2.** 0 $\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$; 36,3 $\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$; −43,8 $\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$; −16 $\frac{1}{\text{s}^2}$. **4.** 1.

19. lecke: 3. $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]; \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]; \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]; \dots$
5. egyenlő. **7. a)** $x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ vagy $x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$.
b) $x = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ vagy $x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi$; ($k \in \mathbf{Z}$).
20. lecke: 2. a) −0,5. **b)** II. és III. síknegyed. **c)** $\frac{2\pi}{3}$ és $\frac{4\pi}{3}$.
d) $x_1 = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, $x_2 = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. **3. a)** ellentettek. **b)** ellentettek. **4.** ellentettek.
21. lecke: 1. a) $x \mapsto \sin x - 2{,}5$. **b)** $x \mapsto 0{,}5 \cdot \cos x$.
3. a) $x \mapsto 2\sin x - 1$. **b)** $x \mapsto 3\cos x + 3$. **4. a)** $x \mapsto -\sin x + 1$.
b) $x \mapsto 2\cos x - 1$. **5. a)** $x = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$; ($k \in \mathbf{Z}$).
b) $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ vagy $x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$; ($k \in \mathbf{Z}$).
22. lecke: 5. $f: x \mapsto 3{,}5 \cdot \sin \frac{2}{3}x$.
23. lecke: 4. b) $47{,}9° + k \cdot 360°$ és $132{,}1° + k \cdot 360°$; $k \in \mathbf{Z}$.
c) 0,6704, illetve −0,6704; 1,1067, illetve −1,1067.
24. lecke: 2. a) $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$, $k \in \mathbf{Z}$. **b)** $x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi$, $k \in \mathbf{Z}$. **c)** $x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$, $k \in \mathbf{Z}$. **3. b)** $0, \pi, 2\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}$.
25. lecke: 1. a) $x_1 = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, $x_2 = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi$; $k \in \mathbf{Z}$.
b) $y_1 = \frac{5\pi}{12} + k \cdot \pi$, $y_2 = \frac{7\pi}{2} + k \cdot \pi$; $k \in \mathbf{Z}$.
2. a) $x = -\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$; $k \in \mathbf{Z}$. **b)** $x = -\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$; $k \in \mathbf{Z}$.
3. a) $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$, $x_2 = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi$; $k \in \mathbf{Z}$.
b) $x_1 = \frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi$; $k \in \mathbf{Z}$. **4. a)** $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $k \in \mathbf{Z}$.
b) $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$, $x_2 = 1{,}25 + k \cdot \pi$; $k \in \mathbf{Z}$.
5. a) $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, $x_2 = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$; $k \in \mathbf{Z}$.
b) $x = k \cdot 2\pi$; $k \in \mathbf{Z}$.
26. lecke: (48) 3. a) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **b)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ vagy $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
4. a) ≈ 161 373 m^3. **b)** ≈ 23,4 m. **c)** ≈ 27,6 m.
5. a) 110,8°; 69,2°. **b)** 6,40 dm; 4,55 dm. **c)** 26,7°; 42,5°. **d)** 1. **6. a)** ≈ 34 mm. **b)** 68°; 112°. **c)** 56 mm. **d)** 1064 mm^2. **7. a)** ≈ 660 m^2. **b)** ≈ 33 m^3. **c)** ≈ 90°. **8. a)** 9 cm. **b)** ≈ 10,3 cm. **c)** ≈ 20,6 cm. **d)** ≈ 76°; 104°. **e)** ≈ 200 cm^2; ≈ 1850 cm^2. **10.** *f* és C), *g* és A), *h* és D), *k* és B). **11. a)** $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. **b)** $\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
28. lecke: 1. egyszerű: **c)** és **e)**. **2.** nincs megoldás: **a)** és **c)**. **3.** nincs megoldás: **c)** és **d)**. **4. b)** 9. **5.** 8! **6. a)** nem. **b)** $9 \cdot 10^5$. **c)** 10^6. **d)** 26^2. **e)** igen.
29. lecke: 1. a) 840. **b)** 2401. **2.** 1024. **3. a)** 512. **b)** 39 366. **c)** $9 \cdot 10^9$; $1{,}8 \cdot 10^9$. **4. a)** 165 765 600. **b)** 26^6.

c) $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \approx 1{,}47 \cdot 10^{10}$, illetve 52^6. **5. a)** 3^{14}. **b)** 3^8.

30. lecke: 1. a) 10! **b)** 9!. **c)** 2 903 040. **d)** 564 480. **2. a)** 12!. **b)** $2 \cdot 10!$. **c)** $3! \cdot 9!$. **3.** 36. **4. a)** 10! **b)** 1. **c)** $9! \cdot 9!$. **d)** 9! **e)** mindegyik.

31. lecke: 1. a) 10. **b)** 20. **2. a)** 56. **b)** 336. **3. a)** 19 csúcs és 16 él. **b)** 11; 4; 3; 1. **4. a)** 504. **b)** 84. **5. a)** 4005. **b)** 8010. **c)** 8100. **d)** 4095.

32. lecke: 1. nem. **2. a)** 35. **b)** 35. **3. a)** 1; 7; 21; 35; 35; 21; 7; 1. **b)** igaz. **4. a)** 4960. **b)** 406. **5. a)** 70. **b)** 35. **c)** 70.

33. lecke: 1. 32. **2. a)** 16; 8; 4; 2; 1. **b)** 32. **3. a)** ugyanannyi. **b)** kevesebbet: 120-at. **4. a)** 55; 165; 330; 330; 165; 55. **5. a)** 1716. **b)** 560.

34. lecke: 1. 0,000 000 123. **2. a)** 0,000 01. **b)** 0,000 812. **c)** 0,000 029. **d)** 0,0224. **3.** mindkettő. **4. a)** 630 630. **b)** 15! **c)** 126 126. **6. a)** 270 725. **b)** 0,000 0037. **c)** 0,999 9963. **d)** 0,719.

Ráadás lecke: Pármunka: 1 pár: 42,3%. **2 pár:** 4,75%. **Drill:** 2,11%. **Sor:** 0,392%. **Flush:** 0,197%. **Full:** 0,144%. **Póker:** 0,0240%. **Színsor:** 0,00139%. **Royal flush:** 0,000154%.

35. lecke: 2. $\frac{1}{8}$. **3.** $\frac{3}{8}$. **4.** nincs; $\frac{3}{8}$ a valószínűsége.

36. lecke. 2. b) 36. **c)** $\frac{1}{36}$. **d)** 1; 2; 3; 4; 5; 6; 5; 4; 3; 2; 1. **e)** $\frac{1}{36}$. **f)** $\frac{6}{36}$. **g)** $\frac{5}{36}$. **h)** $\frac{6}{36}$. **3. a)** $\frac{6}{36}$. **b)** $\frac{2}{36}$. **c)** $\frac{5}{36}$.

37. lecke: 1. a) 20. **b)** $\frac{1}{5}$. **c)** $\frac{4}{5}$. **d)** $\frac{12}{20}$. **e)** $\frac{8}{20}$. **f)** $\frac{2}{20}$. **2. a)** 25. **b)** $\frac{1}{5}$. **c)** $\frac{4}{5}$. **d)** $\frac{16}{25}$. **e)** $\frac{9}{25}$. **f)** $\frac{2}{25}$.

38. lecke: 1. a) 0,611. **b)** 0,096. **c)** 0,904. **d)** 0,808. **2. a)** $\approx 0{,}197$. **b)** $\approx 0{,}931$. **c)** $\approx 0{,}803$.

39. lecke: 1. a) 7776. **b)** 512. **c)** $\approx 0{,}066$. **d)** 0,329. **e)** $\approx 0{,}033$. **f)** $\approx 0{,}329$. **2. a)** 32. **b)** $\approx 0{,}002$; $\approx 0{,}028$; $\approx 0{,}132$; $\approx 0{,}309$; $\approx 0{,}360$; $\approx 0{,}168$.

40. lecke: I/1. 504. **I/2. a)** $\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$. **b)** annak, hogy szerzünk pontot. A valószínűségek $\frac{16}{36}$, illetve $\frac{20}{36}$. **II/1. a)** $\approx 10^{-7}$. **b)** $\approx 0{,}00067$. **c)** $\approx 0{,}246$. **d)** 1. **II/2. a)** $\approx 10^{-7}$. **b)** $\approx 0{,}001$. **c)** $\approx 0{,}233$. **d)** nem különbözik. **III/1. a)** 3 628 800. **b)** 1024. **c)** $\approx 0{,}001$. **d)** $\approx 0{,}246$. **e)** $\approx 0{,}055$. **III/2. a)** 84. **b)** $\approx 0{,}405$. **c)** 372. **d)** 6.

41. lecke: 1. a) 680. **b)** 4080. **2. a)** $\frac{1}{2}$. **b)** $\frac{5}{16}$. **3. a)** $\approx 0{,}083$. **b)** $\approx 0{,}042$. **c)** $\approx 0{,}917$. **4. a)** $\approx 0{,}125$. **b)** $\approx 0{,}042$. **c)** $\approx 0{,}875$. **5. a)** 12. **b)** 220. **c)** 792. **d)** 792. **e)** 220. **f)** 12. **g)** 4096. **6. a)** 80 730. **b)** 77 727. **c)** 49 413.

42. lecke: 1. a) 124 770 Ft-tal nőtt. **b)** 706 055 Ft. **2. a)** 1,338-szeresére. **b)** 34%. **3. a)** 4,14%. **b)** 7,18%. **c)** 11,61%. **4. a)** $1{,}06^5$; $1{,}2^3$; 7^2. **b)** 7^8; 2^9. **5. a)** x^8; y^5; $(a \cdot b)^3$. **b)** a^3; c^8; x^{22}.

43. lecke: 1. a) $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{18}$. **b)** 2; 8; 25. **2. a)** 197 ezer. **b)** 30. **3. a)** 1,7 millió Ft-ot. **b)** 0,8 millió Ft-tal. **c)** 5,55 millió Ft. **4. a)** nagyobb: $1{,}89^5$ és $0{,}99^{-3}$. **b)** nagyobb: $\left(\frac{2}{5}\right)^{-6}$ és $\frac{1{,}2}{0{,}8^9}$. **5. a)** eredetileg 56,7 liter; az eljárás végén 37,8 liter. **b)** $56{,}7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{12} \approx 0{,}44$ (liter).

44. lecke: 1. a) 10; 10; 100; 10. **b)** 1; 5; 2; 5; 0,1; 1,5; 0,5. **2. a)** 2,15; 3,91; 4,93; 9,73; 10; 21,54. **b)** 1,78; 2,78; 3,3; 5,5; 5,62; 10. **3.** 216 cm^2. **4. a)** 3 m. **b)** 113 m^2. **5.** $\approx$ 8,3%-os.

45. lecke: 1. 4; 2; 10; 9; 3. **2. a)** 2; 0,2; 0,2; 2; 0,5. **b)** 0,1; 0,2; 0,9; 0,1; 1,1. **3. a)** *B*. **b)** $8k^2$; $8k^3$; $8k^4$; $8k^5$; $8k^6$; $8k^7$. **c)** 1,308. **d)** 8; 8,3; 8,6; 8,9; 9,3; 9,6; 10; 10,4. **4. a)** $\sqrt[12]{2} \approx 1{,}059$. **b)** $\sqrt[12]{2^7} \approx 1{,}498$. **5.** 49; 121; 17; 23; 8.

46. lecke: 1. a) 125. **b)** 512. **c)** 27. **d)** 9. **e)** 32. **f)** 625. **2. a)** 10^2; 5^4; 2^2; 4^1. **b)** 4^2; 5^1; 5^0; 3^3. **3.** $\sqrt[4]{6}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{343}$. **4.** 81; 27; 36; 5. **5. a)** $10^{\frac{5}{2}}$. **b)** $2^{\frac{19}{5}}$. **c)** $3^{\frac{2}{3}}$.

47. lecke: 1. d) 2 és 3; 0 és 1; 2 és 3; 1 és 2.

48. lecke: 1. a) 4. **b)** 0,25. **c)** 16. **d)** 2. **2. a)** 6,2 és 1,15. **b)** 6,2 és $\approx 0{,}756$. **c)** 10^{23} és $\frac{1}{16}$. **d)** $6 \cdot 10^{23}$ és 8. **e)** 3,8 és 1,25. **f)** 2,1 és $\approx 0{,}145$. **3. a)** $N(t) = 120 \cdot 10^6 \cdot 1{,}5^t$. **b)** $4 \cdot 10^8$, illetve $1{,}5 \cdot 10^8$. **c)** $3{,}6 \cdot 10^7$. **4.** *B*; *C*.

49. lecke: 1. a) 27%. **b)** 3,72 óra. **c)** 28 óra. **d)** 11,2 óra; 14,9 óra. **2.** 13,5 év után. **3. a)** 1 óra. **b)** 3 óra. **c)** 5 óra. **4.** 22 920 év.

50. lecke: 1. a) 5. **b)** -4. **c)** $\frac{1}{3}$. **d)** 8. **e)** $\frac{2}{7}$. **f)** $-\frac{1}{2}$. **2. a)** 169. **b)** 7; 3. **c)** 16; 4. **d)** 3; 8. **e)** 4; 0,25; -1. **f)** 625; 5; 4. **3. a)** 0; 1; 2; 3; 4. **b)** -1; -2; -3; -4. **4. a)** 5. **b)** 125. **c)** 1. **5.** nem, igen, nem. **6.** 5; 8; 0,6; 7. **7. a)** 4,5. **b)** -6. **c)** 0.

51. lecke: 1. a) $\approx 2{,}55$; 2; $\approx 4{,}55$; $\approx 0{,}55$. **b)** $\approx 3{,}79$; $\approx 2{,}79$; $\approx 1{,}79$; $\approx 0{,}79$; $\approx -0{,}21$; $\approx -1{,}21$. **2.** $\approx 2{,}32$; $\approx -32{,}99$; $\approx 3{,}66$; $\approx 2{,}02$. **3. a)** -2; 0,5; -1; -2. **b)** -3; 0; 3; 0. **4. a)** $t = \log_{0,85} 0{,}5$. **b)** $t = \frac{\lg 0{,}5}{\lg 0{,}85}$. **c)** 4,265. **5. a)** $\approx 1{,}3979$. **b)** $\approx -1{,}2239$. **c)** $\approx -0{,}5810$. **d)** $\approx -0{,}1$.

52. lecke: 1. a) 0,75. **b)** $-4{,}5$. **c)** 50. **2. a)** $\approx$ 5,6%-kal. **b)** rendre ≈ 6840; $\approx 13\,150$; $\approx 25\,280$. **c)** 1990. aug.–szept. **3. a)** $\approx 0{,}9977$; 0,23%. **b)** 2056-ban.

53. lecke: 1. a) 1. **b)** 2. **c)** 2. **d)** -1. **2. a)** 16. **b)** $\frac{64}{343}$. **c)** 144. **d)** 4. **3. a)** 3. **b)** 0,5. **c)** 1. **d)** -1. **4. a)** $\frac{2}{3}$. **b)** 18. **c)** 49; 4. **5.** 3.

54. lecke: 1. a) $\approx 3{,}7$. **b)** 10-szer. **c)** $10^{-4}\ \frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{dm}^3}$. **d)** 120 dB. **2. a)** -2; -1; 0; 1; $\approx 1{,}6$; 2; 3; 3,3; 4.

55. lecke: 1. a) $2 \leq x$. **b)** $x < 0$. **2. a)** 30. napon. **b)** 63; 68. **3. a)** $]-3; +\infty[$. **b)** $[0; \log_{1,5} 10]$. **4.** legfeljebb 63.

56. lecke: 1. a) $x \geq 2^{100}$. **b)** $0{,}1 < x < 10$. **2. a)** 8 jegyű. **b)** 105 jegyű. **3. a)** $\approx 2343\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. **b)** legfeljebb 29,6%.

57. lecke: 1. a) 2. **b)** +3; –3. **2. a)** $-0{,}5$. **b)** 2. **3. a)** -1. **b)** -2. **4. a)** $\approx 1{,}8849$. **b)** $\approx 34{,}8289$. **Emelt szint: a)** 1. **b)** 0; 4. **c)** 0.

58. lecke: 1. a) $\log_2 \frac{5^3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt[3]{6^2}}$. **b)** $\log_4 24$. **c)** $\lg \frac{a^2 \cdot b^3}{\sqrt{c}}$. **d)** $\log_2 (5\sqrt{10})$. **2. a)** -8. **b)** -1. **c)** -8. **d)** -10. **3. a)** $0 < x$.

FI_503011101-1_Matematika 11 TK_Beliv.indb 247 2018.04.16. 21:13:45

b) $3 < x$. **c)** $x \neq 3$. **4. a)** nincs megoldása. **b)** 259. **c)** 259 és -253. **5. a)** 8. **b)** 8. **c)** $\left]\frac{4}{3}; +\infty\right[$. **d)** nincs megoldása.

59. lecke: 1. a) 1,5. **b)** 400. **2. a)** 6,5. **b)** 0,5. **3. a)** $x > 1$; $x = 126$. **b)** $x > 0{,}2$; $x_1 = 1$ $x_2 = 2$. **4. a)** 89 240 Pa; 55 560 Pa; 33 560 Pa. **b)** 1,89 km. **c)** 5,55 km.

62. lecke: 1. a) **a** $(-2; 0)$; **b** $(0; 1)$; **c** $(-2; 1)$; **d** $(-4, -5)$; **e** $(4; 5)$; **f** $(2; -1)$. **b)** 2; 1; $\sqrt{5}$; $\sqrt{41}$; $\sqrt{41}$; $\sqrt{5}$. **c)** igen. **d)** nem. **e)** igen. **f)** $(2; 4)$. **2. a)** $(0; -1)$. **b)** $(0; -1)$. **c)** $(-1; 0)$. **d)** $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. **e)** $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **f)** $(\cos 3{,}9; \sin 3{,}9)$. **3. a)** $(1; 0)$, $(-1; 1)$; $(0; -1)$ és $(1; -1)$. **b)** $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$. **c)** $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

63. lecke: 1. a) $\mathbf{p}(1; 3)$; $\mathbf{q}(3; -1)$; $\mathbf{r}(-3; 1)$; $\mathbf{s}(3; -1)$. **b)** $\sqrt{10}$. **2. a)** $(4; 2)$ és $(4; 2)$. **b)** $2\sqrt{5}$. **3. a)** $(3; 0)$. **b)** $(1; -2)$. **4. a)** $(3; -3)$ és $(-3; 3)$. **b)** $(6; 3)$ és $(-6; -3)$.

64. lecke: 1. a) 10 J. **b)** -10 J. **c)** 0 J. **d)** 20 J. **2. a)** 60°. **b)** $\mathbf{ac} = -6{,}25$, $\mathbf{ad} = 0$, $\mathbf{ae} = 6{,}25$. **c)** $\mathbf{ba} = 5$, $\mathbf{bc} = -5$, $\mathbf{bd} = \pm 5\sqrt{3}$, $\mathbf{be} = 5$. **d)** $-0{,}978$. **3. a)** 60°. **b)** 143,13°.

65. lecke: 1. a) 1. **b)** 0. **c)** 0. **d)** -1. **e)** 1. **f)** 1. **g)** 1. **h)** -1. **2.** rendre: 2; 2; 4; 4; 4; 4; 2. **3.** 0. **4. a)** 150°. **b)** 90°. **c)** 180°. **d)** 60°.

66. lecke: 1. b) 60°. **c)** igaz. **d)** 2. **e)** 2. **f)** 30°. **g)** 3. **h)** 120°. **i)** -1. **j)** igen. **2.** 48. **3. a)** 3. **b)** 13. **c)** 2. **d)** -16. **4. a)** $\sqrt{18}$. **b)** $2\sqrt{18}$. **c)** -54.

67. lecke: 1. a) 2; $\sqrt{17}$; $\sqrt{40}$; $\approx 85{,}6°$. **b)** 13; $\sqrt{26}$; $\sqrt{13}$; 45°. **2. a)** $B(-3; 5)$ és $C(-7; 1)$. **b)** 71,6°. **3. a)** $(4; 3)$. **b)** $(-3; 4)$. **c)** 163,7° és 106,3°.

68. lecke: 1. a) $\approx 9{,}5$; $\approx 4{,}1$; $\approx 13{,}6$. **c)** $\approx 4{,}4°$. **d)** 5. **2. a)** 0; 0; -130; -78; 0; 0. **3. a)** $(27; 9)$. **b)** 25 (tehát rombusz). **c)** 0. **d)** 585.

69. lecke: 1. $\left(\frac{16}{3}; \frac{17}{3}\right)$. **2. a)** $F(8; 7)$, $G(12; 4)$. **b)** 5.

70. lecke: (59) 1. a) $(0; 1)$. **b)** $\left(\frac{13}{3}; \frac{16}{3}\right)$. **2. a)** $(-9; -13)$ vagy $(-3; -4)$. **3.** $(-3; 2)$. **4. a)** $(1{,}5; 3{,}5)$; $(-2; 1)$ és $(-2{,}5; 4{,}5)$. **b)** $(-1; 3)$. **c)** azonos.

71. lecke: I/1. a) $(2; 7)$, $(-5; 5)$. **b)** $\approx 7{,}28$, $\approx 8{,}06$. **c)** 9. **d)** $\approx 81{,}2°$; $\approx 98{,}8°$. **e)** $(5; -8)$, $(-2; -10)$.
I/2. a) $-0{,}75$. **b)** $\frac{1}{3}$. **I/3. a)** $\approx 16{,}5$; 17. **b)** $B(1; 2)$, $D(-4; 5)$.
II/1. a) $H_1(7; 2)$, $H_2(11; -1)$, $\overrightarrow{H_1H_2}(4; -3)$. **b)** $\overrightarrow{H_1D}\,(3; 4)$. **c)** $C(14; 3)$, $D(10; 6)$. **d)** 15; 5; $\approx 7{,}1$. **e)** -75. **f)** $\approx 53{,}1°$. **II/2. a)** $\approx 17{,}9$; 20. **b)** $(-1; -1{,}5)$, $(-5; 0{,}5)$, $(-7; -3{,}5)$. **II/3. a)** $E(3; 0)$, $F(3{,}5; 4)$, $G(-1{,}5; 6)$, $H(-2; 2)$.

72. lecke: 3. A; D és E.

73. lecke: 1. a) $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 4$. **b)** $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 16$. **c)** $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 0{,}25$. **d)** $x^2 + y^2 = 100$. **2. a)** $(3; 5)$, 36. **b)** $(-3; 5)$, 6. **c)** $(-3; -5)$, $\sqrt{6}$. **d)** $(-3; 0)$, 5. **3. a)** $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 169$. **b)** $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 34$. **c)** $(x+1)^2 + y^2 = 36$. **4. a)** D. **b)** C.

74. lecke: (64) 1. a) egyenes. **b)** pont. **c)** kör. **d)** kör. **2.** $(x+8)^2 + (y-17)^2 = 6{,}25$. **3. a)** $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 10$. **b)** $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 29$. **4. a)** kör. **b)** origó. **c)** üres halmaz. **d)** két párhuzamos egyenes.

75. lecke: 1. a) igen. $\sqrt{37{,}25}$, $\sqrt{38{,}25}$ és $\sqrt{47{,}25}$. **2. a)** csak az első egyenlethez. **3. a)** 37,25. **b)** 37,25-nél kisebb szám. **c)** 37,25-nél nagyobb szám. **4. a)** $(x-6)^2 + (y+0{,}5)^2 = 11{,}25$ és $(x-6)^2 + (y+0{,}5)^2 = 5{,}625$. **b)** $(4{,}5; 1{,}5)$ és $(7{,}5; -3{,}5)$. **5.** $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$. $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 16$. $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 16$. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 49$.

76. lecke: 1. a) 40 m. **b)** $(-24; 0)$; $(24; 0)$ és $(0; 8)$. **c)** 7,9 m. **3. a)** 5; $(x+5)^2 + (y+3)^2 = 25$. **b)** $(-1; -6)$ és $(-9; -6)$.

77. lecke: 1. a) igen. **b)** $(6{,}5; 5{,}5)$. **c)** $(10; 11)$. **d)** $3x - 5y = -25$. **e)** $5x + 3y = 83$. **f)** $5x + 3y = 15$. **2. b)** $3x + 8y = -63$. **c)** $8x - 3y = 51$. **d)** nem. **e)** igaz. **f)** igaz.

78. lecke: 3. a) 0,5. **b)** $6x - 7y = 3$. **5.** $5x + 6y = 43$.

79. lecke: 1. a) $3x - 4y = -19$. **b)** $3x - 4y = -20$. **c)** $3x - 4y = 17$. **3. a)** $(3; -4)$, $(4; 3)$. **b)** $(6; 3)$; $(1; -2)$. **c)** $(13; 50)$; $(50; -13)$. **4. a)** $5x - 3y = 0$. **b)** $x + y = -1$. **c)** $4x + 3y = -12$. **d)** $x - y = -4$.

80. lecke: 2. $(4; -5)$. **3.** $(4; 7)$. **4. a)** 50,2°. **b)** $y = \frac{6}{5}x$. **5. a)** $(2; -3)$. **b)** $2x - 3y = 12$. **c)** 3,33.

81. lecke: 1. a) $(-7; -2)$. **b)** $(5; -1)$. **c)** párhuzamosak. **d)** egy egyenes két egyenlete. **2. a)** $(1; 3)$ és $(-3; 1)$. **b)** $(2; -2)$ és $(-1; 1)$.

82. lecke: 2. a) $2x - y = 8$. **b)** $(4; 0)$.

83. lecke: 3. a) 3,6. **b)** $-22{,}5$. **4. a)** $y = 2$. **b)** $y = 2$. **5. a)** közös pont: $(1; -4)$.

84. lecke: 1. a) $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **b)** $x + y = 2$. **c)** $M(2; 0)$. **e)** $x - 3y = -3$; $2x - y = -1$; $K(0; 1)$. **g)** $x^2 + (y-1)^2 = 25$. **2. a)** $(-1; 6)$. **b)** $y = x$. **c)** $(1{,}5; 1{,}5)$. **d)** $(-5{,}5; -5{,}5)$.

85. lecke: 1. $x - 2y = -8$. **2. a)** $(3; 5)$; $r = 5$. **c)** $y = 0$; $3x + 4y = 54$; $x = -2$. **d)** $(18; 0)$; $(-2; 15)$; $(-2; 0)$. **e)** 15; 20; 25. **f)** 90°; 36,8°; 53,2°. **g)** $x - y = -2$; $2x + y = 11$; $x + 3y = 18$. **3. a)** $(x-6)^2 + (y+2)^2 = 6{,}25$. **b)** $4x - 3y = 17{,}5$.

86. lecke: 1. a) 10; 9; 90. **b)** 2; 9; $\sqrt{85}$; 9. **c)** 4; 10; $\sqrt{116}$; 20. **d)** 5; 8; $\sqrt{89}$; 20. **e)** 41. **f)** pontos. **2. a)** $(-10; -4)$; $\sqrt{116}$. **b)** $(-2; -9)$; $\sqrt{85}$. **c)** 55,67°. **d)** ≈ 41. **3. b)** 36. **c)** $6 + 3 + 4 = 13$. **d)** 23.

87. lecke: 1. b) 4,24. **c)** 5,37. **e)** 4,24 és 5,37. **2.** 6,93 km. **3. a)** $(-1{,}8; -0{,}4)$. **b)** $\approx 2{,}85$.

88. lecke: 1. a) $(-4; -2)$ és $(4; 2)$. **b)** $2x + y = 10$ és $2x + y = -10$. **c)** $(6; -2)$; $(2; 6)$; $(-6; 2)$ és $(-2; -6)$. **2. a)** $4x - y = -16$. **b)** $x + 4y = 13$. **3. a)** $y = 0$, $\sqrt{3}x - y = 0$; $\sqrt{3}x + y = 6\sqrt{3}$. **b)** $x = 3$; $\sqrt{3}x - 3y = 0$; $\sqrt{3}x + 3y = 6\sqrt{3}$.

89. lecke: 2. a) 2. **b)** $C(-1; 15)$ vagy $C(15; -9)$. **c)** $S\left(\frac{13}{3}; 7\right)$ vagy $S\left(\frac{29}{3}; -1\right)$. **d)** $(6; 4)$ és $(-5; 14)$ vagy $(11; -10)$; a hosszuk $\sqrt{52}$, $\sqrt{221}$. **e)** 76°; 28°. **3. a)** $(6; -8)$. **b)** 13. **c)** nem. **d)** $(-4{,}25; 0)$, $(16{,}25; 0)$. **4. a)** $(5; -12)$. **b)** $\frac{5}{12}$. **c)** 22,6°; 67,4°. **d)** $(-8{,}6; 0)$ és $\left(0; \frac{43}{12}\right)$. **5. e)** az egyenes érinti a kört.