OFI

Matematika

12

ÚJGENERÁCIÓS TANKÖNYV

Matematika

12.

Eszterházy Károly Egyetem
Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet

A tankönyv megfelel az 51/2012. (XII. 21.) EMMI-rendelet:
3. sz. melléklet: Kerettanterv a gimnáziumok 9–12. évfolyama számára 3.2.04 Matematika
6. sz. melléklet: Kerettanterv a szakközépiskolák 9–12. évfolyama számára 6.2.03 Matematika
megnevezésű kerettantervek előírásainak.

Tananyagfejlesztők: BARCZA ISTVÁN, BASA ISTVÁN, TAMÁSNÉ KOLLÁR MAGDOLNA, BÁLINT ZSUZSANNA, KELEMENNÉ KISS ILONA, GYERTYÁN ATTILA, HANKÓ LÁSZLÓNÉ

Alkotószerkesztő: TAMÁSNÉ KOLLÁR MAGDOLNA

Vezetőszerkesztő: TÓTHNÉ SZALONTAY ANNA

Tudományos-szakmai szakértő: DR. VANCSÓ ÖDÖN

Pedagógiai szakértő: OROSZ GYULA

Olvasószerkesztők: DARCSINÉ MOLNÁR EDINA, CZOTTER LÍVIA

Fedélterv: KORDA ÁGNES terve alapján készítette: OROSZ ADÉL

Látvány- és tipográfiai terv: GADOS LÁSZLÓ, OROSZ ADÉL

Fotók: Pixabay; WikimediaCommons; Márton Tünde; Kováts Borbála; Flickr; Wikipedia; Chauromano; Massimiliano Calamelli; MorgueFile; Jason Eppink; Tess Watson; RepliCarter; OFI

Illusztráció: LÉTAI MÁRTON

Szakábra: SZALÓKI DEZSŐ

A tankönyv szerkesztői ezúton is köszönetet mondanak mindazoknak a tudós és tanár szerzőknek, akik az elmúlt évtizedek során olyan módszertani kultúrát teremtettek, amely a kísérleti tankönyvek készítőinek is ösztönzést és példát adott. Ugyancsak köszönetet mondunk azoknak az íróknak, költőknek, képzőművészeknek, akiknek alkotásai tankönyveinket gazdagítják.

ISBN 978-963-436-106-0

Eszterházy Károly Egyetem • 3300 Eger, Eszterházy tér 1.
Tel.: (+36-1) 460-1873 • Fax: (+36-1) 460-1822 • Vevőszolgálat: vevoszolgalat@ofi.hu

A kiadásért felel: dr. Liptai Kálmán rektor
Raktári szám: FI-503011201/1
Műszakiiroda-vezető: Horváth Zoltán Ákos
Műszaki szerkesztő: Orosz Adél
Grafikai szerkesztők: Kováts Borbála, Márton Tünde
Nyomdai előkészítés: Gados Dániel, Gados László
Terjedelem: 27,81 (A/5) ív, tömeg: 545,09 gramm

A könyvben felhasználásra került a Matematika 12. Közel a mindennapokhoz című mű kézirata.
Szerzők: Dömel András, dr. Korányi Erzsébet és dr. Marosvári Péter. Alkotószerkesztő: Környei László.

1. kiadás, 2018

Az újgenerációs tankönyvek az Új Széchenyi Terv Társadalmi Megújulás Operatív Program 3.1.2-B/13-2013-0001 számú, „A Nemzeti alaptantervhez illeszkedő tankönyv, taneszköz és Nemzeti Köznevelési Portál fejlesztése" című projektje keretében készült. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértők:
Kónya István, Kempfner Zsófia

Engedélyszám: TKV/76-10/2018
2018. február 27-től 2023. augusztus 31-ig

Nyomta és kötötte az Alföldi Nyomda Zrt., Debrecen
Felelős vezető: György Géza vezérigazgató
A nyomdai megrendelés törzsszáma:

Előszó – a könyv témakörei

Kedves Végzős Olvasónk!

A középiskola utolsó éve áll előtted. Karnyújtásnyira tőled az érettségi. Végzősként, az érettségire készülve egyre szélesebb nézőpontból tekinthetsz a világra, a természetben előforduló folyamatokra és ezek matematikai modelljeire is. Ebben a tanévben már csak három új témakör kerül elő, majd ezt a rendszerező összefoglalás követi.
A leckék tagolása megegyezik az eddigiekkel. A következő típusú részekkel találkozhatsz:

BEVEZETŐ, mely általában egy gyakorlati problémán keresztül mutat rá az alkalmazások lehetőségére; KIDOLGOZOTT FELADAT, mely lépésről lépésre megmutatja a megoldás egy-egy útját; ELMÉLET, melynek keretében rendszerezzük a matematikai tartalmakat, fogalmakat és tételeket;

FELADATOK, melyek megoldásával elsajátíthatod a szükséges ismereteket;

CSOPORTMUNKA vagy PÁRMUNKA keretében az együttműködés, a párbeszéd, egymás ötleteinek megbeszélése is közelebb vihet a megoldáshoz; HÁZI FELADAT az otthoni gyakorláshoz. RÁADÁS: itt matematikai érdekességeket találsz, és megmutatjuk a tananyag néhány érdekes továbbgondolását és alkalmazását.

EMELT SZINT : ezek a részek túlmutatnak a középszintű érettségi követelményeken. Az emelt szintű érettségi követelményeihez tartozó fogalmak, feladattípusok, illetve szép, precíz bizonyítások találhatók ezekben a részekben.

A feladatokat igyekeztünk olyan színesen összeválogatni, hogy az élet sokféle területéhez és többféle tudományhoz kapcsolódjanak. Szeretnénk bemutatni, a matematika milyen módon válaszol a valós élet problémáira, s eközben hogyan épít és fedez fel egy olyan rendszert, amely önmagában is érdekes, nyitottságra, csodálkozásra és kérdésekre indít.
A tankönyv második része a rendszerező összefoglalás. Öt témakörbe rendezve találod meg a középiskolás matematikai ismereteket. A témakör elején egy összefoglaló táblázatba rendeztük az anyagrészhez tartozó legfontosabb definíciókat és tételeket, majd a következő leckékben feladatokon keresztül ismételjük át a középiskolás tananyagot.

A tankönyv végén néhány középszintű próbaérettségi feladatsort találsz.
Ha tartós tankönyved van, amit vissza kell adnod az iskolának a tanév végén, akkor ne írj a tankönyvbe, dolgozz a füzetedben! (Táblázatok esetén segítségedre lehet egy öntapadós jegyzettömb: egy öntapadós lapot tegyél a táblázat mellé, s arra írhatod az eredményeket.)

Kívánunk Neked erre az évre jó munkát, kitartást és sikeres érettségit!

1. TÉRGEOMETRIA

- **Testek térfogata és felszíne**
  - **Dinnyék, sajtok, fagylaltok**
  - **Építkezés és darabolás**
  - **Gúlák és kúpok, egészben és csonkán**
- **Hajlásszögek, síkmetszetek**
  - **Lejtők és háztetők**
  - **Forgassunk meg egy háromszöget!**

2. SOROZATOK

- **Számtani sorozatok**
  - **Nézőtér és tetőcserepek**
  - **A kis Gauss trükkje**
- **Mértani sorozatok**
  - **Kamatos kamat és amortizáció**
  - **Rajzolj bele még egyet!**
  - **Búzaszemek a sakktáblán**

3. STATISZTIKA

- **Adatsokaságok és jellemzőik**
  - **Átlagon felüli ismeretek**
  - **Táblázatok és diagramok**
  - **Osztályok nem csak tanulókból**
- **Szórás és átlagos abszolút eltérés**
  - **Nem mindegy, mennyire szóródnak**

Tartalom

1 Dinnyematek

BEVEZETŐ

A görögdinnye

A termés alakja igen változatos, a gömbtől a megnyúlt „hengeres” formáig változik. Egy-egy termés tömege 2–15 kg. A héj színe fehéres, világoszöld, középzöld, kékeszöld, feketészöld lehet. Felülete sima vagy enyhén barázdált, rajzolata lehet csíkozott, márványozott.
Jelentős mennyiségű cukrot tartalmaz. A kémiai elemek közül elsősorban kálium, kalcium, magnézium, nátrium, vas és foszfor található benne, továbbá többféle B-vitamint és C-vitamint is tartalmaz. Az ehető rész energiatartalma 100 gramm esetén 30 kilokalória, azaz kb. 130 kilojoule. (Forrás: Wikipédia)

KIDOLGOZOTT FELADAT

A görögdinnye 90-95%-a víz, ezért a dinnye átlagsűrűsége közel van a víz sűrűségéhez (erről meggyőződhetsz, ha egy kád vízbe teszel egy dinnyét: a dinnye úszni fog, de alig látszik ki a vízből).

a) Mekkora lehet egy 8 kg tömegű dinnye térfogata? Adj becslést!

b) Mekkora lehet egy 20 cm átmérőjű dinnye tömege, ha jó közelítéssel gömb alakú?

c) Körülbelül mekkora lehet egy 8 kg tömegű dinnye átmérője, ha gömb alakúnak gondoljuk?

Megoldás

Természetesen senki sem gondolhatja, hogy léteznek tökéletesen gömb alakú görögdinnyék. A feladat maga sem ezt állítja, hanem azt mondja, hogy a felvetett problémákban a görögdinnyét **gömbbel modellezzük**, a gömböt választottuk **matematikai modellnek**.

a) A dinnye térfogata közelítőleg annyi, mint 8 kg víz térfogata, vagyis 8 dm^3.

b) A 9. osztályos tankönyvben képletet adtunk meg a gömb térfogatának kiszámítására. Eszerint az r sugarú gömb térfogata a $V = \frac{4}{3} \cdot r^3\pi$ képlettel számolható ki.
Most a gömb sugara 10 cm, ezért a dinnye térfogata: $V = \frac{4}{3} \cdot 10^3 \cdot \pi\ \text{cm}^3 \approx 4189\ \text{cm}^3 \approx 4{,}2\ \text{dm}^3$. Ennek a dinnyének a tömege körülbelül 4,2 kg (hiszen 4,2 liter „víznek” a tömege 4,2 kg).

c) A 8 kg-os dinnye térfogata körülbelül 8 dm^3. Ha a gömb alakúnak feltételezett dinnye sugara r dm, akkor tehát $\frac{4}{3} \cdot r^3\pi = 8$. Az egyenlet rendezése után: $r^3 = \frac{6}{\pi} \approx 1{,}91$.
Kétféleképpen is jelöltük azt az r pozitív számot, amelynek 1,91 a harmadik hatványa: $r \approx \sqrt[3]{1{,}91}$, illetve $r \approx 1{,}91^{\frac{1}{3}}$.
Számológéppel azt kapjuk, hogy $r \approx 1{,}24$ (dm). A dinnye átmérője tehát körülbelül 2,5 dm, azaz 25 cm.

RÁADÁS

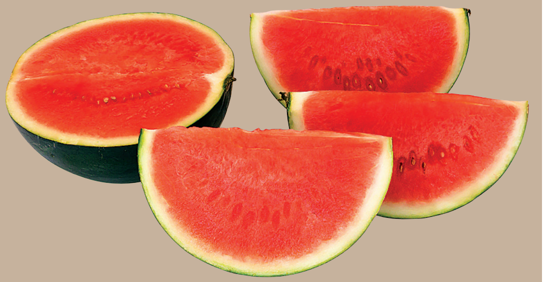
A gömb sok szempontból különleges test. Végtelen sok forgástengelye és végtelen sok szimmetriatengelye van, így a legtökéletesebb formának tűnik. Felszínét és térfogatát már az ókor legnagyobb matematikusa, Arkhimédész (Kr. e. 287–212) is meghatározta. *A gömbről és hengerről* című művében megállapította, hogy a gömb felszíne egyenlő a köré írt hengerpalást területével, a térfogata pedig a köré írható henger térfogatának kétharmad része.

FELADAT

1. A görögdinnye héja 1-2 cm vastagságú. Egy gömbölyű, körülbelül 24 cm átmérőjű dinnye esetében a teljes térfogatnak körülbelül hány százaléka az ehető belső rész térfogata? Töltsd ki a táblázatot!

	A belső rész sugara	A belső rész térfogata	A dinnye teljes térfogata	Hány százalék ehető?
1 cm vastag héj esetén				
2 cm vastag héj esetén				

2. Hajni egy 20 cm átmérőjű görögdinnye felét megette. Hány kilojoule (hány kilokalória) energiát vihetett be a szervezetébe ezzel? (A dinnyehéj vastagsága 1 cm és 2 cm közötti érték.)



3. Egy „hosszúkás” görögdinnye térfogatát jól közelíti a $V = \frac{4\pi}{3} \cdot ab^2$ képlet, ahol a és b a dinnye két „átmérőjének” a fele, és $a > b$ (lásd az ábrát).

a) Milyen alakú lehet a dinnye, ha $a = b$? Használható-e a képlet ebben az esetben?

b) Töltsd ki a táblázatot!

$2a$ (cm)	$2b$ (cm)	V (cm^3)	A dinnye tömege közelítőleg (kg)
30	26		
	22	6500	
34			12

HÁZI FELADAT

1. Nem hivatalos adatok szerint a 2012-es év legnehezebb dinnyéje az ormánsági Vajszlón termett, és 53 kg-ot nyomott. Körülbelül hány kg lehet a dinnye ehető része, ha a héját 2 cm vastagnak, sűrűségét a víz sűrűségével egyezőnek, az alakját pedig gömbnek vesszük?

2. Hajni kiment a piacra. Ott látott egy szép „hosszúkás” dinnyét, amely 32 cm hosszú, 24 cm széles volt. Megvette a negyedrészét.

a) Mennyit fizetett, ha 1 kg 120 Ft-ba került? (Használd fel a 3. feladatban megadott képletet!)

b) A testvéreivel együtt mindjárt meg is ették a dinnyét, Bence a felét, Csilla a harmadát, Hajni a többit. Melyikük hány kilokalória energiát fogyasztott el, ha a dinnye héja mindenütt körülbelül 1 cm vastag volt?

3. Két dinnye közelítőleg gömb alakú, az átmérőjük 36 cm. Az egyiknek 1 cm vastag a héja, a másiknak 2 cm. Hasonlítsd össze, hogy a dinnyék hány százaléka ehető! Mennyivel több ez a vékony héjú dinnye esetén?

2 A gömb szeletelése

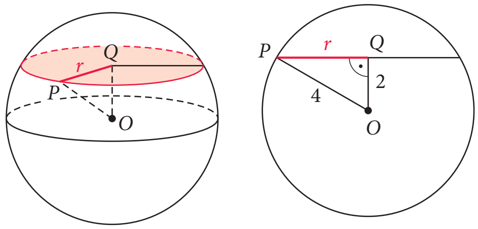
KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy kb. 8 cm átmérőjű narancsot késsel kettévágtunk. Nem lett egyforma a két rész, mert a gömb alakú narancsot a középpontjától körülbelül 2 cm-re vágtuk ketté. Így aztán a metszési felületek sem 4 cm sugarú „főkörök” lettek. Mekkora lett a metszetkör sugara?

Emlékezzünk!

1. Egy pont és egy sík távolsága a pontnak és a síkon lévő merőleges vetületének a távolsága.
2. Akkor mondjuk, hogy egy egyenes merőleges egy síkra, ha az merőleges a sík minden egyenesére.

A narancsot modellező gömb O középpontjának a metszési felületen lévő merőleges vetülete Q, a gömbfelület és a metszősík egy közös pontja P.

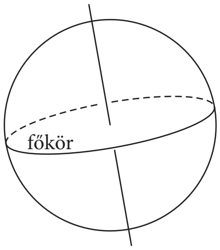


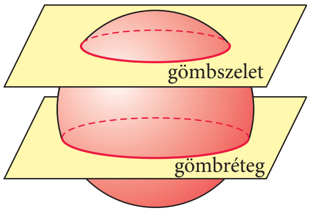
A rajzon lévő OQP derékszögű háromszögre alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt. Eszerint $r^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$. Tehát $r = \sqrt{12} \approx 3{,}5$ (cm).

ELMÉLET

Tétel. Bármely metszősík a gömböt egy körben, a gömbfelületet egy körvonalban metszi.

Ha a sík átmegy a gömb középpontján, akkor a keletkező kört a gömb **főkörének** nevezzük. A főkör sugara ugyanakkora, mint a gömb sugara. (Ha a síkmetszet nem főkör, akkor sugara kisebb a gömb sugaránál.)





Ha a gömböt **egy** síkkal elmetsszük, akkor a gömbfelület két részét *gömbsüvegnek*, a gömb két részét *gömbszeletnek* nevezzük. Ha **két párhuzamos** síkkal metszünk el egy gömböt, akkor a gömbfelület két *gömbsüvegre* és egy *gömbövre* bomlik, a gömb pedig két *gömbszeletre* és egy *gömbrétegre*.

FELADAT

1. Egy gömb alakú dinnyét „párhuzamos síkú vágásokkal” 5 azonos magasságú részre vágtunk szét, az egyes részek (2 gömbszelet és 3 gömbréteg) magassága 4 cm. Mekkora sugarú körök határolják az egyes részeket?

2. Egy gömböt a középpontjától 3 cm távolságra lévő síkkal elmetszve egy 4 cm sugarú metszetkört kapunk.

a) Mekkora a gömb sugara?

b) Mekkora sugarú köröket metsz ki az első metszősíkkal párhuzamos, tőle 1 cm-re lévő két sík a gömbből?

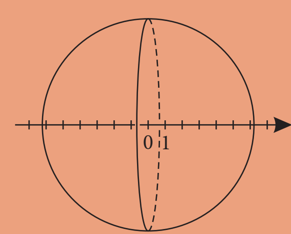
3. A Ráktérítő az Egyenlítővel párhuzamosan halad körbe a Földön, körülbelül az északi szélesség 23°26′22″ mentén. A Ráktérítő jelzi azt a legészakibb határvonalat, ahol a nyári napforduló napján a delelő nap pontosan a megfigyelő feje felett áll.

Mekkora sugarú kört alkot a Ráktérítő? (A Föld középpontját a Ráktérítő bármely pontjával összekötő szakasz az Egyenlítő síkjával 23°26′22″ nagyságú szöget zár be.)

HÁZI FELADAT

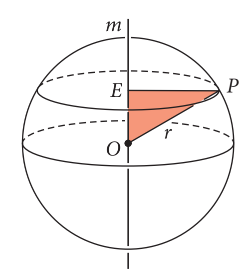
1. Egy 12,8 cm sugarú gömb egyik síkmetszetének az átmérője
a) 10,2 cm; **b)** 12,8 cm; **c)** 21,7 cm; **d)** 25,6 cm.
Mekkora távolságra van a metszősík a gömb középpontjától?

2. Egy 6,2 cm sugarú gömb egyik átmérőjére olyan számegyenest fektetünk, amelynek az egységei 1 cm-esek, és a 0 pontja a gömb középpontjában van.



Erre a számegyenesre az egész számokat jelző pontjain át merőleges síkokat állítunk.
a) Hány olyan sík keletkezik, amely metszi a gömböt?
b) Melyik síkmetszetnek mekkora a sugara? Készíts táblázatot!
c) Melyik síkmetszetnek mekkora a területe? Készíts táblázatot!
d) Ábrázold azt a függvényt, amelynek értelmezési tartománya a fenti számegyenesen fellépő egész számok halmaza, és amely az értelmezési tartomány elemeihez a megfelelő körök területét rendeli hozzá! Sorold fel ennek a függvénynek néhány tulajdonságát!

EMELT SZINT



Igazoljuk, hogy *a gömbnek minden síkmetszete kör!*

1. bizonyítás:
Messük el az O középpontú, r sugarú gömböt egy síkkal. Ez a sík végtelen sok pontban metszi a gömbfelületet. (Ezt a végtelen sok pontból álló halmazt nevezzük síkmetszetnek.)
Jelöljük m-mel azt az egyenest, amely illeszkedik a gömb középpontjára, és merőleges a metszősíkra. Ez az egyenes a síkot az E pontban metszi. A síkmetszet minden pontja r távolságra van a gömb O középpontjától.
Jelöljük P-vel a síkmetszet egy pontját. Az OEP háromszög derékszögű, mert az m egyenes a metszősík minden egyenesére merőleges.
A síkmetszet minden pontjához tartozik egy ilyen derékszögű háromszög, amelynek átfogója r, egyik befogója pedig az OE szakasz. Ezek a háromszögek mind egybevágók, mert 2-2 oldaluk és közülük a hosszabbikkal szemben fekvő szögük (a derékszög) is egyenlő. Az egybevágóság miatt a harmadik oldaluk is egyenlő, amely a síkmetszet tetszőleges pontjának az E ponttól való távolsága.
Tehát a síkmetszet mindegyik pontja ugyanakkora távolságra van E-től, ami azt jelenti, hogy a síkmetszet pontjai egy E középpontú körön vannak, és ennek a körnek minden pontja valóban a síkmetszetnek is pontja.

2. bizonyítás:
Állítsunk egy m merőleges egyenest a gömb középpontjából a metszősíkra és forgassuk meg e körül a gömböt és a síkot is. A metszősíknak, a merőlegessel alkotott E metszéspontja helyben marad, a metszősík más pontjai E középpontú köröket írnak le. Az m körüli forgatásnál a gömbfelület és a metszősík is önmagába megy át. Ezért a metszésvonal bármely kiválasztott pontját tekintve igaz az, hogy a forgatás során ez a kiválasztott pont a metszésvonalat írja le. Ebből következik, hogy a síkmetszet egy E középpontú kör.

3 A gömb felszíne

BEVEZETŐ

Hűtőgépek szagtalanítására, a nedvesség megkötésére gyakran használnak apró golyócskákat. Vajon miért apró golyókat, miért nem egyetlen nagyobb golyót használnak? Elsősorban azért, mert a nedvesség megkötésére használt golyócskák a felületükön kötik meg a vizet, tehát a megkötés annál hatékonyabb, minél nagyobb a megkötő felület. A sok kis golyó felülete pedig nagyobb, mint az ugyanakkora térfogatú egyetlen nagy golyó felülete. Nézzük, hogyan támasztja alá a matematika az előbbi kijelentést!

ELMÉLET

A gömbfelület nem teríthető síkba.
A felsőbb matematika eszközeivel bizonyítható, hogy
- egy r sugarú gömb felszíne $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{4r^2\pi}$;
- egy r sugarú gömb térfogata $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\frac{4\pi}{3}r^3}$.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Régi matematikakönyvek kedvelt példája volt a következő: Egy 2 cm sugarú ólomgolyóból 1 mm sugarú ólomsöréteket öntenek.

a) Hány darab sörét készíthető?

b) A golyóból készített összes sörét együttes felszíne hányszorosa a golyó felszínének?

Megoldás

a) Bármely két gömb hasonló, és tanultuk (10. osztály, 75. lecke), hogy *a hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóságuk arányának köbével (harmadik hatványával) egyenlő*. Esetünkben a hasonlóság aránya $20 : 1 = 20$ és $20^3 = 8000$, tehát a 20 mm sugarú golyó térfogata 8000-szer akkora, mint egy darab 1 mm sugarú sörét térfogata. A golyóból emiatt 8000 db sörét önthető.

b) A *hasonló testek felszínének aránya a hasonlóságuk arányának négyzetével egyenlő.* $20^2 = 400$, vagyis a 20 mm sugarú golyó felszíne 400-szor akkora, mint egy sörét felszíne. 400 darab sörét együttes felszíne egyenlő a golyó felszínével, a 8000 darab sörét együttes felszíne pedig ennek a 20-szorosa. Tehát a sörétek együttes felszíne **20-szorosa** a golyó felszínének.

Megjegyzések

1. Oldd meg a feladatot másképpen is! Hasonlítsd össze az így kapott eredményeket a korábbiakkal! Ha a térfogatok kiszámításakor a részeredményeket kerekítve adod meg, az eredmény nem lesz olyan pontos, mint a fenti számolás eredménye.
2. A bevezetésben feltett kérdésre egy konkrét esetben megtaláltuk a matematikai választ: ha egy golyóból kisebb, egyforma méretű golyókat készítünk, akkor a kisebb golyók együttes felszíne nagyobb, mint az eredeti golyó felszíne volt. Az általános esetre vonatkozó bizonyítást a Ráadásban találod meg.

FELADAT

1. Egy 4 cm sugarú és egy 3 cm sugarú gömbgyertyából egyetlen nagyobb gömbgyertyát öntenek.

a) Mekkora lesz az új gömbgyertya sugara?

b) Hány százaléka a két eredeti gyertya együttes felszíne a belőlük öntött egyetlen nagyobb gömbgyertya felszínének?

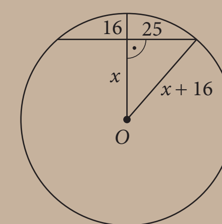
2. **a)** Mekkora 10 darab – egyenként 30 mm átmérőjű – gömb alakú szappanbuborék együttes felszíne?
b) Mekkora annak az – ugyancsak gömb alakú – szappanbuboréknak a felszíne, amely úgy jött létre, hogy a fenti 10 kis szappanbuborék összekapcsolódott egyetlen nagy buborékká, amelynek akkora a térfogata, mint a 10 buborék térfogata együtt?

Megjegyzés
Természeti törvény, hogy a szabadon lebegő szappanbuborékok – az adott térfogat mellett – a lehető legkisebb felületűek, azaz gömb alakúak. Ez leginkább a kicsi buborékokon figyelhető meg. A nagyobb méretű buborékok esetében a környezet (gravitációs mező, légáramlatok) erőteljesebben érvényesülő alaktorzító hatása miatt a gömb alak csak jó közelítéssel feltételezhető. A két részfeladat eredményeit összehasonlítva érthetőbbé válik az a jelenség is, hogy az összetapadó kis szappanbuborékok egyetlen nagyobb gömbbé olvadnak össze.

3. A Déli-sark közvetlen közelében épült Amundsen–Scott tudományos kutatóállomásnak sokáig meghatározó része volt a képen látható gömbsüveg alakú

kupola, melynek alapköre 50 méter átmérőjű, magassága pedig 16 méter volt. Mekkora sugarú az a gömb, amelyből ez a kupola származik?

Segítség:
Az ábrán a gömb egy főkörét szemléltettük.
A derékszögű háromszögből Pitagorasz tétele segítségével kiszámíthatod a gömb sugarát.



4. Egy Arkhimédésztől származó bizonyítás szerint a 3. feladatban látott gömbsüveg felszíne egyenlő annak a körnek a területével, melynek sugara éppen az alapkör tetszőleges pontját a gömbsüveg „csúcspontjával” (itt a kupola legmagasabb pontja) összekötő szakasz hossza. Számítsd ki ennek alapján a kupola felszínét!

HÁZI FELADAT

1. A táblázatban vasgolyók sugara, felszíne és térfogata szerepel. Töltsd ki a táblázat üres helyeit! Dolgozz a füzetedben!

sugár (cm)	1	12				
felszín (cm^2)			785	2500		
térfogat (cm^3)					48	8600

2. Földünk felületének körülbelül 70,8%-át víz borítja. Hány négyzetkilométernyi területet borít víz, ha a Földet 6371 km sugarú gömbnek tekintjük?

3. A különböző műholdaknak és szondáknak köszönhetően a 2000-es évek eleje óta egyre több ismeretet szerzünk a Mars felszínéről. Vajon hányszor annyi időbe telne egy műholdnak feltérképezni a Mars felszínét, mint a Földét, ha tudjuk, hogy a Mars térfogata a Földének körülbelül 15,1%-a?

4. Hány cm annak a gömbnek a sugara, amelynek a m^2-ben mért felszíne ugyanannyi, mint a m^3-ben mért térfogata?

RÁADÁS

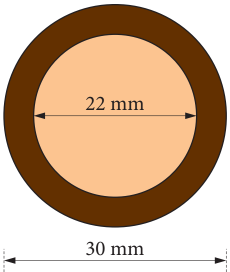
1. Legyen az n egy 1-nél nagyobb egész szám, és r egy pozitív szám! Ha egy $n \cdot r$ sugarú gömbből térfogatveszteség nélkül r sugarú gömböket készítünk, akkor n^3 darab kis gömb keletkezik. A nagy gömb felszíne $4\pi \cdot (nr)^2 = n^2 \cdot (4\pi \cdot r^2)$. Az n^3 számú, kis gömb együttes felszíne pedig $n^3 \cdot (4\pi \cdot r^2)$, ami éppen n-szerese a nagy gömb felszínének.

2. Bebizonyítható, hogy ha egy nagyobb gömbből nem egyenlő sugarú kisebb gömböket készítünk, akkor is igaz lesz, hogy a kisebb gömbök együttes felszíne nagyobb az eredeti gömb felszínénél. Erre láttunk példát az 1. feladatban a gyertyák összeolvasztásánál.

4 Testek hasonlósága

KIDOLGOZOTT FELADAT

Ivett a nyári szünet egy részében a Marcipán cukrászatban dolgozott. Legutóbb 340 darab 22 mm átmérőjű marcipángolyóból kellett csokoládémázzal 30 mm átmérőjű, gömb alakú bonbonokat készítenie.



a) Hány dm^3 volt a 340 marcipángolyó együttes térfogata?
b) Hányszor annyi lett a 340 bonbon térfogata, mint a marcipángolyóké?
c) Hány dm^3 csokoládét használt fel a mázhoz Ivett?
d) Mekkora lett volna egy bonbon átmérője, ha Ivett 5,2 dm^3 csokoládét használt volna fel?

Megoldás

a) Egy marcipángolyó sugara 11 mm, vagyis 1,1 cm, a térfogata pedig $V_{\text{marcipán}} = \frac{4}{3} \cdot 1{,}1^3 \cdot \pi \approx 5{,}6$ (cm^3). A 340 golyó együttes térfogata ennek megfelelően közelítőleg $340 \cdot 5{,}6\ cm^3 \approx 1900\ cm^3 = 1{,}9\ dm^3$.

b) Foglalkozzunk csak egy bonbonnal! A bonbon és a benne lévő marcipángolyó hasonló, ezért a térfogatuk aránya egyenlő az átmérők arányának a köbével:
$V_{\text{bonbon}} : V_{\text{marcipán}} = (30 : 22)^3 \approx 1{,}4^3 \approx 2{,}5$,
vagyis egy bonbon térfogata közelítőleg 2,5-szer akkora lett, mint egy marcipángolyóé volt. Ugyanez az arány áll fenn a 340 bonbon esetében is.

c) Ha egy bonbon térfogata közelítőleg 2,5-szer akkora, mint egy marcipángolyóé, akkor a csokoládémáz 1,5-szerese a marcipánnak, vagyis 340 bonbon esetében Ivett $1{,}5 \cdot 1{,}9\ dm^3$ csokoládét használ fel. Ez közelítőleg 2,8-2,9 köbdeciméter.

d) Ha Ivett 5,2 dm^3 csokoládét használ fel, akkor a 340 bonbon térfogata közelítőleg $5{,}2\ dm^3 + 1{,}9\ dm^3 = 7{,}1\ dm^3$. A 340 bonbon és a 340 marcipángolyó térfogatának aránya ekkor $7{,}1 : 1{,}9 \approx 3{,}7$. Ugyanennyi 1 bonbon és 1 marcipángolyó térfogatának aránya is. A két gömb hasonlósága miatt ez a 3,7 éppen *az átmérők köbének az aránya*. A kétféle átmérő aránya ennek a köbgyöke: $\sqrt[3]{3{,}7} \approx 1{,}5$, ezért a bonbonok átmérője $1{,}5 \cdot 22$ mm ≈ 33 mm lett volna.

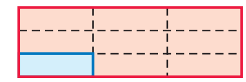
FELADAT

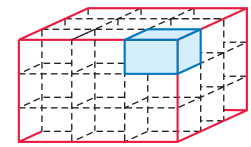
1. Mekkora a példában szereplő háromféle gömb felszíne?

2. Egy 1,26 m élhosszúságú betonkockából kivájtak egy olyan kocka alakú üreget, amelynek az élei
a) 21 cm; **c)** 63 cm;
b) 42 cm; **d)** 84 cm
hosszúságúak. Hányadrésze az üreg térfogata a megmaradt betonépítmény térfogatának?

3. A Marcipán cukrászatban készülő csokis minyon méretei: 4 cm, 3 cm, 2,5 cm. Ivett megkérte a főnököt, hogy Csilla születésnapjára készítse el ennek a 3-szoros nagyítását.
a) Mekkorák ennek az „óriásminyonnak” az élei?
b) Mekkora a felszíne? Ez hányszor akkora, mint egy kis minyon felszíne?
c) Mekkora a térfogata? Ez hányszor akkora, mint egy kis minyon térfogata?

ELMÉLET



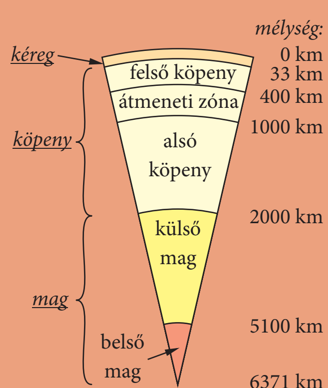


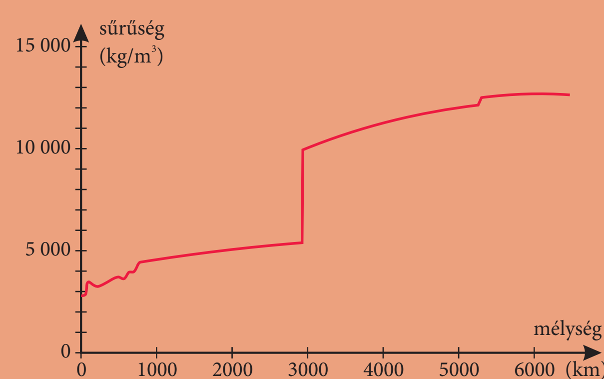
10. osztályban foglalkoztunk hasonló alakzatok tulajdonságaival. Bebizonyíthatók az alábbi állítások:

1. Ha két síkidom hasonló, és a hasonlóságuk arányszáma k, akkor *a kerületük aránya k, a területek aránya k^2*.
   Például ha két téglalap hasonló, és a hasonlóságuk aránya 3, akkor a nagyobb téglalap kerülete 3-szor akkora, területe pedig 9-szer nagyobb, mint a kisebb téglalapé.
2. Ha két test hasonló, és a hasonlóság arányszáma k, akkor e két test felszínének az aránya k^2, a két test térfogatának az aránya k^3.
   Például ha két téglatest hasonló, és a hasonlóságuk aránya 3, akkor a felszínük aránya 9, a térfogatuk aránya pedig 27.

HÁZI FELADAT

a) A mellékelt ábra és grafikon alapján töltsd ki a táblázatot a Föld belső szerkezetéről, a Föld tömegének körülbelüli eloszlásáról! A Föld tömegét $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg-nak veheted.
(A grafikonok forrása és a felhasználási engedélyhez a tulajdonos által kért hivatkozás: dr. Völgyesi Lajos (2002): Geofizika. Műegyetemi Kiadó, Budapest)





A sűrűség változása a Föld belsejében

A réteg neve	A réteg vastagsága (km)	A réteg térfogata (km^3)	A réteg térfogata hány %-a a Föld térfogatának?	Mekkora a réteg tömege? (kg)	A réteg tömege hány %-a a Föld tömegének?
kéreg					
felső köpeny					
átmeneti zóna					
alsó köpeny					
külső mag					
belső mag	1271	$8{,}6 \cdot 10^9$	0,8	$1{,}1 \cdot 10^{23}$	2

b) Ábrázold kördiagramon a térfogateloszlást és a tömegeloszlást is!

c) Készíts olyan grafikont, amely a Föld sűrűségének változását a Föld középpontjától való távolság függvényében tünteti fel!

5 Felszín és térfogat

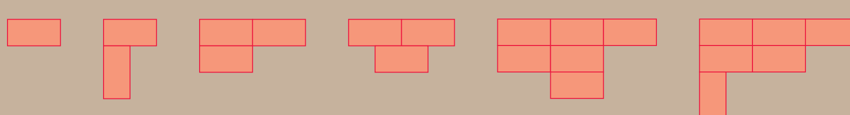
BEVEZETŐ

A teherszállításban használt konténerek újrahasznosításának egyik érdekes példája ez a hollandiai, Amszterdamban található diákszállás, amelyet több száz konténer felhasználásával építettek. A fémből készült konténerek hővezetése igen jó, ezért – hacsak nem akarunk hatalmas összegeket a hőszigetelésbe ölni – célszerű úgy elhelyezni őket, hogy az épület külső felülete minél kisebb legyen.

FELADAT

Dolgozzatok párokban!

1. Karcsi 6 egyforma téglát talált az udvaron. A 6 téglából kirakott többféle **egyenes hasábot**, mégpedig úgy, hogy egy hasábhoz mindig az összes téglát felhasználta, és mindegyik tégla a legnagyobb lapján feküdt. Mindig lerajzolta a hasábok felülnézetét:



Kíváncsi volt, egyenlő-e a hasábok **felszíne**, vagy melyiké a legnagyobb. A számításhoz felhasználta a következő adatokat:

Porotherm kis méretű tömör tégla
Méretek: 25 cm × 12 cm × 6,5 cm

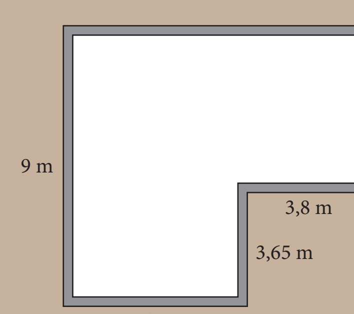
a) Mekkora egy-egy ilyen 6 téglából álló hasáb térfogata?
b) Melyik hasábnak hány lapja van?
c) Egy kis tégla lapjainak a területét jelöljétek A-val, B-vel, illetve C-vel ($A > B > C$)! Hány négyzetcentiméter A, B, illetve C?
d) Fejezzétek ki A-val, B-vel és C-vel Karcsi 6 hasábjának a felszínét! Számítsátok ki, melyik a legnagyobb, melyik a legkisebb!

2. Egy új ház egyszerűsített alaprajzán az úgynevezett főfalak (tartófalak) elhelyezkedése látható. A főfalak mindenütt 30 cm vastagságúak és 2,8 méter magasak lesznek.

a) Mekkora a ház bruttó és nettó alapterülete? (A nettó alapterület a belső terület.)

A falakat 30 cm × 17,5 cm × 14 cm méretű B30-as falazótéglából építik.
A belső teret szobákra és más helyiségekre osztó elválasztó falakat nem téglából építik meg.

b) Hány raklap téglát kell rendelni, ha egy raklap tégla 140 téglát jelent?



c) Mennyibe kerül a megrendelt tégla, ha egy darab tégla ára 130 Ft (volt 2012-ben)?

d) Hogyan módosul a megrendelendő tégla mennyisége, ha figyelembe veszik, hogy a házfalban ki kell alakítani 4 db 210 cm × 120 cm-es ablaknyílást és 3 db 120 cm × 240 cm-es ajtónyílást is?

HÁZI FELADAT

1. Egy téglatest alakú konténer méretei: 4 m × 3 m × 3 m. Ha 12 egyforma konténert *egy* téglatest alakú építménybe kell elrendezni, akkor a lehetséges téglatestek közül melyiknek lesz a legkisebb a felszíne? Hányszorosa ennek a 12 konténer együttes felszíne?

2. Folytasd az előző feladatot! Adj meg négy olyan elrendezést, amikor mind a 12 konténert felhasználva egy téglatest alakú építmény keletkezik, de a keletkező építmények felszíne különböző! Mekkorák a felszínek?

RÁADÁS

Hétköznapi életünkben a körülöttünk lévő tárgyaknak – geometriai elnevezéssel testeknek – fontos tulajdonsága, hogy mekkora felület határolja őket, illetve hogy mekkora térrészt foglalnak el. A testeknek ezt a geometriai tulajdonságát jellemezzük a felszínükkel, illetve a térfogatukkal.
E két fogalom általános és pontos értelmezése bonyolult feladat, amely meghaladja eddigi ismereteinket. Sok esetben a szemléletünkre támaszkodunk, bizonyítás nélkül.

A térfogat méréséről

Ajánlatos először olyan testek térfogatával foglalkozni, amelyeket sokszöglapok határolnak. Az ilyen testeket *poliédereknek* nevezzük. Tanulmányaink során már sokféle poliéderrel találkoztunk, például a hasábokkal és a gúlákkal.
A poliéderek térfogata legyen egy olyan pozitív valós szám, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

a) egybevágó poliéderek térfogata egyenlő;
b) az egységnyi élhosszúságú kocka térfogata 1 térfogategység;
c) ha egy poliédert két poliéderre vágunk szét, akkor a két részpoliéder térfogatának összege egyenlő az eredeti poliéder térfogatával.

Igazolható, hogy minden poliéderhez egyértelműen hozzárendelhető a feltételeknek megfelelő pozitív valós szám, tehát minden poliédernek van egyértelműen meghatározott térfogata.
Az eddig megismert hasábok és gúlák térfogatképleteiről matematikai szigorúsággal bizonyítható, hogy olyan térfogatot határoznak meg, amelyek teljesítik az *a), b)* és *c)* feltételeket.
A bizonyítási láncolatban első helyen áll a téglatest térfogatképletének igazolása: ha a téglatest egy csúcsából induló éleinek hossza a, b és c, akkor a téglatest térfogata $V = a \cdot b \cdot c$.
A görbült felülettel határolt testek térfogatának pontos meghatározásához új fogalmak bevezetésére és további ismeretekre lenne szükség, aminek részletes kidolgozása meghaladja a középiskolai tananyagot.

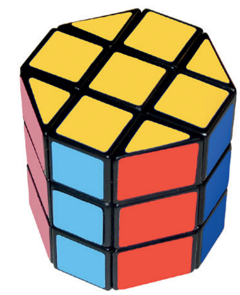
A felszín méréséről

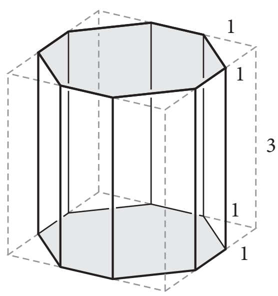
A felszín mérése a terület méréséhez kapcsolódik. Egy poliéder felszínén a testet határoló sokszögek területének összegét értjük. Ha egy testet nem csak sokszögek határolnak, akkor a legtöbb esetben nehéz matematikai probléma a test felszínének kiszámítása.
Nem foglalkozunk azzal a kérdéssel, hogy mit értünk testek felszínén, csupán arra szorítkozunk, hogy néhány, az alkalmazásokban gyakran szereplő test felszínének kiszámítási módját megadjuk.
Bizonyos testek felszínéhez szemléletes úton jutottunk el, mert meglátásunk alapján elég nyilvánvalónak tűnt, hogy pl. a forgáshenger vagy a forgáskúp palástja síkba kiteríthető. A kiterítéssel való felszínszámítást azonban nem tekinthetjük bizonyításnak, hiszen nem mondtuk meg egyértelműen, hogy mit nevezünk kiterítésnek, és azt sem bizonyítottuk, hogy kiterítés során a felszín nem változik meg.

6 A hasáb

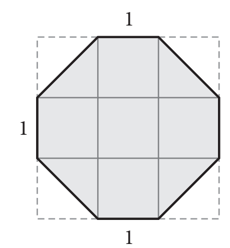
BEVEZETŐ

A képen egy érdekes játék látható. Ez úgy keletkezett, hogy egy 3 egységnyi élű „bűvös kockából" (Rubik-kockából) annak négy „függőleges" éle mentén levágtak egy-egy háromszög alapú hasábot. Soroljuk fel a levágás után megmaradt mértani test tulajdonságait!





Ez egy nyolcszög alapú egyenes hasáb. Az alaplapja olyan nyolcszög, amelynek 4 oldala egyenlő az eredeti bűvös kocka kis négyzeteinek az oldalával, másik 4 oldala pedig akkora, mint egy ilyen kis négyzet átlója. A test fedőlapja az alaplappal egybevágó és párhuzamos. A testnek nyolc oldallapja van, ezek merőlegesek az alaplap és a fedőlap síkjára. Az oldallapok közül 4-4 egybevágó. A függőleges éleik mind 3 egység hosszúságúak, a vízszintes élek az alaplap oldalaival egyenlők.



FELADAT

1. Végezz számításokat a Bevezetőben szereplő nyolcszög alapú egyenes hasábbal kapcsolatban! Tekintsd a kiindulásul vett bűvös kocka éleit 3 cm-eseknek!

a) Mekkora ennek a bűvös kockának az alapterülete, és a levágás után megmaradt hasábnak az alapterülete? Mennyi a két alapterület aránya?

b) Mekkora a bűvös kocka térfogata és a hasáb térfogata? Mennyi a két térfogat aránya?

c) Mekkora a bűvös kocka felszíne és a hasáb felszíne? Mennyi a két felszín aránya?

2. A Bevezető feladatban a bűvös kockáról 4 kisebb hasábot metszettünk le.

a) Sorold fel egy ilyen kis hasáb tulajdonságait!

b) Mekkora egy ilyen hasáb felszíne és térfogata?

c) Ellenőrizd, hogy a bűvös kocka térfogata egyenlő-e a részek térfogatának összegével!

d) Hogy aránylik egymáshoz a bűvös kocka felszíne és a feldarabolással keletkező 5 rész felszínének az összege?

(Megjegyzés: Egy újabb példát láthatsz arra, hogy ha egy tömör testet több részre darabolunk, akkor a darabok felszínének összege nagyobb az eredeti test felszínénél. Ezt a problémát vizsgáltuk a 3. leckében.)

3. Bence az 1. feladatban először a c) feladatot akarta megoldani, mert volt egy jó ötlete. A test felszínét úgy számította ki, hogy a bűvös kocka felszínéből ($54\ cm^2$-ből) levonta a négy levágott hasáb együttes felszínét ($44{,}9\ cm^2$-t). Nagyon elégedett volt a számolásokat lerövidítő ötletével (főleg azért, mert a nyolcszög területével nem kellett foglalkoznia). Csodálkozva vette észre, hogy eredménye hibás.

a) Magyarázd meg, hogy miért hibás Bence gondolatmenete!

b) Hogyan javítható ez a gondolatmenet?

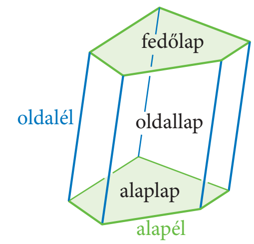
c) Neked van-e más ötleted a felszín kiszámítására?

ELMÉLET

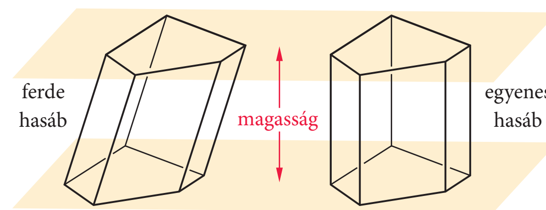
Emlékezzünk:

1. Akkor mondjuk, hogy *két sík* párhuzamos egymással, ha nincs közös pontjuk.
2. Akkor mondjuk, hogy *két egyenes* párhuzamos egymással, ha van közös síkjuk, de nincs közös pontjuk. Ha *két szakasz* párhuzamos egyenesekre illeszkedik, akkor ezeket is párhuzamosoknak nevezzük.

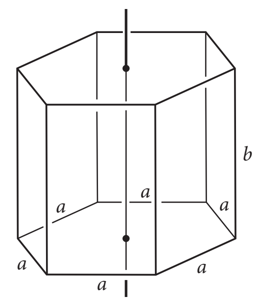
I. **Hasábnak** az olyan testet nevezzük, amelyet két egybevágó sokszög és annyi paralelogramma határol, ahány oldalú a sokszög. A két sokszög neve **alaplap**, illetve **fedőlap**, a többi lapé pedig: **oldallap**. Az alaplap oldalai a hasáb **alapélei**, a fedőlap oldalai a **fedőélei**, a többi élt **oldalélnek** nevezzük. Az alaplap és a fedőlap síkja párhuzamos egymással. E két párhuzamos sík távolságát a hasáb **magasságának** nevezzük. A hasáb oldalélei mind párhuzamosak egymással és egyenlő hosszúak.



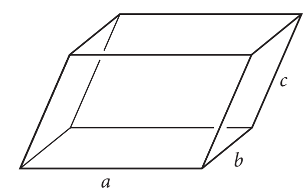
II. Ha egy hasáb oldallapjai téglalapok, akkor ez a szokásos szóhasználattal: **egyenes hasáb**. Ennek az oldalélei merőlegesek az alaplap és a fedőlap síkjára, ezért az egyenes hasáb magassága az oldalélek hosszával egyenlő.
Amelyik hasáb nem egyenes hasáb, azt **ferde hasábnak** mondjuk.



III. Az olyan egyenes hasábot, amelynek alap- és fedőlapja szabályos sokszög, **szabályos hasábnak** nevezzük. Az alaplap és fedőlap középpontjait összekötő egyenest a szabályos hasáb tengelyének nevezzük. Ez egyúttal forgástengely is, tehát a szabályos hasábok forgásszimmetrikus testek. A négyoldalú szabályos hasábot **négyzetes hasábnak** vagy **négyzetes oszlopnak** nevezzük.
A paralelogramma alapú hasábot **paralelepipedonnak** nevezzük. Ez a test középpontosan szimmetrikus.
A téglalap alapú egyenes hasábot **téglatestnek** nevezzük. A **kocka** olyan téglatest, amelynek élei egyenlők.

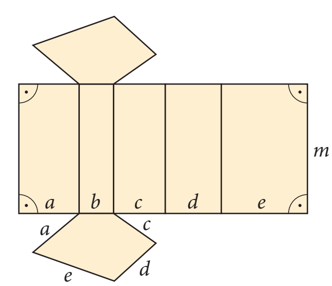


hatszögalapú szabályos hasáb



paralelepipedon

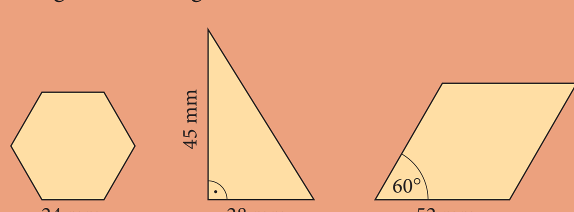
IV. Hasábok **felszínét** a lapok területének összegeként kapjuk meg.
Az alaplap tetszőleges n szög lehet, az oldallapok paralelogrammák. Az oldallapokat együttesen palástnak is nevezzük. Tehát a hasáb felszíne: $\mathbf{A = 2}\boldsymbol{T}_{\textbf{alaplap}} + \boldsymbol{T}_{\textbf{palást}}$
Egyenes hasáb esetében az oldallapok síkba terítve egy olyan téglalapot alkotnak, amelynek az egyik oldala az alaplap kerületével, rá merőleges oldala pedig a hasáb magasságával (az oldalélek hosszával) egyenlő. Ezért egy egyenes hasáb felszíne (az ábra jelöléseivel) így számítható ki: $T_{alaplap} + T_{fedőlap} + k_{alaplap} \cdot m = 2 \cdot T_{alaplap} + k_{alaplap} \cdot m$.



V. Bebizonyítható, hogy az egyenes hasábok és a ferde hasábok **térfogata** egyaránt *az alapterület és a magasság szorzatával* egyenlő: $\boldsymbol{V = T}_{\textbf{alaplap}} \cdot \boldsymbol{m}$.

HÁZI FELADAT

1. Három egyenes hasáb oldalélei 85 mm-esek. Alaplapjukat az ábrák mutatják (szabályos hatszög, derékszögű háromszög és rombusz).



Mekkora ezeknek a hasáboknak az alapterülete, magassága, felszíne és térfogata?

2. Jocó is nézegette az 1. feladatban szereplő hasábot. Mindjárt kijelentette: Ha a bűvös kocka élei $3a$ cm hosszúságúak, akkor ennek a nyolcszög alapú hasábnak a felszíne $2 \cdot 7a^2 + (4a + 4 \cdot \sqrt{2}\,a) \cdot 3a$ (cm^2).

a) Vajon hogyan gondolkozott Jocó?

b) Igaz-e, hogy Jocó eredményét ebben az alakban is megadhatjuk: $(26 + 12\sqrt{2})a^2$ (cm^2)?

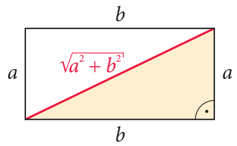
7

Testátlók és szögek

BEVEZETŐ

Egy hasáb két csúcsát összekötő szakasz vagy él, vagy átló. Ha egy átló illeszkedik a test valamelyik lapjára, akkor **lapátló**-nak, ha nem ugyanazon a lapon lévő csúcsokat köt össze, akkor **testátló**nak nevezzük.

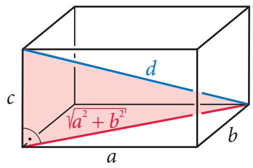
Ha egy téglalap oldalhosszúságai valamely mértékegység szerint a és b, akkor az átlói a Pitagorasz-tételnek megfelelően $\sqrt{a^2+b^2}$ hosszúságúak.



Ha egy téglatestnek ez a téglalap az egyik lapja, és a rá merőleges élek hossza c, akkor ennek a téglatestnek a testátlói $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ hosszúságúak.

Miért? A téglatest belsejébe rajzolt háromszög derékszögű, az egyik befogója az alaplap átlója, a másik a c hosszúságú él, ezért az átfogójának a négyzete a Pitagorasz-tétel szerint:

$d^2=(\sqrt{a^2+b^2})^2+c^2=a^2+b^2+c^2$.

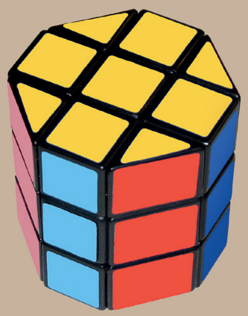


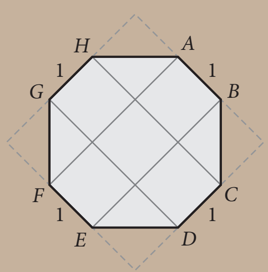
Mindegyik testátlóhoz rajzolható egy ezzel a háromszöggel egybevágó másik háromszög, ezért mind a 4 testátló egyenlő hosszú.

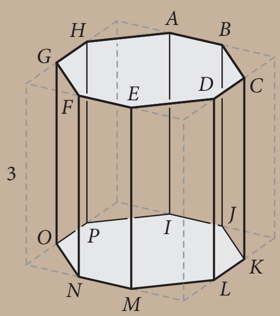
FELADAT

Dolgozzatok párokban!

1. Foglalkozzunk újra a 6. leckében vizsgált érdekes formájú, nyolcszög alapú egyenes hasábbal! Megfigyeléseidhez és számításaidhoz használd fel a következő ábrákat!







a) Hány átló van a test fedőlapján, amelynek egyik csúcsa A? Melyik milyen hosszúságú?

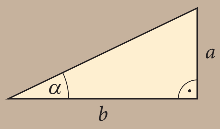
b) Hány átlója van összesen ennek a nyolcszögnek? Hányféle hosszúság fordul elő köztük?

c) Hány testátló indul az A csúcsból? Melyik milyen hosszúságú?

d) Hány testátlója van összesen ennek a testnek? Hányféle hosszúság fordul elő köztük?

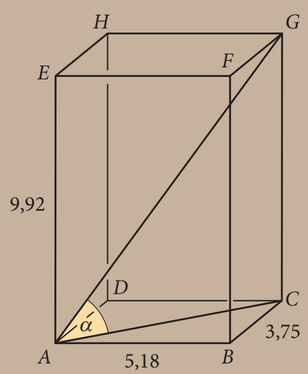
2. Mekkora szögeket alkotnak az 1. feladatban vizsgált testátlók a hasáb alaplapjával?
A számításhoz használd a szögek tangensét! Töltsd ki a következő táblázatot a füzetedben azokra a háromszögekre vonatkozóan, amelyekből kiszámítod a testátlók és az alaplap síkjának a szögét!

Emlékezzünk!
Ha egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge α, akkor a vele szemben lévő befogó és a mellette lévő befogó hosszúságának a hányadosát az α **tangensének** nevezzük. Az ábrának megfelelő jelöléssel: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$.



A szöggel szemközti befogó (cm)	A szög melletti befogó (cm)	A szög tangense	A szög (fok)

3. Egy téglatest éleinek hossza 5,18 cm, 3,75 cm és 9,92 cm.
a) Mekkorák a téglatest testátlói?
b) Mekkora az AG testátló és az alaplap síkjának a szöge (α)?
c) Mekkora az AG és a CE testátló szöge (nem tompaszög)?
d) Milyen kapcsolat van a b) és a c) feladatban szereplő szögek között?
e) Dönci szerint az AG és a CE testátló szöge éppen 2-szerese az EAG szögnek. Igaza van?
f) Mekkora az AG testátló és az AE él szöge?

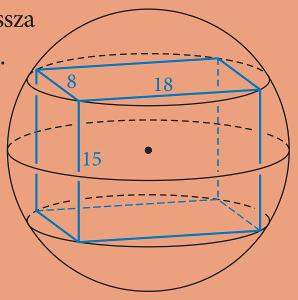


HÁZI FELADAT

1. **a)** Mekkora a testátlója az 5 cm élhosszúságú kockának?
b) Mekkora szöget zár be a kocka két testátlója egymással?

2. Egy kocka élei 28 cm hosszúságúak. Válaszd ki a kocka egyik csúcsát!
a) Mekkora a kiválasztott csúcsból induló testátló?
b) Mekkora szöget alkot ez a testátló a kocka lapjaival?
c) Mekkora szöget alkot ez a testátló a kocka kiválasztott csúcsából induló éleivel?

3. Egy téglatest éleinek hossza 8 cm, 15 cm és 18 cm. Számítsd ki a téglatest köré írható gömb sugarát és térfogatát!



4. Az órai 3. feladatban kiszámítottad, hogy mekkora az AG testátló és az AE él szöge. Mekkora szöget alkot ez a testátló a téglatest AB és AD élével?

8 A forgáshenger

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy cég kétféle méretű májkrémkonzervet forgalmaz. Mindkét doboz henger alakú, a kisebbik sugara 2,5 cm, magassága 3 cm, a nagyobbik konzerv minden mérete ennek duplája.

a) Hány cm^2 alumínium szükséges a kisebbik konzervdoboz elkészítéséhez?

b) Hányszor akkora a nagyobbik konzervdoboz felülete, mint a kisebbiké?

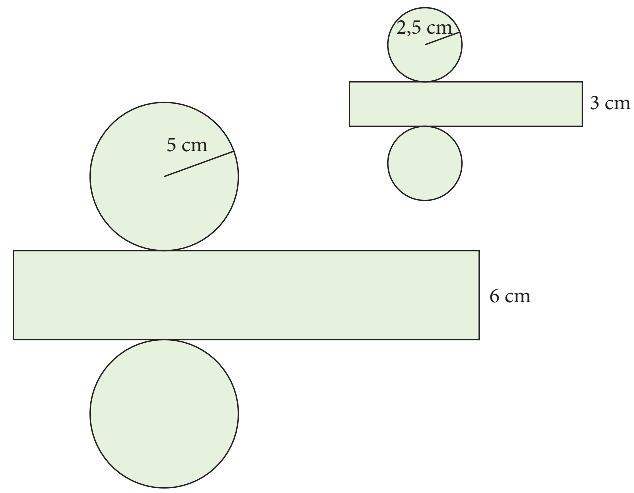
c) Mennyi májkrém fér a nagyobbik dobozba, ha a kisebbikben 65 g van?

Megoldás

a) A konzervdoboz alakja jó közelítéssel *forgáshenger*. Ennek a felszíne *a két párhuzamos, egybevágó kör és a hengerpalást területének az összege.*

Az alapkör területe $2{,}5^2\pi\ \text{cm}^2 = 6{,}25\pi\ \text{cm}^2$, a fedőlapé ugyanennyi. A két kör területének összege tehát $12{,}5\pi\ \text{cm}^2$.

A hengerpalást síkba teríthető. Egy olyan téglalap lesz belőle, amelynek két szemközti oldala az alapkör kerületével egyenlő, vagyis 5π cm, a másik két oldal pedig akkora, mint a konzervdoboz magassága, vagyis 3 cm. Eszerint a hengerpalást területe $5\pi \cdot 3\ \text{cm}^2 = 15\pi\ \text{cm}^2$.



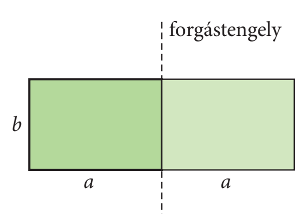
Tehát a kisebb dobozhoz szükséges alumíniummennyiség: $12{,}5\pi\ \text{cm}^2 + 15\pi\ \text{cm}^2 = 27{,}5\pi\ \text{cm}^2 \approx 86\ \text{cm}^2$.

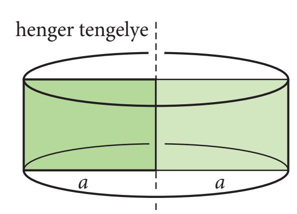
b) A nagyobb májkrémes doboz hasonló a kisebbhez, a hasonlóságuk aránya 2. A hasonló testek felszínéről tanultak miatt tehát a nagyobb doboz felszíne a kisebbének 4-szerese: $4 \cdot 27{,}5\pi = 110\pi \approx 345\ (\text{cm}^2)$.

c) A nagyobb doboz – ismét a hasonlóság miatt – éppen 8-szor akkora térfogatú, mint a kisebb. Adott sűrűségű anyag esetén a tömeg a térfogattal egyenesen arányos, tehát a nagyobb dobozban $8 \cdot 65\ \text{g} = 520\ \text{g}$ tömegű májkrém lehet.

ELMÉLET

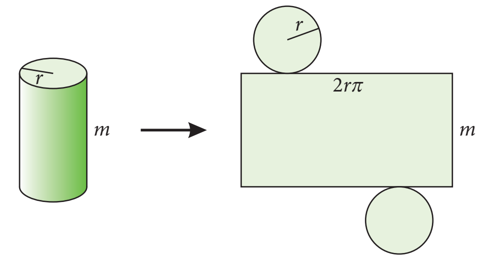
1. Ha egy téglalapot megforgatunk az egyik oldalának egyenese körül, forgáshenger keletkezik.
   Ábránkon a téglalap b hosszúságú oldalára illeszkedik a forgástengely, a másik oldal hossza a. A most keletkezett henger alaplapja és fedőlapja egy a sugarú kör, ez a henger **alapköre**. A két körlap középpontjait összekötő egyenes a henger **tengelye**. Az alap- és fedőlap távolsága a henger **magassága**, ami most b hosszúságú.





2. Azokat a szakaszokat, amelyek a b hosszúságú oldal forgatása során keletkeznek, a henger **alkotóinak** nevezzük. *Az alkotók hossza egyenlő a henger magasságával.*
3. Az alkotók együtt egy felületet határoznak meg, a henger **palástját**.

4. Az egyenes körhenger palástja görbült felület, de a síkba kiteríthetjük, és a kiterítés után egy olyan téglalapot kapunk, amelynek az egyik oldala az alapkör kerületének $2r\pi$ hosszával, másik oldala pedig a henger m magasságával egyenlő hosszú.
Ebből adódik, hogy a henger felszíne: $A = 2r^2\pi + 2r\pi m = 2r\pi(r + m)$.
A henger térfogata az alapterület és a magasság szorzata: $V = r^2\pi m$.



FELADAT

1. Adj meg olyan téglalapot, amelyet az egyik oldalegyenese körül megforgatva a kidolgozott feladatban szereplő kisebb, illetve nagyobb konzervdoboz keletkezik!

2. Egy téglalap oldalainak hosszúsága 2,6 cm, illetve 4,5 cm. Megforgatjuk ezt a téglalapot
a) a rövidebb oldalának egyenese;
b) a hosszabbik oldalának egyenese
körül. Melyik esetben mekkora a keletkező henger felszíne és térfogata?

3. Oldd meg a 2. feladatot azzal a változtatással, hogy nem az oldalegyenesek, hanem a középvonalak egyenese körül forgatjuk meg a téglalapot!

4. Egy 2 cm sugarú, 10 cm széles festőhengerrel dolgozva egy fordulattal körülbelül 1,5 ml festéket viszünk fel a falra.
a) Hány liter festéket vegyünk egy 40 m^2 falfelületű szobához, ha a falfelületet csak egyszer kell lefesteni?
b) Milyen magasan áll ennyi festék a 16 cm átmérőjű, henger alakú festékes vödörben?

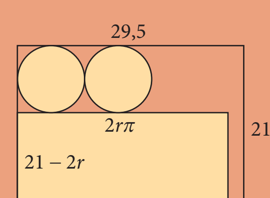
5. Egy téglalap egyik oldala 4-szer akkora, mint a másik. Igazold, hogy 4-szer akkora térfogatú forgáshenger keletkezik, ha ezt a téglalapot a rövidebb oldalának egyenese körül forgatjuk meg, mint ha a hosszabb oldalának egyenese körül forgatjuk!

HÁZI FELADAT

1. Egy mobil kerti medence forgáshenger alakú. Az átmérője 3 méter, a medencét 1,2 méter magasságig töltik fel vízzel.
a) Mennyi időre lenne elegendő ennyi víz egy 4 tagú családnak, amelynek havi átlagos vízfogyasztása 6 m^3?
b) Mennyibe kerül a kerti medence egyszeri feltöltése, ha az adott településen a vízdíj és a szennyvízdíj együttes összege köbméterenként 620 forint? (A csapból kiengedett vízért vízdíjat és szennyvízdíjat is fizetünk.)

2. Ugyanazt a fajta mézet a termelő kétféle henger alakú üvegben hozza forgalomba. A magasabb üveg magassága pontosan kétszer akkora, mint a kisebbiké, viszont az átmérője csak feleakkora. A magasabb üveg mézet 230 Ft-ért, az alacsonyabbikat 430 Ft-ért árulja. Melyik a jobb vétel (ha az üvegek ára egyforma, illetve nem jelentős)?

3. Egy A4-es méretű vékony kartonlap méretei: 29,5 cm × 21 cm. Bence egy forgáshengert akar készíteni, ezért az ábra szerint két körlapot és egy megfelelő méretű téglalapot vág ki a kartonlapból. (Az ábrán r a körök sugarát jelenti.)

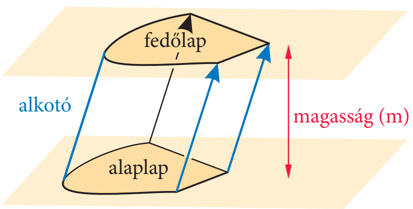


a) Lehetnek-e a körlapok 3 cm, 4 cm, illetve 5 cm sugarúak? Ha igen, akkor mekkora felszínű a hozzájuk tartozó henger? Ha nem, akkor miért nem?
b) Ha a kiterített palást egyik oldala éppen 29,5 cm, akkor mekkora az A4-es kartonból készíthető henger sugara? Hány százalék hulladék keletkezik ebben az esetben? (A henger palástja és alapkörei az ábrának megfelelően vannak kivágva.)
Ⓚ **c)** Melyik a legnagyobb felszínű henger, amely a megadott módon előállítható a kartonlapból?

9 Hengerszerű testek

ELMÉLET

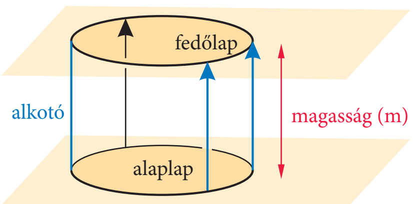
Ha egy síkidomot a síkjával nem párhuzamos vektorral eltolunk, akkor az eltolás során „súrolt” térrészt hengerszerű testnek nevezzük. A testet két egybevágó, egymással párhuzamos síkidom – az **alaplap** és a **fedőlap** –, valamint a **palást** határolja. A paláston az eltolásnál egymásnak megfelelő pontokat összekötő szakaszokat a henger **alkotóinak** nevezzük. Az alkotók – a származtatásból adódóan – egymással párhuzamos, egyenlő hosszúságú szakaszok.



ferde hengerszerű test (ferde henger)

Az alap- és fedőlap síkjának távolságát a henger **magasságának** nevezzük.

Ha a kiindulásul vett síkidom sokszög, akkor a hengerszerű testet **hasábnak** szoktuk nevezni, más esetekben a legtöbbször egyszerűen **hengernek**.
Ha az eltolás vektora merőleges a kiindulásul vett síkidom síkjára, akkor **egyenes** hengerszerű test keletkezik, ellenkező esetben pedig **ferde** hengerszerű test. Az egyenes hengerszerű testeknél a magasság egyenlő az alkotók hosszával, a ferde hengerszerű testek magassága kisebb az alkotók hosszánál.



egyenes hengerszerű test (egyenes henger)

Az előző leckében megismert **forgáshenger** olyan egyenes henger, amelynek az alaplapja kör.
A köznyelvben a henger szó leginkább az egyenes körhengert jelenti, a matematikában általánosan a hengerszerű testeket.

A hengerszerű test felszíne és térfogata: $\boldsymbol{A = 2 \cdot T_{alaplap} + T_{palást}}$ $\quad \boldsymbol{V = T_{alaplap} \cdot m}$

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy falfesték „kiadósságát” így adta meg a gyártó: 8-9 m^2/liter.

a) Hány m^2 felület festéséhez elegendő festék van egy 15 literes vödörben?

b) Milyen vastag festékréteggel számolt a gyártó cég?

c) A szobafestők gyakran nem méricskélik a falfelületet, hanem azt mondják, hogy a kifestendő lakás alapterületét meg kell szorozni 3-mal (az oldalfalakat és a mennyezetet le kell festeni, az ajtókat és az ablakokat pedig nem). Hány vödör festékre van szükség a szobafestő szerint egy 53 m^2-es lakás kifestéséhez, ha egy vödörben 15 liter falfesték van, a festék „kiadóssága” 8-9 m^2/liter, és minden felületet kétszer kell lefesteni?

Megoldás

a) A 15 liter festék 15-ször akkora területre elegendő, mint az 1 liter, tehát 120-135 m^2-hez.

b) Az 1 liter festék térfogata 1 dm^3, a 8-9 m^2 terület 800-900 dm^2-t jelent. Ha mindenütt azonos vastagságú festékréteget képzelünk el, akkor a befestett felületet gondolhatjuk egy olyan hengernek, amelynek a térfogata éppen 1 dm^3, az alapterülete pedig 800-900 dm^2 körüli érték. A henger térfogatát az alaplap alakjától függetlenül a $V = T_{alaplap} \cdot m$ képlettel számolhatjuk ki, amelyből most a henger magasságát szeretnénk meghatározni: $m = \dfrac{V}{T_{alaplap}}$.

Ha 800 dm^2-nek vesszük az alaplap területét, akkor $m = \dfrac{1}{800} = 0{,}00125$ dm-t kapunk, ami 0,125 mm.

Ha 900 dm^2-nek vesszük az alaplap területét, akkor az előbbihez hasonló számítással 0,111 mm-t kapunk.

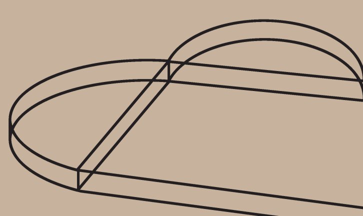
A gyártó tehát körülbelül 0,11-0,13 mm-es festékrétegvastagsággal számolt a kiadósság megállapításakor.

c) A szobafestő szerint (a kétszeres festést is figyelembe véve) $6 \cdot 53\ \text{m}^2 = 318\ \text{m}^2$ felületre kell festék. A feladat a) részében kiszámítottuk, hogy 1 vödör festék 120-135 m^2 felületre elegendő. Ha 135 m^2-rel kalkulálunk, akkor $\frac{318}{135} \approx 2{,}4$ vödör, ha pedig 120 m^2-rel, akkor $\frac{318}{120} \approx 2{,}7$ vödör festékre van szükség. Tehát 3 vödör festéket érdemes vennünk.

FELADAT

1. A Velencei-tó vízfelülete körülbelül 26 km^2, a tó átlagos mélysége 1,5 méter. Becsüld meg, hány köbméter víz lehet összesen a tóban! Az eredményt normálalakban add meg!
Emlékezz! A számok *normálalakja* egy kéttényezős szorzat: $a \cdot 10^k$, ahol $1 \leq |a| < 10$ és $k \in \mathbf{Z}$.

2. A képen látható születésnapi torta tésztáját egy négyzet alapú egyenes hasábból és egy kettévágott forgáshengerből illesztették össze. (A forgáshenger alapkörének az átmérője egyenlő a négyzet oldalával.)

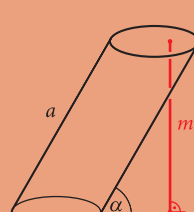


Becsüljük meg, hány embert kínálhatunk meg a tortával, ha tudjuk a következőket:
– a négyzet alapú részt egy 20 cm oldalhosszúságú formában sütötték;
– a torta magassága 8 cm;
– egy személyre egy átlagos, téglatest alakú, körülbelül $3 \times 8 \times 5$ cm-es szeletnek megfelelő mennyiséggel számolunk!

3. Egy 7,2 cm belső átmérőjű, 3,5 deciliteres, henger alakú bögre áll a polcon.
a) Mekkora a bögre (belső) magassága?
b) Mekkora magasságban áll a víz a bögrében, ha 1,5 dl-t töltöttünk bele?
c) Hány mm-rel emelkedik meg a víz szintje, ha a bögrében 1,5 dl víz van, és egy 3 cm átmérőjű vasgolyót teszünk bele?

HÁZI FELADAT

1. Egy ferde körhenger alapkörének átmérője 3,74 cm, alkotói 8,28 cm-esek. Mekkora a henger magassága, ha az alkotók és az alaplap síkjának a szöge
a) 60°; **b)** 85°?



2. Mekkora az 1. házi feladatban megadott hengerek térfogata?

3. Körülbelül hány köbméter vizet kell a Balatonba „tölteni" ahhoz, hogy a víz szintje mindenütt 15 cm-rel emelkedjen? Válaszodat normálalakban add meg! A Balaton vízfelületének területe körülbelül 590 km^2.

10 Gúlák

KIDOLGOZOTT FELADAT

Tejet, kakaót, madártejet stb. időnként lehet kapni „háromszögletű” csomagolásban. Valójában ez egy térbeli alakzat, tehát nem háromszög, hanem gúla, azon belül pedig tetraéder.

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy egy ilyen tejesdoboz egyik oldala szabályos háromszög, a másik három pedig egy-egy 10 cm befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög.

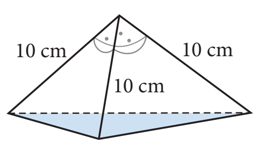
a) Mennyi karton szükséges egy ilyen tejesdoboz elkészítéséhez? Számítsuk hozzá az összeállításhoz még a felszín 5%-át!

b) Mennyi tej fér ebbe a dobozba?

Megoldás

a) A derékszögű háromszögek területe egyenként

$$\frac{10 \cdot 10}{2} = 50\ (\text{cm}^2).$$



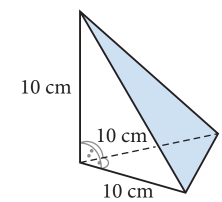
A háromszögek átfogója $10 \cdot \sqrt{2} \approx 14{,}1$ (cm), így az alapot alkotó szabályos háromszög területe

$$\frac{(10\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \approx 86{,}6\ \text{cm}^2.$$

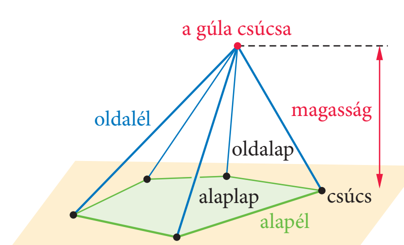
A négy oldallap együttes területe pedig körülbelül $236{,}6\ \text{cm}^2$. A felhasználandó karton mennyisége ennek a 105%-a, vagyis közelítőleg $236{,}6\ \text{cm}^2 \cdot 1{,}05 \approx 248\ \text{cm}^2$.

b) A térfogat kiszámításához billentsük a gúlát valamelyik derékszögű háromszög alakú lapjára! Most ez a lap lett a gúla alaplapja, a rá merőleges 10 cm-es él pedig éppen a gúla magassága. A gúla térfogata *az alapterület és a magasság szorzatának a harmadrésze*, vagyis

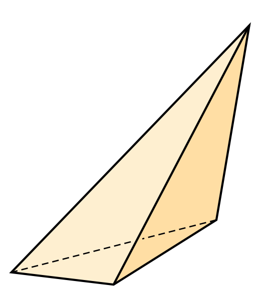
$$\frac{50 \cdot 10}{3} = \frac{500}{3} \approx 166{,}7\ (\text{cm}^3).$$



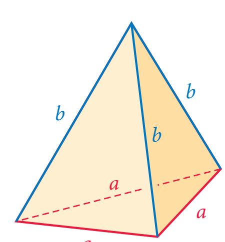
ELMÉLET



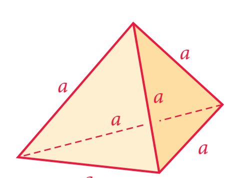
- A **gúlát** egy sokszög és annyi háromszög határolja, ahány oldalú a sokszög. A gúla csúcsának az alapsíktól való távolságát a gúla **magasságának** nevezzük. Ha a gúla alaplapja szabályos sokszög, és minden oldaléle egyenlő hosszúságú, **szabályos gúlának** nevezzük.
- Ábránkon a gúla alaplapja ötszög, ezért ezt *ötoldalú gúlának* mondjuk. Az ötoldalú gúlának 6 lapja van: 1 alaplapja és 5 oldallapja.
- Bizonyítható, hogy ha egy gúla minden oldaléle egyenlő hosszú, akkor a gúla alaplapja körbe írható sokszög, és a kör középpontja a gúla csúcsának az alapsíkon lévő merőleges vetülete.
- A háromoldalú gúlát görög eredetű szóval **tetraédernek** nevezzük. A tetraéder 4 lapja közül bármelyik tekinthető alaplapnak.
  A **szabályos háromoldalú gúla** alaplapja szabályos háromszög, oldallapjai egyenlő szárú háromszögek.
  A **szabályos tetraéder** olyan szabályos háromoldalú gúla, amelynek mind a 4 lapja szabályos háromszög.



tetraéder



szabályos háromoldalú gúla

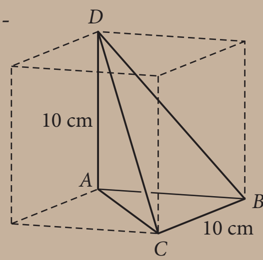


szabályos tetraéder

- A gúla **felszíne** a lapok területének az összege.
- A gúla térfogatát megkapjuk, ha az alapterület és a magasság szorzatát elosztjuk 3-mal: $\boldsymbol{V = \dfrac{T_{\text{alaplap}} \cdot m}{3}}$.

FELADAT

1. Az ábra egy tejszínesdoboz tervét mutatja. A doboz alakja egy olyan tetraéder, amelynek mind a négy csúcsa egy 10 cm élű kocka egy-egy csúcsával esik egybe.



a) Bence azt állítja, hogy ez egy furcsa tetraéder, mert mindegyik lapja derékszögű háromszög. Igaza van-e Bencének?

b) Mekkorák a tetraédert határoló háromszögek oldalai és szögei?

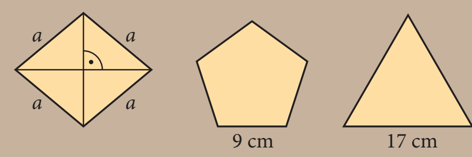
c) Rajzold meg a tetraéder hálózatát!

d) Számítsd ki a tetraéder felszínét!

e) Számítsd ki a tetraéder térfogatát!

f) A tetraéder térfogatának ismeretében számítsd ki, hogy mekkora a tetraédernek az a magassága, amelyik a *BCD* lapjához tartozik (vagyis milyen magas a tetraéder, ha a vízszintes asztallapon a *BCD* lapján áll)!

2. Három gúla 15 cm magas, alaplapjukat az ábrák mutatják. A rombusz alapú gúla alaplapjának átlói 18 cm, illetve 15 cm hosszúak, a gúla csúcsából indított magassága a rombusz középpontjában végződik. A másik két gúla szabályos gúla. Melyik gúlának a legnagyobb és melyiknek a legkisebb



a) a térfogata,

b) a felszíne?

3. Egy tetraéder alapéleinek hossza 2,5 cm, 2,8 cm, 3,2 cm, az oldalélek hossza 4,1 cm, 4,3 cm és 4,6 cm.

a) Rajzold meg egy ilyen tetraéder hálózatát!

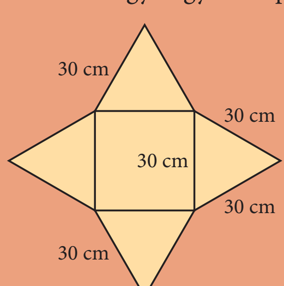
b) Számítsd ki a hálózathoz tartozó felszínt!

c) Hányféle tetraéder felel meg az adatoknak?

HÁZI FELADAT

1. A kidolgozott feladatban szereplő tejesdobozt a szabályos háromszög alakú lapjára állítva számold ki a magasságát! Ezzel a magassággal számolva is határozd meg a térfogatát!

2. Az ábrán egy négyzet alapú gúla hálózata látható.



a) Igaz-e, hogy ez a gúla
- tetraéder;
- szabályos gúla;
- négyoldalú gúla?

b) Hány éle és hány csúcsa van ennek a gúlának?

c) Számítsd ki a gúla felszínét és térfogatát!

d) Készítsd el a gúla kicsinyített modelljét kartonpapírból! Az élek hossza legyen 5 cm!

3. Gondolatban ragassz össze az alaplapjánál két olyan gúlát, amelynek a hálózatát a 2. házi feladatban megadtuk!

a) Hány lapja, hány éle és hány csúcsa van ennek a testnek? (A keletkező test neve: *szabályos oktaéder*.)

b) Számítsd ki ennek a testnek a felszínét és a térfogatát!

11 A síkok hajlásszöge

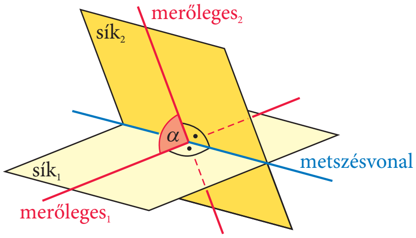
BEVEZETŐ

Két szabályos gúlára rátekintve általában könnyen megállapítjuk, hogy „mennyire meredekek” az oldallapjaik, vagyis hogy melyiknek az oldallapjai zárnak be nagyobb szöget az alaplap síkjával. Ugyancsak könnyen megállapítjuk, hogy melyik út síkja zár be nagyobb szöget a vízszintes síkkal (a meredekebb emelkedőn nehezebb felfelé menni), vagy hogy a háztetők síkjai kisebb vagy nagyobb szöget zárnak be egymással, illetve a vízszintes síkkal.

ELMÉLET

- Két párhuzamos síkra azt mondjuk, hogy a hajlásszögük nulla.
- Két metszősík esetén a hajlásszögüket visszavezetjük két metsző egyenes szögére a következő útmutatás szerint.

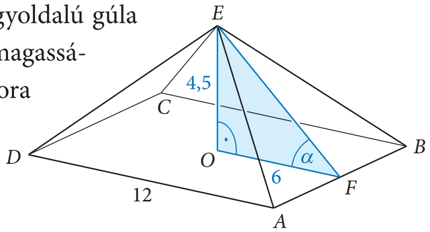
A két sík metszésvonalának egy tetszőleges pontjában – az egyik síkban is és a másik síkban is – merőleges egyenest állítunk a metszésvonalra. Az így kapott két metsző egyenes szögét nevezzük a két sík hajlásszögének (ezt a rajzon α-val jelöltük).



Megjegyzés
Két sík szöge a definíció szerint legfeljebb derékszög lehet; ha éppen derékszög, akkor azt mondjuk, hogy a két sík *merőleges egymásra*.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy szabályos négyoldalú gúla alapéle 12 cm, magassága 4,5 cm. Mekkora szöget zár be az alaplap síkjával az oldallap síkja?



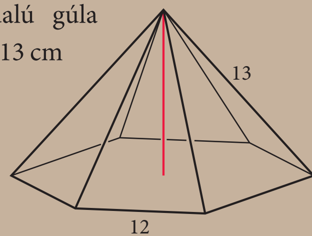
Megoldás
Mindegy, hogy melyik oldallapot választjuk, hiszen a szabályos gúla forgásszimmetriája miatt mindegyik oldallap ugyanakkora szöget zár be az alaplappal. Használjuk az ábra jelöléseit!

Az $ABCD$ négyzet középpontja az O pont, az AB alapél felezőpontja az F pont.
Az OF szakasz merőleges az AB-re, mert a négyzet középvonalának fele. Az EF szakasz merőleges az AB-re, mert az ABE háromszög egyenlő szárú.
Az alaplap és az (ABE háromszöget tartalmazó) oldallap síkjának metszésvonala tartalmazza az AB szakaszt, ezért az $OFE\sphericalangle$ megadja a két sík szögét (az ábrán α-val jelöltük).
Az EOF háromszög derékszögű, ezért $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4,5}{6} = 0,75$.
Ebből $\alpha \approx 36,9°$.

FELADAT

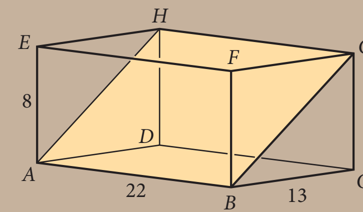
1. Számítsd ki a példában szereplő gúla
a) felszínét és térfogatát;
b) *ED* oldalélének az alaplap síkjával bezárt szögét!

2. Egy szabályos hatoldalú gúla alapéle 12 cm, oldaléle 13 cm hosszú.



a) Számítsd ki a gúla magasságát és térfogatát!
b) Számítsd ki a gúla oldalélének és alaplapjának a szögét!
c) Számítsd ki a gúla oldallapjának és alaplapjának a szögét!
d) Számítsd ki a gúla felszínét!

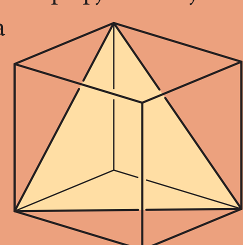
3. Az ábrán látható téglatest éleinek hossza 22 cm, 13 cm és 8 cm.



a) Számítsd ki az *ABGH* négyszög kerületét és területét!
b) Mekkora szöget zár be az *ABGH* négyszög síkja a téglatest lapsíkjaival?

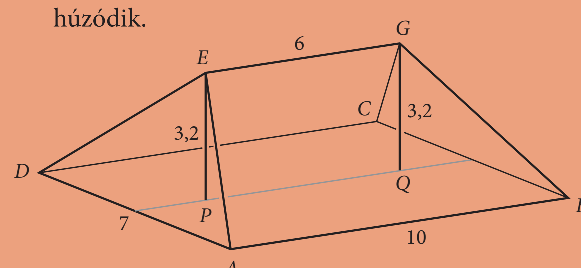
HÁZI FELADAT

1. Mekkora szöget zár be az ábrán látható kockába rajzolt háromszög síkja és a kocka alaplapjának síkja? Legyen a kocka éleinek hossza
a) 1 dm;
b) 24,3 cm;
c) $5\sqrt{3}$ dm!



2. Egy szabályos négyoldalú gúla magassága 8 cm, az oldallapok pedig 57°-os szöget zárnak be az alaplap síkjával.
a) Mekkora a gúla alapéle?
b) Mekkora a gúla felszíne és térfogata?
c) Mekkora szöget zárnak be az oldalélek egyenesei az alaplap síkjával?
d) Mekkora szöget zárhat be két oldalél egyenese?

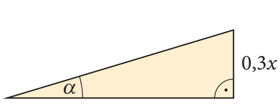
3. A háztető „alapja” téglalap, melynek szomszédos oldalai 10 méter és 7 méter hosszúak. Az *EP* és *GQ* függőleges tartógerendák 3,2 méteresek, a tetőgerinc 6 méter hosszú, és a téglalap középvonala felett húzódik.



a) Mekkora szöget zárnak be a vízszintes síkkal a tető különböző síkjai?
b) Mekkora szöget zár be egymással a két trapéz alakú rész síkja?
c) Mekkora a tetőtér térfogata?

RÁADÁS

Hány fokos a 30%-os lejtő, illetve emelkedő?

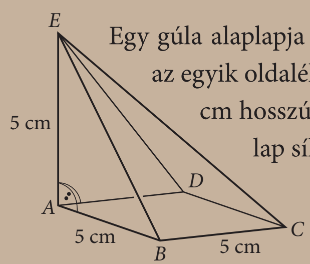


Megoldás
Egy lejtő esetén a százalékban megadott érték a szintkülönbség és a vízszintes szakasz hányadosa. 30%-os lejtő esetén $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{0{,}3x}{x}$, ezért $\alpha \approx 16{,}7°$.

12 Gyakorlás

FELADAT

1.



Egy gúla alaplapja 5 cm-es oldalú négyzet, az egyik oldaléle pedig, amely szintén 5 cm hosszúságú, merőleges az alaplap síkjára.

a) Melyik oldallap derékszögű háromszög?

b) Mekkora a 3 „ferde” oldalél hosszúsága?

c) Mutasd meg, hogy a négy oldallap között két-két egybevágó háromszög van!

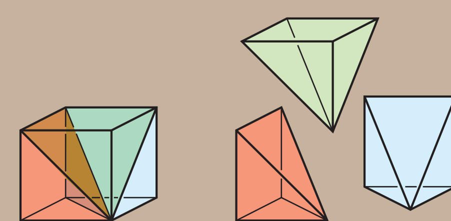
d) Mekkora a gúla felszíne?

e) Mekkora a gúla térfogata?

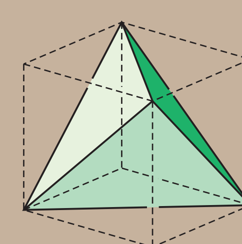
f) Melyik él mekkora szöget alkot az alaplap síkjával?

2. Bencéék azt a házi feladatot kapták, hogy készítsék el az 1. feladatban szereplő gúla modelljét papírból. Ehhez meg kellett rajzolniuk a gúla hálózatát. Rajzold meg te is a hálózatot!

3. Bence, Dönci és Jocó is elkészítette az 1. feladatban szereplő gúla modelljét. Dönci addig forgatta a három egyforma gúlát, míg egy kocka állt össze belőlük. Bence úgy gondolta, kívülről valóban kockát látnak, de belül biztosan van egy üres rész. Jocó számítással győzte meg Bencét, hogy Dönci valóban egy tömör kockát kapott. Győzd meg te is Bencét: hasonlítsd össze a 3 gúla térfogatának összegét a kocka térfogatával!



4. Egy 12 cm élű kockában megrajzolt hat átló egy tetraédert határoz meg.



a) Számítsd ki a tetraéder éleinek hosszát!

b) Mutasd meg, hogy a tetraéder szabályos!

c) Mekkora a tetraéder térfogata? (Javaslat: a kocka térfogatából vond le a szabályos tetraéderhez „toldott” négy darab háromoldalú gúla térfogatát!)

HÁZI FELADAT

1. Egyes becslések szerint a Kheopsz-piramis alapja eredetileg egy 232,4 méter oldalhosszúságú négyzet volt, magassága pedig 146,7 méter. Képzeljük el ezt a piramist szabályos gúlaként!

a) Ha az oldallapjait simára csiszolt kőlapokkal akarnánk befedni, akkor hány m^2 felülettel kellene számolnunk?

b) A piramis térfogatának körülbelül hány százaléka „üres” (kamrák, folyosók stb.), ha az építéshez körülbelül 2,5 millió m^3 követ használtak fel?

2. Egy szabályos gúla alaplapja 32 mm-es oldalú hatszög, a gúla magassága 56 mm.

a) Mekkorák a gúla oldalélei?

Ezt a gúlát egy, a magasság legfelső negyedelőpontján átmenő, az alappal párhuzamos síkkal 2 részre vágjuk.

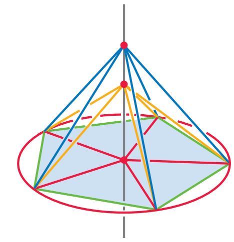
b) Mekkorák a kis gúla élei?

c) Hogy aránylik a keletkező kis gúla térfogata az eredetiéhez?

d) Hogy aránylik egymáshoz a gúla két részének a térfogata?

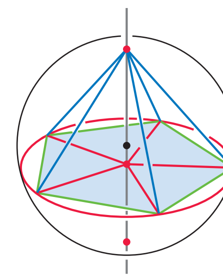
e) Mekkora a gúla két részének a térfogata?

RÁADÁS

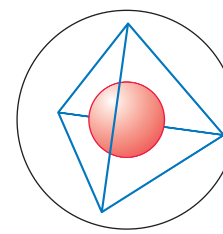


I. Gúlák és gömbök

Ha egy szabályos ötoldalú gúla alaplapjának középpontjában (a szabályos ötszög körülírt körének középpontjában) merőlegest állítunk az alaplapra, akkor a szabályos ötszöget e körül az egyenes körül forgatva, az minden 72°-os elforgatás után önmagába megy át. Mivel a forgástengely pontjai a forgatás során helyben maradnak, ezért a forgástengely mindegyik pontja egyenlő távolságra van a gúla alaplapjának mind az öt csúcsától. Az ilyen tulajdonságú pontok mind a forgástengelyen vannak, ezért a szabályos gúla csúcsa is rajta van ezen az egyenesen.
Megfigyelésünk bármely szabályos gúla esetében igaz.



Érdekes probléma: *minden szabályos gúla esetében van a csúcsból húzott magasságnak olyan pontja, amely az összes csúcstól egyenlő távolságra van.* Ez azt jelenti, hogy *minden szabályos gúlához tartozik egy olyan gömb, amely valamennyi csúcsán áthalad.* Adott gúlák esetében számítással megkereshetjük a köré írt gömb középpontját.



A Pitagorasz-tétel többszöri alkalmazásával igazolható, hogy *a szabályos tetraéder magasságának az oldalhoz legközelebbi negyedelőpontja egyenlő távolságra van a négy csúcstól*, vagyis ez a tetraéder köré írt gömb középpontja. A gömb sugara pedig a magasság háromnegyed részével egyenlő.
További érdekesség: ennek a testnek beírt gömbje is van! A beírt gömb középpontja ugyanaz, mint a tetraéder köré írt gömbé, a sugara pedig a magasság negyedrésze.

II. Szabályos testek

Láttuk, mennyi érdekes tulajdonsága van a *szabályos tetraédernek*. Jól ismerünk egy másik testet is, amelynek szintén sokféle izgalmas tulajdonsága van: ez a *kocka*. E kétfajta test közös tulajdonságai:

a) minden élük egyenlő;
b) minden lapjuk egybevágó szabályos sokszög;
c) mindegyik *szögletük* egyforma: a csúcsokból ugyanannyi él indul ki, és a szomszédos élek szöge mindenhol ugyanakkora.

A 10. lecke 3. házi feladatában találkoztunk már más olyan testtel is, amelynek mindezek a tulajdonságai megvannak. Az ott látott *szabályos oktaédernek* 8 háromszöglapja van.
Ha azt gondoljuk, hogy sokféle test felel meg a fenti a)–c) feltételeknek, akkor nagy csalódás vár ránk, ugyanis *összesen ötféle ilyen test van.* A már említett három testen kívül a *szabályos dodekaéder* és a *szabályos ikozaéder*. Ezt az ötféle testet közös néven **szabályos testeknek** nevezzük.
Rájuk vonatkozik a következő táblázat.

	Tetraéder	Kocka (hexaéder)	Oktaéder	Dodekaéder	Ikozaéder
A lapok alakja	háromszög	négyzet	háromszög	ötszög	háromszög
A lapok száma	4	6	8	12	20
A csúcsok száma	4	8	6	20	12
Az élek száma	6	12	12	30	30

Néhány érdekes kapcsolat a **szabályos** testek között:

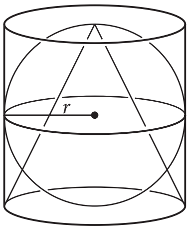
- a szabályos tetraéder lapközéppontjai egy újabb szabályos tetraédert határoznak meg;
- a kocka lapközéppontjai egy szabályos oktaédert határoznak meg;
- a szabályos oktaéder lapközéppontjai egy kockát határoznak meg;
- a szabályos dodekaéder lapközéppontjai egy szabályos ikozaédert határoznak meg;
- a szabályos ikozaéder lapközéppontjai egy szabályos dodekaédert határoznak meg.

A szabályos testek neveiket oldallapjaik számáról kapták. Görögül az ikoza-, dodeka-, okta-, hexa-, tetra- szavak jelentése: 20, 12, 8, 6, 4.

13 Forgáskúp

KIDOLGOZOTT FELADAT

Arkhimédész nevéhez kapcsolódik a híres ábra, amelyik egy forgáshengert, egy ebbe írt gömböt és forgáskúpot mutat. A gömb sugara ugyanakkora, mint a henger alapkörének sugara. A henger magassága az alapkörének átmérőjével egyenlő. A forgáskúp alapköre a henger alapkörével egyezik meg. A kúp csúcsa a henger fedőlapjának középpontja.



a) Számítsuk ki a három test térfogatának arányát! (Legyen r a henger sugara!)

b) Számítsuk ki a henger, a gömb és a kúp felszínét, ha a henger alapkörének sugara 5 cm!

Megoldás

a) A forgáskúp térfogatát ugyanúgy számolhatjuk ki, mint a gúlák térfogatát: $V_{kúp} = \frac{T_{alaplap} \cdot m}{3}$, amelyet az $m = 2r$ kapcsolat miatt így is írhatunk: $V_{kúp} = \frac{r^2\pi \cdot 2r}{3} = \frac{2}{3} \cdot r^3\pi$.

A gömb térfogata: $V_{gömb} = \frac{4}{3} \cdot r^3\pi$, tehát éppen kétszerese a kúp térfogatának.

A forgáshenger térfogata: $V_{henger} = T_{alaplap} \cdot m = r^2\pi \cdot 2r = 2 \cdot r^3\pi$, tehát éppen háromszorosa a kúp térfogatának.

Így $V_{kúp} : V_{gömb} : V_{henger} = 1 : 2 : 3$.

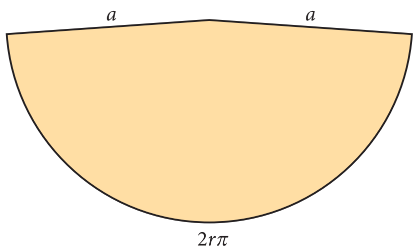
b) A henger magassága 10 cm, ezért a felszíne: $A_h = 2T_{alaplap} + T_{palást} = 2 \cdot 5^2\pi + 2 \cdot 5\pi \cdot 10 = 150\pi\ (\mathrm{cm}^2)$.

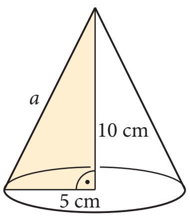
A gömb sugara 5 cm, ezért a felszíne: $A_g = 4r^2\pi = 4 \cdot 5^2\pi = 100\pi\ (\mathrm{cm}^2)$. Ez pontosan kétharmada a henger felszínének.

Megjegyzés

Arkhimédész észrevette, hogy a forgáshengerbe írt gömb és a henger felszínének aránya minden esetben 2 : 3, ugyanúgy, mint a térfogatuk aránya. Erre a felfedezésére nagyon büszke volt.

Kívánsága szerint sírkövére a hengerbe írt gömb és kúp körvonalait vésték. Halála után 150 évvel a híres felirat alapján sikerült azonosítani a sírját.





A kúp felszínét az alaplap területének és a kúppalást területének összege adja: $A_k = T_{alaplap} + T_{palást}$.

A kúp alapterülete: $T_{alaplap} = 25\pi\ (\mathrm{cm}^2)$.

A forgáskúp kiterített palástja olyan körcikk, amelynek a sugara a forgáskúp alkotója, körívének hossza pedig a kúp alapkörének kerületével egyenlő.

A kúp alkotójának hosszát Pitagorasz-tétellel számíthatjuk ki: $a = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125}\ (\mathrm{cm})$.

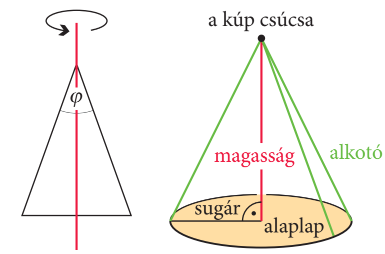
Az alapkör kerülete 10π (cm), tehát a kiterített palást egy olyan körcikk, amelynek a sugara $\sqrt{125}$ cm, íve pedig 10π cm hosszú.

A körcikk területét kiszámíthatjuk az $\frac{i_{cikk} \cdot r_{cikk}}{2}$ képlettel is, tehát $T_{palást} = \frac{10\pi\sqrt{125}}{2} = 25\pi\sqrt{5}\ (\mathrm{cm}^2)$.

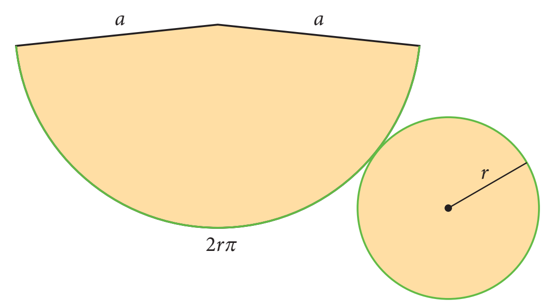
A kúp felszíne: $A_k = 25\pi + 25\pi\sqrt{5} = 25\pi\left(1 + \sqrt{5}\right)\ (\mathrm{cm}^2)$.

Ha közelítő értékekkel számolunk, akkor azt kapjuk, hogy a henger felszíne 471 cm², a gömb felszíne 314 cm², a kúp felszíne pedig 254 cm².

ELMÉLET

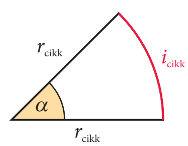


- Ha egy egyenlő szárú háromszöget megforgatunk a szimmetriatengelye körül, **forgáskúp** keletkezik.
- A forgáskúpot egy körlap (a kúp alapköre) és a **kúppalást** határolja. A kúp csúcsát az alapkör pontjaival összekötő szakaszok a kúp **alkotói** (a). A forgáskúp minden alkotója egyenlő hosszú.
- A kúp alapkörének az átmérője egyenlő a háromszög alapjával, alkotói pedig akkorák, mint a háromszög szárai. A megforgatott egyenlő szárú háromszög szárszögét a **forgáskúp nyílásszögének** nevezzük (φ).
  A kúp csúcsát az alapkör középpontjával összekötő szakasz merőleges az alapkör síkjára, ez a forgáskúp **magassága** (m).



- A forgáskúp palástja síkba kiterítve egy körcikk, amelynek sugara a kúp alkotójával, határoló íve pedig a kúp alapkörének kerületével egyenlő hosszú. Ebből adódik, hogy a forgáskúp felszíne:
  $A = T_{alaplap} + T_{palást} = r^2\pi + r\pi a = r\pi(r + a)$.
- A forgáskúp **térfogatát** megkapjuk, ha az alapterület és a magasság szorzatát elosztjuk 3-mal: $V = \dfrac{T_{alaplap} \cdot m}{3}$.

Emlékezzünk!



- A körcikk területe: $T_{cikk} = \dfrac{i_{cikk} \cdot r_{cikk}}{2}$.
- A körcikk középponti szöge: $\alpha = \dfrac{i_{cikk}}{r_{cikk}}$ (radián), vagy $\alpha = \dfrac{180}{\pi} \cdot \dfrac{i_{cikk}}{r_{cikk}}$ (fok).

FELADAT

1. Egy forgáskúp alapkörének az átmérője 7,5 cm, a magassága pedig 9 cm. Mekkora
a) a felszíne;
b) a térfogata;
c) a nyílásszöge?

2. Mekkora szöget alkotnak az 1. feladatban szereplő forgáskúp alkotói az alapsíkkal?

3. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 4,2 dm, szára 2,9 dm hosszú. A háromszöget megforgatjuk a szimmetriatengelye körül, így egy forgáskúpot kapunk.
a) Mekkora a kúp nyílásszöge?
b) Mekkora a kúp térfogata?
c) Mekkora a kúp kiterített palástjának középponti szöge?
d) Mekkora a kúp felszíne?

HÁZI FELADAT

1. Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza 35 mm és 84 mm. Ezt a háromszöget elforgatjuk a hosszabbik befogó egyenese körül 360°-kal.
a) Sorold fel a keletkező test tulajdonságait!
b) Számítsd ki a felszínét és a térfogatát!

2. Az 1. házi feladatban megadott háromszöget nem forgatjuk teljesen körbe, csak 120°-kal fordítjuk el.
a) Sorold fel a keletkező test tulajdonságait!
b) Számítsd ki a felszínét és a térfogatát!

3. Egy 88 mm magasságú forgáskúp alkotói 45°-os szöget alkotnak az alapkör síkjával. Mekkora
a) az alapkör sugara;
b) az alkotó;
c) a kúp felszíne;
d) a kúp térfogata;
e) a kúp nyílásszöge?

14 Kúpszerű testek

BEVEZETŐ

Hajnit és Bencét édesanyjuk a piacra küldte bevásárolni. A gyerekek hazafelé vettek egy adag pattogatott kukoricát, amit az árus egy tölcsérszerűen összetekert papírzacskóba mért bele. A zacskóban körülbelül 20 centiméter magasan állt a pattogatott kukorica.

– Osszuk el igazságosan! – mondta Hajni. – Én megeszem a felső felét, tiéd az alsó!

– No és meddig tart a „felső fele”? – kérdezte Bence. – Hány centi vastag réteg a tiéd?

Ez a feladat több kérdést is felvet:

a) *Milyen mértani testre emlékeztet a papírzacskó?* Hegyes, mint a forgáskúp, de nem kör alakú az alaplapja.

b) *Vajon hogy lehet kiszámítani a kukorica térfogatát? Van-e ilyen testhez térfogatképlet?*

c) *Hányszor annyi jutott volna Hajninak, mint Bencének, ha a felső 10 cm-es réteget ette volna meg?* (Ezt hasonló testek megfigyelésével lehet kiszámítani.)

d) *Milyen magas réteg a teljes kukoricamennyiség fele a zacskó alján, illetve a tetején?* (Ez már fogós kérdés, de hasonlósággal szintén megoldható!)

ELMÉLET

Ha egy síkidomot határoló görbe minden pontját összekötjük egy, a görbe síkjára nem illeszkedő adott ponttal, akkor az így kapott felület és a síkidom által határolt testet **kúpszerű testnek** (röviden **kúpnak**) nevezzük. (Figyelem: a matematikában görbének nevezzük a törött vonalat is.)

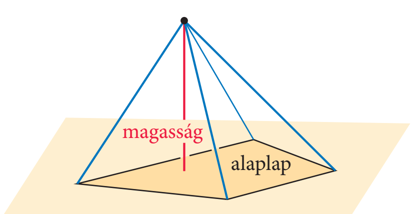
A kiindulásul vett síkidom a kúp **alaplapja**, az adott pont a kúp **csúcsa**.

A kúp csúcsát és az alaplapot határoló görbe pontjait összekötő szakaszok a kúp **alkotói**, a kúp csúcsának és az alaplap síkjának a távolsága a kúp **magassága** (m).

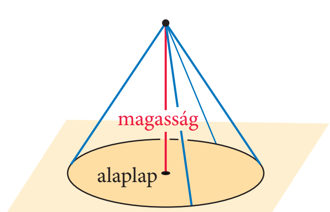
A kúp alkotói által meghatározott felületet a kúp **palástjának** nevezzük.

Ha a kúpszerű test alaplapja sokszög, akkor gúlának nevezzük, ha az alaplap kör, akkor pedig **körkúpnak**. A **forgáskúp** különleges körkúp, amelynél a csúcsból az alaplapra állított merőleges az alapkör középpontján megy át.

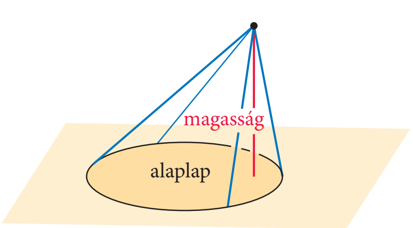
A forgáskúpot **egyenes körkúpnak** is nevezzük. Ha a körkúp nem ilyen, akkor **ferde kúpnak** mondjuk. Az egyenes körkúp magasságának egyenesét a körkúp **tengelyének** is nevezzük. Ez a tengely az egyenes körkúp (forgáskúp) forgástengelye vagy szimmetriatengelye.



gúla



forgáskúp



ferde kúp

- Bebizonyítható, hogy minden kúp térfogata kiszámítható úgy is, hogy az alaplap területét megszorozzuk a kúp magasságával, és a kapott szorzatot elosztjuk 3-mal: $V_{kúp} = \frac{T_{alaplap} \cdot m_{kúp}}{3}$.
- A kúpszerű test felszínére is igaz, hogy ez az alaplap és a palást területének összege: $A = T_{alaplap} + T_{palást}$. Ilyen testek esetében azonban sokszor nem találunk egyszerű kiszámítási módot a palást területére.

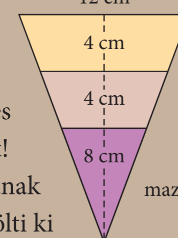
FELADAT

1. Egy építkezéshez 2 köbméter sódert rendeltek. A rendelt áru meg is érkezett.
A sóderkupac nagyjából kúp alakú, az alaplapja 3 m átmérőjű körnek látszik, a kupac magassága pedig 80 cm körül van. Számítsd ki az adatokból, hogy körülbelül mennyi a sóderkupac térfogata!

2. Egy forgáskúp alapkörének a sugara 24 cm, magassága 45 cm. Ezt a forgáskúpot az alaplapra merőleges félsíkokkal szétvágjuk 4 olyan kúpszerű testre, amelyek alaplapja egy-egy körcikk. A félsíkok a forgáskúp magasságára illeszkednek. A körcikkek középponti szöge 30°, 45°, 120° és 165°. Mekkora a keletkezett kúpszerű testek

a) felszíne; **b)** térfogata?

3. „Finom csemege" néven 16 cm magas, forgáskúp alakú csomagolásban egy különleges édesség kapható, amelyben „legalul" mazsola, majd mandula, és „legfelül" földimogyoró található. Az egyes összetevők mennyiségét a mellékelt ábra szemlélteti.



a) Számítsd ki a teljes csomag térfogatát!

b) A teljes térfogatnak hány százalékát tölti ki a mazsola, a mandula, illetve a földimogyoró?

c) A mazsola egységára 1000, a mandula egységára 3900, a földimogyoró egységára 1200 forint kilogrammonként. Az egységárak ismeretében hogyan indokolható a gyártó csomagolási technikája?

d) Ha a fenti csomagolásnál kiszámolt mennyiségű földimogyoró lenne legalul, akkor mekkora magasságú részt foglalna el a kúpban?

HÁZI FELADAT

1. A következő táblázat kúpszerű testekre vonatkozik. Töltsd ki az üres helyeket! Dolgozz a füzetedben!

Alapterület	24,6 cm^2	246 cm^2	24,6 cm^2	246 cm^2	5,88 cm^2	58,8 mm^2
Magasság					2,17 cm	21,7 mm
Térfogat	43,5 cm^3	435 cm^3	4350 cm^3	43,5 cm^3		

2. Válaszolj a Bevezető c) részében megfogalmazott kérdésre: Hányszor annyi (pattogatott kukorica) jutott volna Hajninak, mint Bencének, ha a felső 10 cm-es réteget ette volna meg?

3. Egy meteorit becsapódása szabálytalan alakú, nagyjából kúpszerű krátert hagyott maga után, amelyet később a beleömlő patak krátertóvá töltött fel. Körülbelül hány köbméter víz lehet a tóban, ha a víz felülete 2,4 km^2 és a legnagyobb mélysége 6 méter?

4. Hivatalokban, üzletekben is egyre többször láthatunk ásványvíz-automatákat, amelyekből egy kis kar lenyomásával egy papírpohárnyi vizet tölthetünk magunknak. Egy dizájner kúp alakú, egyszer használatos papírpoharakat tervez.

a) Legfeljebb mennyi vizet tölthetünk egy olyan kúp alakú papírpohárba, melynek magassága 9 cm, átmérője pedig 6 cm?

b) Hány dm^2 anyag kell egy 100 darabos pohárkészlet gyártásához? (Az átfedések miatt az elméleti értéket meg kell növelni 5%-kal.)

15 Csonka gúla, csonka kúp

BEVEZETŐ

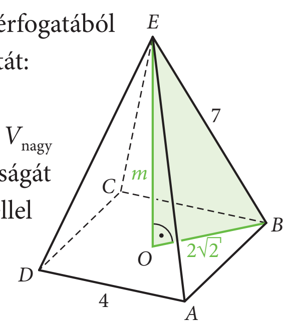
A franciaországi Valençay (ejtsd válanszé) városában készülő, hasonló nevű kecskesajt csonka gúla alakú. Egy legenda szerint ennek a formának „történelmi magyarázata” van. Napóleon – kudarcba fulladt egyiptomi hadjáratából hazatérve – állítólag annyira feldühödött az akkor még teljesen piramis formájú sajt láttán, hogy egy kardcsapással levágta a tetejét. Az ilyen módon „megcsonkított” formát a mai napig őrzi ez a sajt.

KIDOLGOZOTT FELADAT

A bevezetőben említett sajt alakja a „napóleoni vágás” előtt szabályos négyoldalú gúla volt, amelynek alapéle 4 cm, oldaléle pedig 7 cm hosszú volt. Az alaplapjával párhuzamos vágással keletkező kisebb gúla magassága az eredeti gúla magasságának 60%-a. A gúla másik része egy **csonka gúla**. Számítsuk ki a csonka gúla térfogatát!

Megoldás

A lemetszett kisebb gúla középpontosan hasonló az eredeti gúlához. A hasonlóság aránya $k = 0{,}6$, ezért a térfogatok aránya: $\frac{V_{\text{kicsi}}}{V_{\text{nagy}}} = k^3 = 0{,}6^3 = 0{,}216$. A csonka gúla térfogatát megkapjuk, ha az eredeti gúla térfogatából levonjuk a levágott gúla térfogatát:



$V_{\text{csonka}} = V_{\text{nagy}} - V_{\text{kicsi}} =$

$= V_{\text{nagy}} - 0{,}216 \cdot V_{\text{nagy}} = 0{,}784 \cdot V_{\text{nagy}}$

Az eredeti „nagy” gúla magasságát az ábra szerint Pitagorasz-tétellel számolhatjuk.

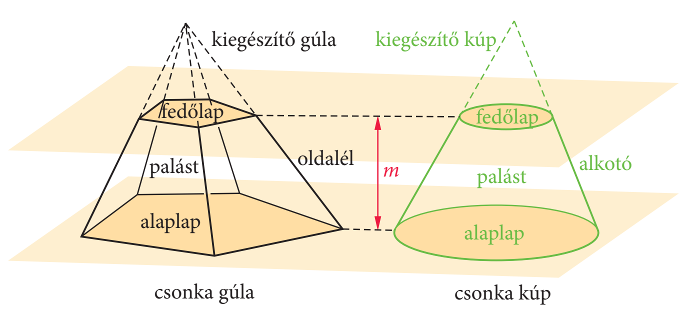
$m = \sqrt{7^2 - (2\sqrt{2})^2} =$

$= \sqrt{41} \approx 6{,}4$ (cm)

A nagy gúla térfogata: $V_{\text{nagy}} \approx \frac{16 \cdot 6{,}4}{3} \approx 34{,}1$ (cm^3).

A csonka gúla térfogata: $V_{\text{csonka}} \approx 0{,}784 \cdot 34{,}1 \approx 26{,}7$ (cm^3).

ELMÉLET



Ha egy gúlát/kúpot az alaplapjával párhuzamos síkkal elmetszünk, akkor két test keletkezik. Egy olyan gúla/kúp, amely középpontosan hasonló az eredetihez, továbbá egy másik test, amelyet **csonka gúlának**/**csonka kúpnak** nevezünk.

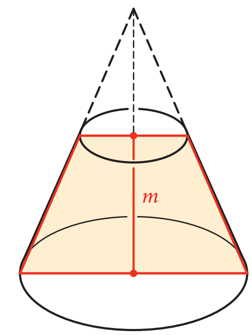
A csonka gúlát/csonka kúpot két középpontosan hasonló síkidom – a test **alaplapja** és **fedőlapja** –, továbbá a test **palástja** határolja. A csonka gúla palástját annyi **trapéz** alkotja, ahány oldala van az alaplapnak. Ha az elmetszett test egy egyenes körkúp, akkor a csonka kúp palástja síkba kiterítve egy körgyűrűcikk.

Az alaplap és a fedőlap síkjának távolságát a csonka gúla/csonka kúp **magasságának** nevezzük.

A csonka kúp **alkotói** az eredeti „teljes” kúp alkotóinak a csonka kúp palástjára illeszkedő szakaszai.

Megjegyzések

– Ha a csonka gúla egy szabályos n oldalú gúlából származik, akkor a neve: **szabályos** n **oldalú csonka gúla**.
– A csonka gúlát sokszögek határolják, ennek megfelelően használhatjuk az alapél, oldalél, oldallap elnevezéseket.
– Ha a csonka kúp forgáskúpból származik, akkor a neve: **egyenes csonka kúp**.
– Ha az egyenes csonka kúpot a tengelyére illeszkedő síkkal metsszük, akkor a síkmetszet szimmetrikus trapéz. Ezt a síkmetszetet **tengelymetszetnek** is nevezzük.
– A térfogat kiszámításának egyik módja szerepelt a kidolgozott feladatban: az eredeti gúla/kúp és a lemetszett, hozzá hasonló gúla/kúp térfogatának különbségeként számolható a csonka gúla/csonka kúp térfogata.

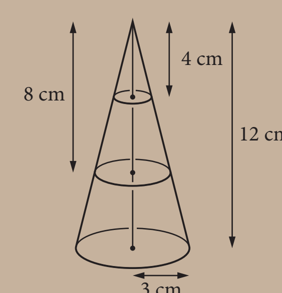


FELADAT

1. Egy szabályos négyoldalú gúla magassága 8 cm, az oldallapjai pedig 45°-os szöget zárnak be az alaplap síkjával. Ebből a gúlából – egy, az alaplapjával párhuzamos síkkal – levágunk egy 6 cm magas gúlát. Számítsd ki

a) az eredeti és a levágott gúla alaplapjának területét;
b) az eredeti és a levágott gúla térfogatát, valamint a keletkező csonka gúla térfogatát is;
c) a levágott gúla és a megmaradt csonka gúla felszínét!

2. Egy forgáskúp alapkörének sugara 3 cm, magassága 12 cm. A kúp csúcsától 4, illetve 8 cm távolságban elmetsszük a kúpot az alaplapjával párhuzamos két síkkal. Így egy kis kúp és két csonka kúp keletkezik. Számítsd ki mindhárom test térfogatát!



3. Egy szabályos négyoldalú csonka gúla alaplapja 12 cm oldalú négyzet, fedőlapja 8 cm oldalú négyzet, magassága 6 cm.

a) Számítsd ki a csonka gúla kiegészítő gúlájának magasságát!
b) Számítsd ki a csonka gúla térfogatát!

HÁZI FELADAT

1. Egy szabályos négyoldalú gúla oldalélei 10 cm hosszúak, az oldalélek az alaplap síkjával 52°-os szöget zárnak be.

a) Számítsd ki a gúla magasságát és az alapélének hosszát!
b) Mekkora térfogatú részekre vágja a gúlát az a sík, amelyik párhuzamos az alaplapjával, és attól 2 cm távolságra van?

2. Egy egyenes csonka kúp alapkörének sugara 10 cm, fedőkörének sugara 4 cm, magassága 5 cm.

a) Milyen magas az a kúp, amelyből ez a csonka kúp származik?
b) Számítsd ki a szereplő két kúp és a csonka kúp térfogatát!

16 Csonkakúp-szerű testek térfogata

BEVEZETŐ

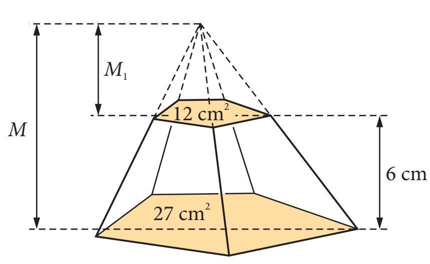
Steinmann felel. Ez különleges, ünnepélyes pillanat. (…) Maga a tanár is ünnepélyes. Oldalt ül le a székre, összetett ujjakkal gondolkodik. A jó tanuló a táblához megy, és kezébe veszi a krétát. A tanár gondolkodik. …
– Hát – mondja a tanár, és gondolkodva húzza a szót –, majd valami érdekes példát veszünk …
A jó tanuló udvariasan és végtelen megértéssel köhög. Természetesen valami érdekes példát, az érdekes helyzetnek megfelelőt. (…)
– Vegyünk egy kúpot …
– Egy kúpot – mondja Steinmann… De már ezt is úgy tudja mondani, ez a Steinmann, annyi megértéssel, olyan okosan: csak ő tudja, mennyire kúp az, amit veszünk. Én, Steinmann, a legjobb tanuló az egész osztályban, veszek egy kúpot, mivel engem, mint az erre legalkalmasabbat, megbízott a társadalom. Még nem tudom, miért vettem a kúpot, de nyugodtak lehettek mindannyian, bármi történjék ezzel a kúppal, én is ott leszek a helyemen, és megbirkózom vele.
– Különben – mondja a tanár hirtelen –, vegyünk inkább egy csonka gúlát.
– Csonka gúla – ismétli a jó tanuló, ha lehet, még értelmesebben. Ő a csonka gúlával éppen olyan határozott, barátságos, bár fölényes viszonyban van, mint a kúppal. Mi neki egy csonka gúla? Ő nagyon jól tudja, őt nem lehet félrevezetni, a csonka gúla is csak olyan gúla, mint más, normális gúla, egyszerű gúla, amilyent egy Eglmayer is el tud képzelni – csak le van vágva belőle egy másik gúla.
A felelés rövid ideig tart. Félszavakban beszélnek egymással, értik egymást, lassanként intim dialógus alakul ki tanár és a jó tanuló közt: mi már nem is értjük, ez az ő kettejük dolga, két rokonlélek, mely itt előttünk egyesül, a differenciálegyenletek éteri légkörében.

(Karinthy Frigyes: *A jó tanuló felel* – részlet)

KIDOLGOZOTT FELADAT

Számítsuk ki annak a csonka gúlának a térfogatát, amelynek az alaplapja 27 cm^2 területű, a fedőlapja 12 cm^2 területű, a magassága pedig 6 cm!

Megoldás
Az előző leckében úgy számoltuk ki a csonka gúla térfogatát, hogy a teljes gúla térfogatából kivontuk a kiegészítő gúla térfogatát. Csakhogy most nem ismerjük a teljes gúla magasságát, ráadásul az alaplapjáról sem tudunk semmi mást, csupán a területét.

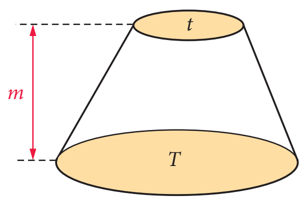


A megoldáshoz most is a hasonlóságon keresztül vezet az út. A teljes gúla és a kiegészítő gúla középpontosan hasonlók egymáshoz, a hasonlóság középpontja a közös csúcsuk. De mennyi a hasonlóságuk aránya?
A kicsinyítés aránya az ábra szerint a $k = \frac{M_1}{M}$ számmal egyenlő. Az alaplap kicsinyített képe a fedőlap, tehát a két síkidom területének aránya megegyezik a hasonlóságuk arányának négyzetével: $k^2 = \frac{t}{T} = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$.
A kicsinyítés aránya tehát $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$. Ez azt jelenti, hogy a teljes gúla magasságának $\frac{2}{3}$ része a kiegészítő gúla magassága, $\frac{1}{3}$ része pedig a csonka gúla magassága. Mivel ez utóbbi 6 cm, így a teljes gúla magassága 18 cm, a kiegészítő gúla magassága pedig 12 cm.
Így a teljes gúla térfogata $V_g = \frac{27 \cdot 18}{3} = 162$ (cm^3), a kiegészítő gúla térfogata pedig $V_{kg} = \frac{12 \cdot 12}{3} = 48$ (cm^3).
A csonka gúla térfogata tehát: $V_{cs} = V_g - V_{kg} = 114$ cm^3.

ELMÉLET

Bebizonyítható, hogy ha egy csonka gúla (csonka kúp) alaplapjának területe T, fedőlapjának területe t, magassága pedig m, akkor a térfogata kiszámítható így is:

$$\boldsymbol{V_{cs} = \frac{m}{3} \cdot (T + \sqrt{T \cdot t} + t)}.$$



Például

A kidolgozott feladatban megadott csonka gúla esetében a térfogat:

$$V_{cs} = \frac{6}{3} \cdot (27 + \sqrt{27 \cdot 12} + 12) = 2 \cdot 57 = 114 \ (\text{cm}^3).$$

Speciálisan az egyenes csonka kúp térfogata: $V = \frac{m \cdot \pi}{3}(R^2 + R \cdot r + r^2)$, ahol R az alapkör sugara, r a fedőkör sugara.

FELADAT

1. Van olyan zselés cukorka, mely közelítőleg csonka kúp alakú. Egy szem cukorka alaplapja 310 mm^2, fedőlapja 180 mm^2, magassága 17 mm.

a) Számítsd ki egy darab zselés cukorka térfogatát!

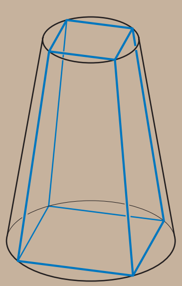
b) Számítsd ki a zselé sűrűségét, ha egy 10 dkg-os zacskóban 16 darab cukorka van!

2. Egy fenyőfából készült egyenes csonka kúp alapkörének a sugara 42 cm, a fedőköréé 12 cm, a magassága pedig 50 cm. Kifaragják belőle a lehető legnagyobb szabályos négyoldalú csonka gúlát.

a) Mennyi a csonka kúp térfogata?

b) Mennyi a csonka gúla térfogata?

c) Hány kg a hulladék, ha a fa sűrűsége 0,43 $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$?



3. A táblázatban egyenes csonka kúpok adatai szerepelnek. Melyiknek a legnagyobb és melyiknek a legkisebb a térfogata?

	Az alapkör átmérője	A fedőkör átmérője	A magasság	A kiegészítő kúp magassága	Térfogat
A	26,4 mm	15,2 mm	32,1 mm		
B		55 cm	48 cm	16 cm	
C	99 mm		76 mm	15,2 cm	

HÁZI FELADAT

1. A muffinsütő tálca mélyedései olyan csonka kúpok, amelyek alapköre 5 cm átmérőjű, az alkotó 3 cm hosszú, az „üres” fedőkör pedig 7 cm átmérőjű. Hány muffin készíthető 1 liter híg tésztából, ha a mélyedéseket teljesen megtöltjük?

2. Oldd meg az órai 2. feladatot azzal a változtatással, hogy a csonka kúpból szabályos hatoldalú csonka gúlát faragunk!

17 A csonka kúp felszíne

BEVEZETŐ

Szotyi kutyusnak védőgallért kell viselnie néhány napig, hogy ne rághassa le a kötést, amelyet az állatorvos tett a lábára. A védőgallér olyan, mint egy lámpaernyő, egy egyenes csonka kúp palástja.

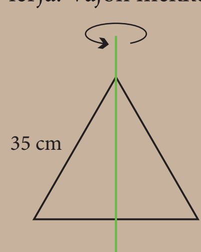
FELADAT

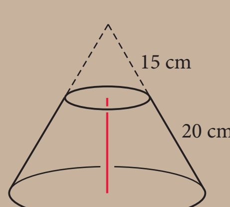
Dolgozzatok párokban!

1. Bence és Dönci terveket készítenek Szotyi kutyus védőgallérjához. Először is megmérik, hogy milyen hosszú a kutyus nyaka körül a pánt, amihez a gallért rögzítik. Ezt 47 cm-nek találják, ami azt jelenti, hogy a csonka kúp fedőkörének sugara $\frac{47\text{ cm}}{2\pi} \approx 7{,}5$ cm. Úgy gondolják, ahhoz, hogy a fejét tudja valamenynyire mozgatni, az alapkör átmérőjének 35 cm-nek kell lennie, és kb. 20 cm széles gallér elég ahhoz, hogy a kötéséhez ne férjen hozzá.

Ezek után **Bence terve** a következő:

Az egyszerűség kedvéért felvázol egy 35 cm-es oldalú szabályos háromszöget. Ha ezt megforgatja az egyik szimmetriatengelye körül, egy forgáskúpot kap. Ebből levág egy 7,5 cm sugarú kis kúpot, és a megmaradt egyenes csonka kúp palástjából lesz Szotyi gallérja. Vajon mekkora a gallér területe?





a) Indokold, hogy az ábrán szereplő adatok (15 cm és 20 cm) helyesek!

b) Mi a hasonlóság aránya a levágott kis kúp és a teljes kúp között?

Ezek után Bence felvázolja a teljes kúp palástját és szétvágja két részre: a kis kúp és a csonka kúp palástjára.

c) Készítsd el te is a palást vázlatát, és számítsd ki, hányadrésze a kis kúp palástja a teljes palástnak!

d) Hányadrésze a csonka kúp palástja a teljes palástnak?

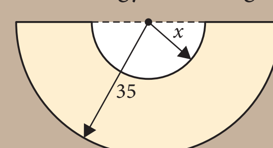
Ezután Bence kiszámítja a teljes kúp palástjának a területét, amiből könnyen megkapja a csonka kúp palástjának a területét.

e) Mekkora Szotyi gallérjának a területe?

Készítsd el te is Bence vázlatrajzait, és végezd el a számításait!

Dönci terve:

Felvázol egy 35 cm sugarú félkört.



a) Mekkora lesz ennek a félkörívnek a hossza?

b) Mekkora sugarú, vele koncentrikus félkört vágjon ki belőle, hogy annak az ívhossza megegyezzen a csonka kúp fedőkörének kerületével?

A megmaradt körgyűrűcikkből csonka kúpot formál.

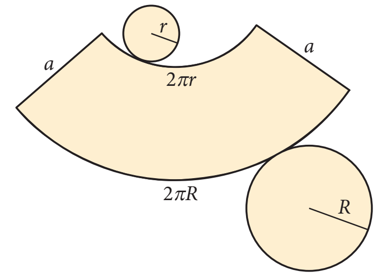
c) Mekkora a keletkezett csonka kúp alapkörének és fedőkörének a sugara, mekkorák az alkotók?

d) Mekkora a nagyobbik félkör és mekkora a kisebbik félkör területe?

e) Mekkora Szotyi gallérjának (vagyis a csonka kúp palástjának) a területe?

Készíts vázlatrajzokat Dönci elgondolásához, és végezd el a számításait! Hasonlítsd össze a két fiú számításainak eredményeit!

ELMÉLET



Vizsgáljunk egy olyan egyenes csonka kúpot, amelynél az alapkör sugara R cm, a fedőkör sugara r cm, alkotója a cm.
A test hálózata két körlemezből és a kiterített palástból áll. A palást egy *körgyűrűcikk*.
Bebizonyítható: egy körgyűrűcikk területét megkapjuk, ha a határoló körívek hosszának számtani közepét megszorozzuk a körgyűrű a szélességével:

$$T_{\text{palást}} = \frac{2R\pi + 2r\pi}{2} \cdot a.$$

Egyszerűsítés után: $T_{\text{palást}} = (R + r)a\pi$

Ha a palást területéhez hozzáadjuk az alapkör és a fedőkör területét, megkapjuk az egyenes **csonka kúp felszínét**:

$$A_{\text{csk}} = R^2\pi + r^2\pi + (R + r)a\pi = [R^2 + r^2 + (R + r)a]\pi.$$

Megjegyzés:
A palást területének kiszámítási módját könnyű megjegyezni, mert nagyon hasonlít a trapéz területképletéhez (a két alap hosszának számtani közepét megszorozzuk a trapéz magasságával).

FELADAT

2. Egy körgyűrű két körének átmérője 204 mm, illetve 30,6 cm. A körgyűrű síkjában, a középpontjából induló két félegyenes 120°-os szöget alkot. Készíts ábrát!

a) Mekkora a körgyűrű két részének (a két körgyűrűcikknek) a területe?

b) Mindkét körgyűrűcikkből egyenes csonkakúppalástot készítünk. Mekkora a csonka kúpok alapkörének és fedőkörének a sugara?

c) Mekkora a b) feladatban szereplő két csonka kúp magassága és térfogata?

HÁZI FELADAT

1. A következő táblázat egyenes csonka kúpokra vonatkozik.

	R	r	a	T	t	P	A
I.	12	6	10				
II.	12	3	10				
III.	6,15	4,76	3,11				

Az alapkör sugara R cm, a fedőköré r cm, az alkotók hossza a cm. Az alapkör területe T cm^2, a fedőkör területe t cm^2, a palást területe P cm^2, a csonka kúp felszíne A cm^2. Töltsd ki a táblázat üres helyeit!

2. Mekkora az 1. házi feladatban megadott I. csonka kúp magassága és térfogata?

3. Mekkora az 1. házi feladatban megadott II. csonka kúp kiegészítő kúpjának a nyílásszöge?

EMELT SZINT

Egy 27 cm magas forgáskúp alaplapjának az átmérője 48 cm. A magasságának a harmadolópontjain átmenő, az alappal párhuzamos síkokkal szétvágjuk három testre.

a) Mekkora az alapkör és a két metszetkör területe?

b) Hogy aránylik egymáshoz a három (közös csúcsú) forgáskúp alkotójának a hossza?

c) Hogy aránylik egymáshoz a három (közös csúcsú) forgáskúp palástjának a területe? Melyik mekkora?

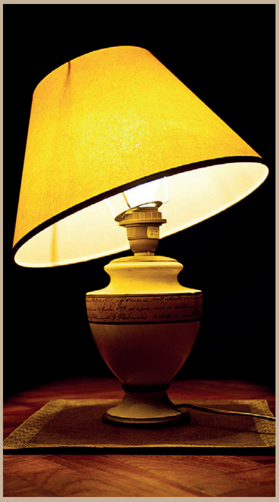
d) Hányszor akkora a metszésnél keletkező két egyenlő alkotójú csonka kúp palástjának a területe, mint a legkisebb kúp palástjának a területe?

e) Hogy aránylik egymáshoz a három (közös csúcsú) forgáskúp térfogata?

18 Csonka kúpok itt és ott

FELADAT

1. A *Világíts okosan! Kft.* háromféle lámpaernyőt készít. Az egyik hengerpalást alakú, a másik kettő olyan, mint egy egyenes csonka kúp palástja. Mindhárom „test” magassága 24 cm. A henger alapköre 18 cm sugarú, a sárga lámpaernyő két körének sugara 13 cm, illetve 20 cm, a zöld ernyő alapköre 24 cm, fedőköre 6 cm sugarú.



a) Készíts vázlatrajzot a három lámpaernyőről, írd rá a rajzodra az adatokat!
b) Melyik lámpaernyőnek mekkora az „alkotója”?
c) Melyik lámpaernyőnek van a legkisebb felszíne?
d) Mennyi anyag szükséges a háromfajta lámpaernyőhöz, ha 5%-ot hozzászámítanak a felszínhez az illesztések miatt?

2. Folytasd az 1. feladatot! A lámpaernyőkön az alaplap és a fedőlap köreit díszpánttal veszik körbe, és ugyanebből az anyagból hat alkotót is díszítenek. Melyik lámpaernyőhöz hány méter díszpántot használnak fel? Az illesztések miatt számíts fel 6%-nyi többletet!

3. Egy serpenyő nagyon hasonlít egy „nyitott” csonka kúpra. Az aljának az átmérője 18 cm, a fedőköréé 24 cm, az oldalán pedig 6 cm hosszt mérhetünk.
a) Hány négyzetcentiméternyi fém kellett az elkészítéséhez (a nyél nélkül)?
b) Hány cm^3 víz fér el a serpenyőben?
c) Hány cm^3 olajat öntöttünk az üres serpenyőbe, amikor a magasság feléig töltöttük olajjal?

4. A képen látható cérnatekercseket csonka kúp alakú kartonvázra tekercselték. Az egyik kartonváz alul 18 mm, felül pedig 12 mm átmérőjű. A kartonváz magassága 6,5 cm.

a) Mekkora az alkotó?
b) Hány cm^2 karton szükséges egy-egy ilyen váz elkészítéséhez, ha a hulladék és a ragasztás miatt 9% pluszmennyiséggel kell számolni?

HÁZI FELADAT

1. Egy egyenes csonka kúp alakú papírpohár alapkörének átmérője 4 cm, fedőkörének átmérője 6 cm, alkotója pedig 9 cm.
a) Hány cm^2 papír kell a pohár elkészítéséhez, ha az átfedések miatt 4% pluszfelülettel kell számolnunk?
b) Mekkora a pohár magassága?
c) Hány cm^3 víz van a pohárban, ha tele van, illetve ha a magasságának feléig van töltve?

2. Folytasd a 4. feladatot! Mekkora a térfogata a rátekercselt cérnának, ha a kartoncső teljes magasságában 7 mm „vastagon” tekercselték rá, azaz a cérna cséve alap- és fedőkörének sugara ennyivel nagyobb, mint a kartonváz sugara, a tekercs magassága pedig továbbra is 6,5 cm?

3. Egy vulkáni eredetű hegy tetején nagyjából csonka kúp alakú, 50 m mély kráter található. A hegy felső peremének kerülete 10 km, a kráter aljának területe körülbelül 7 km^2. Adj becslést, hány km^2 növényzet boríthatja a krátert!

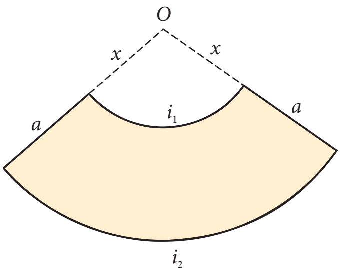
Vezúv

RÁADÁS

Igazoljuk, hogy az egyenes csonka kúp palástjának területe kiszámítható az előző lecke elméleti részében megadott módon is: ha az alkotó a hosszúságú, az alaplapja R sugarú kör, a fedőlapja pedig r sugarú kör, akkor $T_{\text{palást}} = (R + r)a\pi$.

Megoldás

Fejezzük ki a körgyűrűcikk területét a határoló ívek hosszával (i_1-gyel és i_2-vel), valamint a körgyűrűcikk szélességével (a-val)!



A körgyűrűcikk területét két körcikk területének különbségeként is kiszámíthatjuk:
$T = \dfrac{i_2(a+x)}{2} - \dfrac{i_1 x}{2}$. (Itt kétszer is felhasználtuk a körcikk területéről 11. osztályban tanult $T_{\text{cikk}} = \dfrac{i_{\text{cikk}} \cdot r_{\text{cikk}}}{2}$ összefüggést.)

A kivonást elvégezve: $T = \dfrac{(i_2 - i_1)x}{2} + \dfrac{ai_2}{2}$.

Az O középpontú hasonlóságot kihasználva: $\dfrac{a+x}{x} = \dfrac{i_2}{i_1}$.

Ebből: $ai_1 + i_1 x = i_2 x$, vagyis $(i_2 - i_1)x = ai_1$.

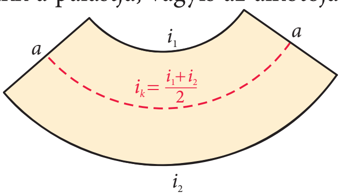
A T-re kapott képletben az első tört számlálójába ezt behelyettesítve: $T = \dfrac{ai_1}{2} + \dfrac{ai_2}{2} = \dfrac{i_1 + i_2}{2} \cdot a$.

Ezzel a kitűzött feladatot megoldottuk.

A kapott eredménynek szemléletes jelentése is van, ugyanis az $\dfrac{i_1 + i_2}{2}$ hosszúság nem más, mint a körgyűrűcikk **középkörívének** hossza. A középkörív hosszával a körgyűrűcikk területe még egyszerűbb formában is megadható: $T = i_k \cdot a$.

Figyeljünk meg most egy olyan csonka kúpot, amelynek a feladatban szereplő körgyűrűcikk a palástja, vagyis az alkotója a hosszúságú, az R sugarú alapkörének kerülete i_2, az r sugarú fedőkörének kerülete i_1.

Ekkor a palást területe $T_{\text{palást}} = \dfrac{i_1 + i_2}{2} \cdot a = \dfrac{2\pi R + 2\pi r}{2} \cdot a = (R + r)a\pi$.



19 Síkmetszetek

KIDOLGOZOTT FELADAT

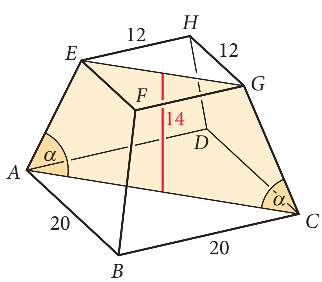
Egy szabályos négyoldalú csonka gúla alapéle 20 cm, fedőéle 12 cm, magassága 14 cm.

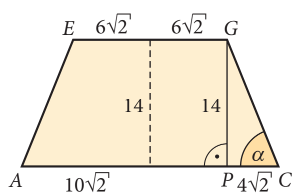
a) Mekkora szöget zárnak be az oldalélei az alaplap síkjával?

b) Mekkora szöget zárnak be az oldallapjai az alaplap síkjával?

Megoldás

a) Tekintsük a csonka gúlának azt a **síkmetszetét**, amelyet az ábra mutat!





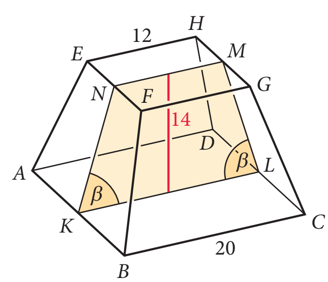
A síkmetszet az $ACGE$ húrtrapéz, amelynek a magassága 14 cm, hosszabbik alapja a csonka gúla alaplapjának átlója ($20\sqrt{2}$ cm hosszúságú), rövidebb alapja a csonka gúla fedőlapjának átlója ($12\sqrt{2}$ cm hosszúságú). A kérdezett szög a húrtrapéz hosszabb alapján fekvő α szögével egyenlő. Miért? Mert (például) a G-ből az alaplapra állított merőleges az AC átló P pontjában metszi az alaplap síkját.

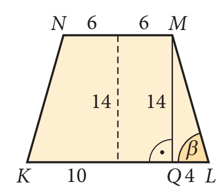
Feladatunkat tehát egy síkgeometriai feladatra vezettük vissza.

Az $ACGE$ húrtrapézban a GPC derékszögű háromszögből kiszámítjuk, hogy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{14}{4\sqrt{2}} \approx 2{,}4749$, s ebből $\alpha \approx 68°$.

A csonka gúla oldalélei tehát 68°-os szöget zárnak be az alaplap síkjával.

b) Ha a K, L, M, N élfelező pontokon átmenő **síkmetszetet** nézzük, akkor a $KLMN$ húrtrapéz KL alapján fekvő β szöge éppen a keresett szöggel egyenlő. Ugyanis az ML szakasz is és a KL szakasz is merőleges a DC-re.





A $KLMN$ húrtrapézban az MQL derékszögű háromszögből azt kapjuk, hogy $\operatorname{tg}\beta = \frac{14}{4} = 3{,}5$, s ebből $\beta \approx 74°$.

A csonka gúla oldallapjai tehát 74°-os szöget zárnak be az alaplap síkjával.

FELADAT

Dolgozzatok párokban!

1. Egy szabályos négyoldalú csonka gúla alapéle 30 cm, magassága 12 cm, az oldallapjai 70°-os szöget zárnak be az alaplap síkjával. Számítsd ki

a) a gúla fedőélének hosszát;

b) a gúla felszínét és térfogatát;

c) a gúla oldaléleinek az alaplappal alkotott szögét!

2. Egy forgáskúp alapkörének átmérője 18 cm, alkotójának hossza 12 cm.

a) Mekkora területű háromszöget metsz ki a kúpból egy olyan sík, amely illeszkedik a kúp forgástengelyére?

b) Mekkora a kúp nyílásszöge?

HÁZI FELADAT

1. Egy szabályos négyoldalú csonka gúla alapélei 63 mm, fedőélei 27 mm hosszúak. Az oldalélek 60°-os szöget alkotnak az alaplap síkjával.

a) Készíts ábrát a csonka gúla azon síkmetszetéről, mely két szemközti oldalélre illeszkedik!

b) Milyen hosszúak a síkmetszetet alkotó húrtrapéz párhuzamos oldalai?

c) Mekkora a csonka gúla magassága?

d) Számítsd ki a csonka gúla térfogatát!

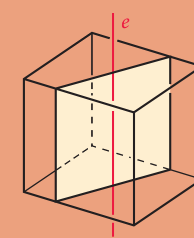
2. Egy szabályos négyoldalú gúla alapélei 12 cm-esek, magassága 20 cm. A magasság felezőpontján átmenő, az alaplappal párhuzamos síkkal szétvágjuk a gúlát egy kis gúlára és egy csonka gúlára.

a) Készíts ábrát a gúla azon síkmetszetéről, mely az alaplap középvonalára illeszkedik, és merőlegesen felezi az alaplapját!

b) Mekkorák a szétvágás során keletkező kis gúla alapélei és magassága?

c) Mekkora a keletkező kis gúla térfogata és felszíne?

3. Az *e* egyenes átmegy a kocka két szemközti lapjának középpontján. Messük el a kockát egy *e* egyenesre illeszkedő síkkal!



a) Milyen síkidomokat kaphatunk a kocka síkmetszeteként?

b) Melyik *e*-re illeszkedő sík esetén kapjuk a legkisebb, illetve a legnagyobb területű síkmetszetet? Mekkorák ezek a területek?

EMELT SZINT

1. Számítsd ki a kidolgozott feladatban szereplő csonka gúla

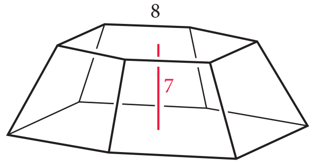
a) felszínét és térfogatát;

b) kiegészítő gúlájának felszínét és térfogatát!

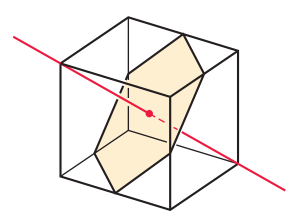
2. Egy szabályos hatoldalú csonka gúla alapélei 12 cm, fedőélei 8 cm hosszúak, magassága 7 cm. Mekkora

a) egy oldalélnek és az alaplap síkjának a szöge;

b) egy oldallapnak és az alaplap síkjának a szöge?



3. Bebizonyítható, hogy a kockát a testátlójára merőleges, a kocka középpontján átmenő síkkal elmetszve szabályos hatszöget kapunk síkmetszetként. A hatszög csúcsai a kocka megfelelő éleinek felezőpontjai. Legyen a kocka éleinek hossza 1 dm!



a) Számítsd ki a síkmetszet oldalainak hosszát!

b) Számítsd ki a síkmetszet területét!

c) Számítsd ki a hatszög átlóinak hosszát!

d) Milyen síkmetszeteket kaphatunk, ha a metszősíkot az eredeti helyzetével párhuzamosan eltoljuk?

20 Vegyes feladatok

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy szabályos háromoldalú gúla alapéle 8 cm, magassága 6 cm. Számítsuk ki

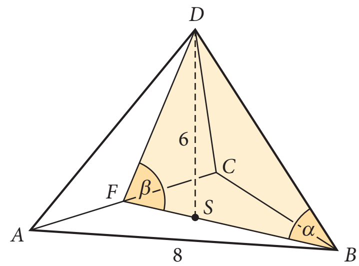
a) az oldalélek és az alaplap hajlásszögét;

b) az oldallapok és az alaplap hajlásszögét;

c) a gúla felszínét és térfogatát!

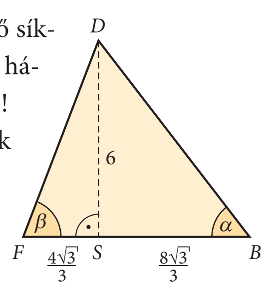
Megoldás

Készítsünk ábrát!



A gúla alaplapja az *ABC* szabályos háromszög, oldallapjai egyenlő szárú háromszögek. A *D* csúcsból megrajzolt magasság talppontja az *S* pont. A forgásszimmetria miatt $SA = SB = SC$. Tehát *S* az *ABC* háromszög körülírt körének középpontja. A háromszög szabályos, ezért az *S* egyben súlypontja is a háromszögnek (valamint a beírt körének középpontja és magasságpontja is).

Válasszunk a feladathoz illeszkedő síkmetszetet, amely az ábrán a *BDF* háromszög (*F* az *AC* él felezőpontja)!



a) Az alaplap *BF* súlyvonalának hossza $\frac{8\sqrt{3}}{2} \approx 6{,}93$ (cm).
Mivel *S* súlypont, ezért
$SF = \frac{BF}{3} \approx 2{,}31$ (cm),
$SB = \frac{2BF}{3} \approx 4{,}62$ (cm).
A *BSD* derékszögű háromszögből:
$\operatorname{tg} \alpha = \frac{SD}{SB} \approx \frac{6}{4{,}62} \approx 1{,}2987$, tehát $\alpha \approx 52{,}4°$.
A gúla élei körülbelül 52,4°-os szöget zárnak be az alaplap síkjával.

b) Az *FSD* derékszögű háromszögből:
$\operatorname{tg} \beta = \frac{SD}{SF} \approx \frac{6}{2{,}31} \approx 2{,}5974$, tehát $\beta \approx 68{,}9°$.
A gúla oldallapjai körülbelül 68,9°-os szöget zárnak be az alaplap síkjával.

c) Az alaplap területe $\frac{8^2\sqrt{3}}{4} \approx 27{,}7$ (cm^2), a gúla térfogata tehát: $V_g \approx \frac{27{,}7 \cdot 6}{3} \approx 55{,}4$ (cm^3).
A felszín kiszámításához szükség van az *ACD* oldallap *AC* oldalához tartozó *FD* magasságnak a hosszára. Ezt például a *DSF* derékszögű háromszögből, Pitagorasz-tétellel kapjuk meg (β ismeretében persze szögfüggvénnyel is számolhatnánk).
Tehát $FD^2 = FS^2 + SD^2 \approx 41{,}34$, amiből
$FD \approx 6{,}43$ (cm).
Az *ACD* oldallapú háromszög területe:
$\frac{AC \cdot FD}{2} \approx 25{,}7$ (cm^2),
a palást területe ennek a háromszorosa, vagyis 77,1 (cm^2).
A gúla felszíne közelítőleg: $27{,}7 + 77{,}1 = 104{,}8$ (cm^2).

FELADAT

1. A Catedral Metropolitana do Rio de Janeiro csonka kúp alakú építmény alapköre 96 m átmérőjű, magassága 75 méter, az alkotók 65°-os szöget zárnak be a vízszintes síkkal.

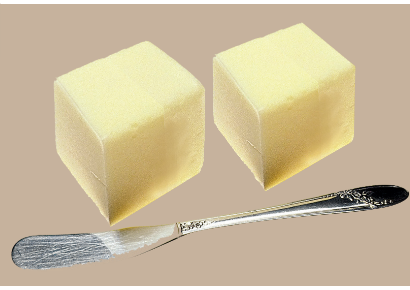
a) Készíts ábrát! Rajzold le a csonka kúp síkmetszetét!

b) Mekkora a fedőkör átmérője?

c) Hány köbméter a csonka kúp térfogata?

d) Hány négyzetméter a csonka kúp palástjának területe?

2.



Két darab margarinkockát szeretnénk áttenni egy üres margarinos csészébe. A kockák oldalélei körülbelül 63 mm hosszúak, a csésze alapkörének átmérője 10 cm, fedőkörének átmérője 11,4 cm, alkotója 5,6 cm hosszú. Vajon sikerül-e az „átdarabolás”? Ellenőrizd a megfelelő térfogatok összehasonlításával!

HÁZI FELADAT

1. Egy fából készült, 24 cm magas szabályos gúla alaplapja 14 cm-es oldalú háromszög. Ezt a gúlát az alappal párhuzamos síkokkal három egyenlő magasságú részre vágjuk.

a) Hányszor akkora az egyes csonka gúlák térfogata, mint a kis gúláé?

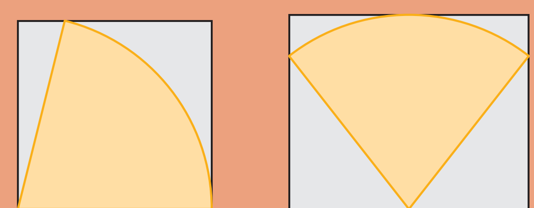
b) Mekkora a kis gúla térfogata?

c) Mekkora az egyes csonka gúlák térfogata?

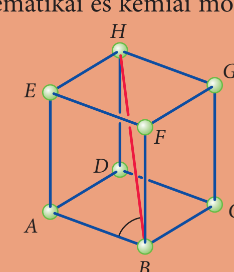
2. Forgáskúp alakú farsangi kalapot szeretnénk készíteni. A kalap 40 cm magas lesz, és „fejkörfogata” (az alap kerülete) 54 cm.

a) Hány cm^2 karton szükséges a kalap elkészítéséhez?

b) Az ábrán a kalaphoz szükséges körcikk két lehetséges kivágási módját ábrázoljuk. Milyen széles és milyen magas téglalap alakú kartonlap szükséges az egyik, illetve a másik esetben?

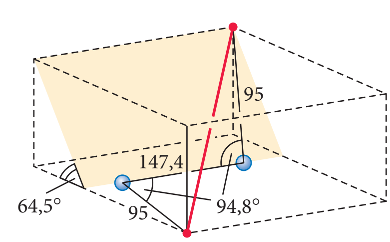


3. Térgeometriai feladatok megoldásában segíthet egy olyan készlet, melynek elemeiből (kilyuggatott kis méretű gömbökből és különböző hosszúságú műanyag pálcikákból) matematikai és kémiai modellek építhetők. Az ábrán egy kocka modellje látható. Számítsa ki az *ABH* szög nagyságát! (A test csúcsait tekintse pontoknak, az éleket pedig szakaszoknak!) *(2012. május, középszint)*



EMELT SZINT

1. Az ábra az egyes tisztítószerekben és rakéta-üzemanyagokban egyaránt megtalálható hidrogén-peroxid (H_2O_2) gáz állapotú molekulájának szerkezetét és (körülbelüli) méreteit szemlélteti. (A két oxigénatom távolsága 147,4 pm, az oxigénatom és a hozzá kötődő hidrogénatom távolsága 95 pm, a kötésszög 94,8°.) Hány pikométer (pm) távolságra van egymástól a két hidrogénatom? (Segítségképpen a molekulát egy téglatestbe foglaltuk.)



2. Egy szabályos háromoldalú csonka gúla alapélei 5 cm, fedőélei 2 cm hosszúak, magassága 4 cm.

a) Mekkorák az oldalélek?

b) Mekkora szöget alkotnak az oldalélek az alaplap síkjával?

c) Mekkora egy oldallap magassága?

d) Mekkora egy oldallap és az alaplap síkjának a szöge?

21 Ismételjünk!

FELADAT

1. Egy kiállításon régi, díszes kapuk másolatát akarják bemutatni. Az egyik kapu mellett kétoldalt eredetileg egy-egy kőből készült gömb és egy-egy forgáskúp helyezkedett el. A kiállításon ezek fenyőfából készülnek. A gömbök átmérője 4,2 dm, a kúpok alapkörének átmérője ugyanennyi, magasságuk 5,4 dm.

a) Mennyi e négy tárgy együttes tömege, ha a fenyőfa sűrűsége $0{,}43\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$?

b) A két gömböt és a kúpok palástját víztaszító festékkel fedik le. Mekkora a befestendő teljes felület?

2. Mekkora annak a gömbnek a térfogata, amelynek a felszíne 547 cm^2?

3. Egy forgáskúp 45 cm magas, az alapkör sugara 12 cm. Ebből a kúpból ki kell faragni egy szabályos

a) négyoldalú; **b)** hatoldalú gúlát.

Mennyi a minimális hulladék térfogata?

4. A 45 cm magas, 12 cm átmérőjű forgáskúpot a magasságának felezőpontján át, az alaplap síkjával párhuzamosan kettévágjuk. Mekkora a keletkező csonka kúp

a) térfogata; **b)** felszíne?

5. *(Középszintű érettségi, 2007. május)* Egy gyertyagyárban sokféle színű, formájú és méretű gyertyát készítenek. A folyékony, felhevített viaszt különféle formákba öntik. Az öntőhelyek egyikén négyzet alapú egyenes gúlát öntenek, melynek alapéle 5 cm, oldaléle 8 cm hosszú.

a) Számítsa ki ennek a gúla alakú gyertyának a térfogatát! (Az eredményt cm^3-ben, egészre kerekítve adja meg!)

Ezen az öntőhelyen az egyik műszakban 130 darab ilyen gyertyát gyártanak.

b) Hány liter viaszra van szükség, ha tudjuk, hogy a felhasznált anyag 6%-a veszteség? (Az eredményt egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!)

A gúla alakú gyertyákat egyenként díszdobozba csomagolják.

c) Hány cm^2 papír szükséges 40 darab díszdoboz elkészítéséhez, ha egy doboz papírszükséglete a gúla felszínének 136%-a?

HÁZI FELADAT

1. Egy kocka oldallapjának átlója 6,39 cm. Mekkora a kocka

a) testátlója; **c)** térfogata;

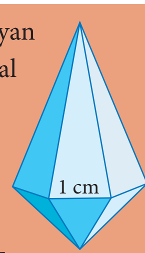
b) felszíne; **d)** köré írható gömb sugara?

2. Mekkora egy 26 cm-es élű fakockából kifaragható legnagyobb gömbnek

a) a sugara; **b)** a felszíne; **c)** a térfogata;

d) a tömege, ha a fa sűrűsége $0{,}52\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$?

3. Kristálycsillárokon sokszor látható olyan üvegdísz, amelynek alakja két talpával egymásnak fordított, azonos alapú, de eltérő magasságú szabályos gúla. Egy ilyen dísz két gúlájának közös alapja 1 cm oldalú hatszög, a gúlák magassága pedig 2, illetve 5 cm. Milyen nehéz egy-egy ilyen üvegdísz, ha tudjuk, hogy a készítéshez használt üveg sűrűsége 3,1 $\frac{g}{cm^3}$?



4. Mekkora a felszíne a 4. feladatban megadott kúpból kifaragott maximális térfogatú

a) négyoldalú; **b)** hatoldalú gúlának?

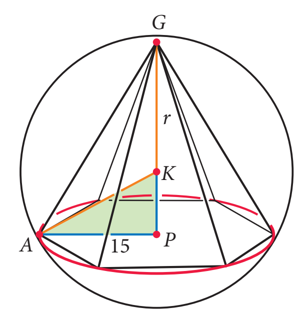
RÁADÁS

A 12. lecke Ráadásában megállapítottuk:
„[…] minden szabályos gúla esetében van a csúcsból húzott magasságnak olyan pontja, amely az összes csúcstól egyenlő távolságra van. Ez azt jelenti, hogy minden szabályos gúlához van egy olyan gömb, amely valamennyi csúcsán áthalad. Adott gúlák esetében számítással megkereshetjük a köré írt gömb középpontját."

FELADAT

Egy szabályos hatoldalú gúla magassága 25 cm, az alaplapja köré írt kör sugara 15 cm.
Mekkora a gúla köré írt gömb sugara? Mekkora távolságra van a gömb középpontja a gúla alaplapjától?

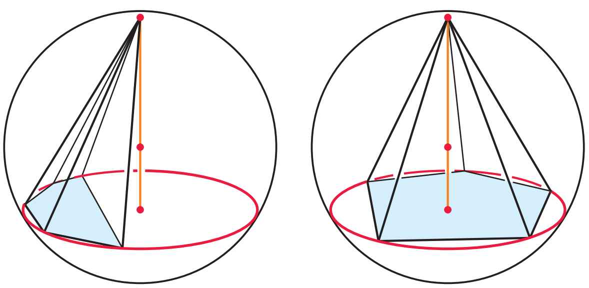
Jelöljük a keresett gömb középpontját K-val! A gömb r sugara (az ábra jelöléseinek megfelelően) AK-val is és KG-vel is egyenlő. Így $KP = PG - KG = 25 - r$.
Az AKP derékszögű háromszögre felírt Pitagorasz-tétel szerint
$AK^2 = AP^2 + PK^2$, vagyis $r^2 = 15^2 + (25 - r)^2$.
A most kapott egyenletből a gömb sugara kiszámítható:
$r^2 = 225 + 25^2 - 50r + r^2$; $\quad 50r = 225 + 625 = 850$; $\quad r = 17$.
Tehát a gúla köré írt gömb sugara 17 cm, a K középpont pedig az alaplaptól 8 cm távolságra van.



Megfigyelés:
Gondolatmenetünkben és számításunkban nem játszott szerepet *sem az, hogy a gúla hatoldalú, sem az, hogy szabályos*. Két dolog volt csak szükséges:

- a gúla alaplapjának van körülírt köre, vagyis ez húrsokszög,
- a gúla magasságának talppontja az alaplap köré írt kör középpontja.

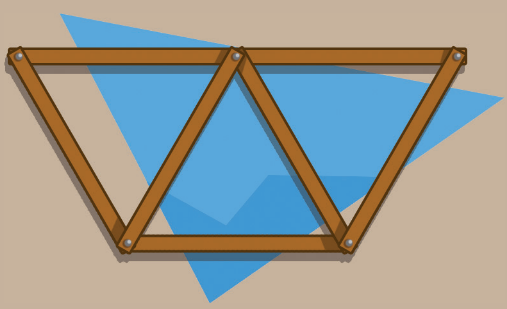
Tehát minden olyan gúla köré írt gömbnek 17 cm a sugara, amelynek az alaplapja köré írt kör sugara 15 cm, a magassága 25 cm, és amelynél a magasságának talppontja az alaplap köré írt kör középpontja.



22 Mindennapi feladatok

FELADAT

1. Egy vízelvezető árok alját és oldalait a kiásás után 30 cm oldalhosszúságú, négyzet alakú kőlapokkal szeretnék burkolni, ezért ásás közben az árok keresztmetszetét időről időre ellenőrzik. Ehhez az ábrán látható fából készült keretet használják, melyet egy darab 60 cm és öt darab 30 cm hosszú falécből állítottak össze.



a) Hány köbméter földet kell kiásni a 24 m hosszú árok elkészítéséhez?

b) Hány kőlapra van szükség a tervezett burkoláshoz?

2. A víztároló középső része egy 6 m átmérőjű, 8 m magasságú forgáshenger, alsó része félgömb, felső része forgáskúp alakú. A kúp magassága 3 m.

a) Mekkora a tartály teljes (bruttó) térfogata?

b) Mekkora felületet kell bevonni a tartály külső felületének festésekor?

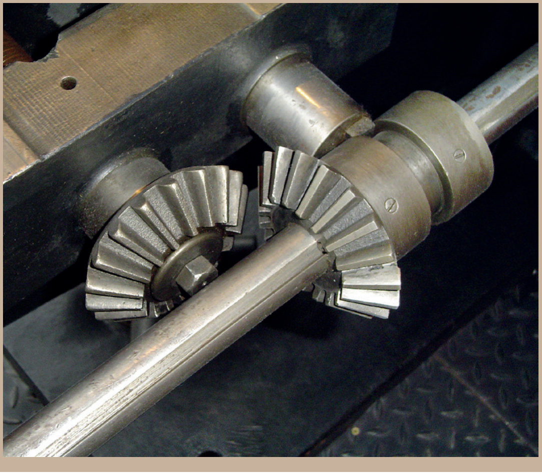
3. A folyadékoktól eltérően a szemcsés anyagok – például homok, kavics, de akár liszt vagy búza – kiöntéskor nem terülnek teljesen szét, hanem nagyjából kúp alakú dombot alkotnak. E kúp alkotójának a vízszintessel bezárt szöge az ún. rézsűszög, vagyis az a maximális szög, amelynél meredekebb lejtőn a szemcsék már nem tudnak megtapadni egymáson, hanem legurulnak a kupac aljára.

a) A száraz föld rézsűszöge körülbelül 40°, ebből szeretnénk egy négyzetes alapú, csonka gúla formájú virágágyást készíteni. Mekkora alapéllel számoljunk, hogy a virágágyás dombocskájának tetején 0,25 m^2-es beültethető terület legyen, és a dombocska magassága 10 cm legyen?

b) Mennyi föld kell egy ekkora virágágyáshoz?

4. Egymásra merőleges vagy egymással ferde szögben találkozó tengelyek esetében az erőátvitel egy lehetséges módja a kúpos fogaskerekek alkalmazása. Az ábrán látható fogaskerekek modellezhetők olyan csonka kúpokkal, amelyek alapköre 1,5 cm, fedőköre 1 cm sugarú. Mekkora az egyes fogaskerekeken a kopásnak kitett felület (a fogak külső felülete), ha az a modellként használt csonka kúp palástjának körülbelül 40%-a, és az alkotó az alapkörrel

a) 45°-os; **b)** 50°-os szöget zár be?



HÁZI FELADAT

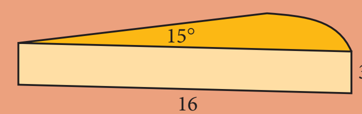
1. Egy földgömb 424,7 mm átmérőjű. (A Föld sugara kb. 6370 km.) Ez alapján számítsd ki

a) a földgömb és a Föld sugarának arányát;
b) a földgömb és a Föld felszínének arányát;
c) a földgömb és a Föld térfogatának arányát;
d) a földgömbön látható térképek méretarányát (1 : (x millió) alakban)!
e) Hány cm^2 Magyarország területe a földgömbön?

2. Egy homokkúp alakja jó közelítéssel 80 cm magasságú, 120° nyílásszögű forgáskúp.

a) Mennyi a homokkúp térfogata?
b) Hányszor kell fordulnia egy teherautónak, ha minden alkalommal ugyanannyi homokot tud szállítani, mint amennyi ebben a homokkúpban van, és az építkezéshez 12 m^3 homok szükséges?

3. Egy 3 cm vastagságú, 16 cm sugarú, forgáshenger alakú sajttömböt 15°-os középponti szögű körcikkek mentén 200 gramm tömegű darabokra vágnak szét.



a) Mekkora tömegű volt a teljes sajttömb?
b) Mekkora a 200 gramm tömegű darab térfogata?
c) A 200 gramm tömegű darab csomagolásánál a teljes felszínre még 25%-ot rá kell számítani. Mekkora területű csomagolóanyag kell a becsomagolásához?

RÁADÁS

„*A csonka kúp köbtartalma megközelítőleg egyenlő egy olyan henger köbtartalmával, amelynek átmérője akkora, mint a csonka kúp alsó és felső átmérőjének középértéke, magassága pedig akkora, mint a csonka kúp magassága.*" Ezt az utasítást adja egy, a XX. század húszas éveiből származó népművelő könyvecske (Kövessy Jenő: *Számolás és mérés a mindennapi életben;* kiadta: Heves vármegye közönsége), majd konkrét számítási feladatot is hoz KIDOLGOZOTT FELADATként:
Mekkora a térfogata annak a csonka kúp alakú fatörzsnek, melynek hossza 2 m, alsó átmérője 9 cm, felső átmérője 6 cm? (*középértéke* = számtani közepe)

a) Számítsd ki az idézett útmutatás szerint a fatörzs térfogatát, majd számítsd ki annak elméletileg pontos értékét is a csonka kúp térfogatképletével! Hány százalékkal tér el a gyakorlati (közelítő) számítással kapott érték az elméleti értéktől?
b) Jelöld a csonka kúp „alsó" és „felső" alapkörének sugarát R-rel és r-rel, magasságát m-mel. Igazold, hogy a csonka kúp térfogatának elméleti (V_e) és az idézet szerint számolt gyakorlati (V_{gy}) értéke között fennáll a következő összefüggés: $V_e - V_{gy} = \frac{m\pi}{12}(R-r)^2$!
c) A b) rész eredményének ismeretében állapítsd meg, hány százalékos hibával számolja ki a csonka kúp térfogatát az, aki a közelítő számítást választja, ha $\frac{R}{r} = 1{,}5$, illetve akkor, ha $\frac{R}{r} = 4$!

23 Gyakorlás, tudáspróba

FELADAT

1. Az Antarktisz jéggel borított területe kb. 13,8 millió km^2, a jégréteg átlagos vastagsága 2200 méter. Hány köbméter jég borítja ezt a kontinenst? Ez a térfogat hány százaléka a Föld teljes vízkészletének, ami kb. 1,46 milliárd km^3?

2. Egy négyzetes kőoszlop alapélei 12 dm-esek, a magassága 18 dm.

a) Mekkora távolságra van egymástól a kőoszlop két legtávolabbi csúcsa?

Az oszlopból kifaragják a lehető legnagyobb térfogatú szabályos négyoldalú gúlát.

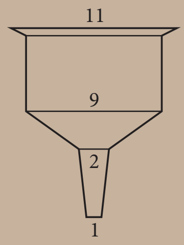
b) Hogy aránylik egymáshoz a gúla és az oszlop térfogata?

c) Mekkorák a gúla oldalélei?

d) Mekkora a gúla egy oldalélének az alapsíkkal alkotott szöge?

e) Mekkora a gúla egy oldallapjának az alapsíkkal alkotott szöge?

3. Az ábrán egy forgásszimmetrikus tölcsér keresztmetszete látható. A különböző átmérők felülről lefelé haladva: 11 cm, 9 cm, 2 cm, 1 cm; az egyes részek magassága rendre: 0,5 cm (felső, csonka kúp alakú rész), 5 cm (hengeres rész), 2,5 cm (csonka kúp alakú rész) és 4,5 cm (csonka kúp alakú kifolyórész). Túlfolyik-e a tölcsér felső peremén a hirtelen beleöntött fél liter sűrű málnaszörp?



4. Egy kúp palástja síkba terítve egy 210° középponti szögű, 18 cm sugarú körcikk.

a) Mekkora a kúp felszíne?

b) Mekkorák a kúp alkotói, magassága és térfogata?

c) Mekkora a kúp nyílásszöge?

TUDÁSPRÓBA I.

1. Egy ládika téglatest alakú, az alapélei 3,2 dm és 3,7 dm, az oldalélei 6,8 dm hosszúak.

a) Hány olyan 6,7 dm hosszú fémpálca fér el benne, amelynek az alapja 15 mm-es oldalú négyzet?

b) Elfér-e a ládikában egy 8,3 dm hosszúságú fémpálca?

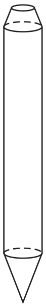
2. Egy forgáshenger alapkörének az átmérője 72 mm, a térfogata pedig ugyanakkora, mint a 72 mm-es átmérőjű gömb térfogata. Milyen magas ez a henger?

3. Egy 18 cm átmérőjű fazékban 12 cm magasan áll a leves.

a) Hány liter leves van a fazékban?

b) Hány adag levest lehet kimerni egy 8 cm átmérőjű, félgömb alakú merőkanállal?

4. 80 cm hosszúságúra darabolt, 10 cm átmérőjű fahengerekből olyan cölöpöket esztergálnak, amelyeknek a hengeres része ugyancsak 10 cm átmérőjű (ábra). Egy cölöp hossza 78 cm, a csonka kúp alakú rész 5 cm magas, a henger alakú rész 60 cm hosszú. A cölöp csonka kúp alakú végén lévő, kör alakú rész 6 cm átmérőjű. Hány százalék hulladék keletkezik a cölöpök gyártásakor?

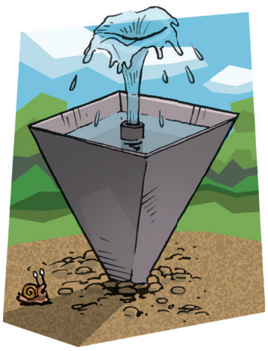


5. A képen látható „felfordított” szabályos négyoldalú gúla alakú szökőkút alapélei 40 centiméter hosszúak, magassága 70 cm.

a) Hány dm^2 rozsdamentes acéllemez borítja a szökőkút belső felületét?

b) Hány liter vizet tartalmaz a gúla, ha teljesen megtelik?

c) Mekkora szöget zárnak be a gúla élei a vízszintes síkkal?



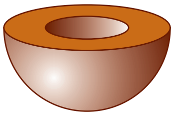
TUDÁSPRÓBA II.

1. **a)** Becsomagolható-e egy 53 cm hosszúra összecsukható horgászbot egy 30 × 40 × 20 cm-es ládikába?

b) Egy négyoldalú gúla alaplapja megegyezik a 30 × 40 × 20 cm-es téglatest egyik oldallapjával, az ezzel szemközti oldallapon van a gúla csúcsa. Mekkora a gúla térfogata?

2. Egy forgáskúp alapkörének az átmérője 54 mm, a térfogata ugyanakkora, mint az 54 mm-es átmérőjű gömb térfogata. Milyen magas ez a kúp?

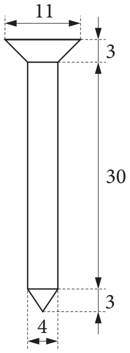
3. Egy 22 cm-es átmérőjű fa félgömbből kivájtak egy feleakkora átmérőjű félgömböt.



a) Mennyi víz fér az így kifaragott tálba?

b) Mekkora felületet kell befesteni, ha a tálat teljesen be akarják vonni műanyag alapú festékkel?

4. Egy nyerscsavar (még nincs rajta menet, és a csavarfejen sincs bemélyedés) hosszirányú keresztmetszetét és mm-ben megadott méreteit mutatja az ábra. Mekkora tömegű nyersanyagra van szükség $1{,}5 \cdot 10^6$ darab nyerscsavar előállításához, ha a gyártás során 17,8% veszteség keletkezik, és a csavar anyagának sűrűsége $8700\ \frac{kg}{m^3}$?



5. A párizsi Louvre múzeum 1989-ben átadott új főbejárata egy olyan üvegpiramis, amelynek alapja 35 méter oldalhosszúságú négyzet, magassága pedig 20,6 méter.

a) Mekkora szöget zárnak be a vízszintes síkkal a piramis oldalélei?

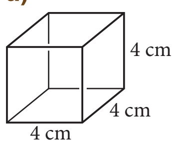
b) Mekkora szöget zárnak be a vízszintes síkkal a piramis oldallapjai?

c) Hány m^2 az üvegfelület nagysága? (Az üveglapokat tartó keretek területétől tekintsünk el!)

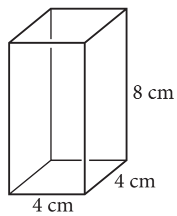
Témazáró feladatgyűjtemény

1. Építőkockák méreteit látod az ábrán. Számold ki a felszínüket és a térfogatukat!

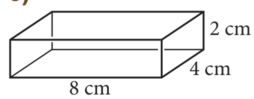
a)



b)

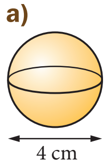


c)

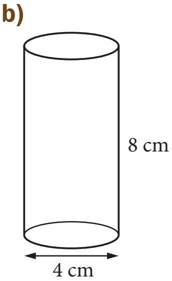


2. Ennek az építőjátéknak az elemei forgásszimmetrikusak. Számold ki, mennyi az egyes elemek felszíne és térfogata!

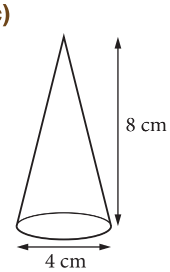
a)



b)



c)



3. Egy bolygó sugara 2440 km.

a) Milyen hosszú ezen a bolygón az „egyenlítő”?

b) Mekkora a bolygó felszíne és térfogata?

4. Egy 2 cm × 3 cm × 5 cm-es, téglatest alakú gyurmából

a) egy nagy gömböt formázunk. Mekkora a gömb sugara és felszíne?

b) öt egybevágó, kisebb gömböt formázunk. Mekkora egy kis gömb térfogata és sugara? Mekkora összesen az 5 gömb felszíne?

5. Egy 7,2 cm sugarú gömböt félbevágunk a középpontján átmenő egyik síkkal. Mennyi a keletkező részek felszíne és térfogata?

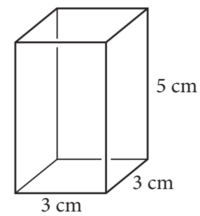
6. Egy gömb alakú gyümölcsben középen gömb alakú mag van. A mag átmérője 1,4 cm, a teljes gyümölcs átmérője 4,2 cm.

a) Hány cm^2 a gyümölcs héja?

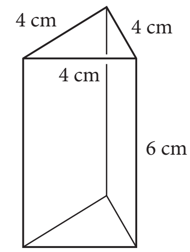
b) Hány cm^3 a gyümölcs húsa?

7. Mennyi az ábra szerinti egyenes hasábok felszíne és térfogata?

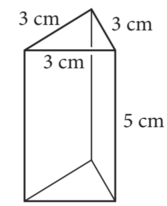
a)



b)



c)



8. Négyoldalú szabályos gúla alapéle 32 mm, magassága 40 mm.

a) Mekkora a térfogata?

b) A gúla tetejéről az alaplappal párhuzamos síkkal levágunk egy 8 mm magasságú kis gúlát. Mekkora a levágott kis gúla és a keletkező csonka gúla térfogata?

9. Egy forgáskúp alapkörének átmérője 6,8 cm. Magassága 5,4 cm.

a) Mekkora a térfogata?

b) Mekkora a felszíne?

c) Ez a forgáskúp úgy keletkezett, hogy egy egyenlő szárú háromszöget megforgattunk a szimmetriatengelye körül. Mekkorák voltak a háromszög oldalai?

10. Egy forgáskúp alapkörének átmérője 6,8 cm. Magassága 5,4 cm. A forgáskúp tetejéről, az alaplappal párhuzamos síkkal levágunk egy 0,9 cm magas kis forgáskúpot.

a) Mekkora a levágott kis kúp térfogata és felszíne?

b) Mekkora a keletkező csonka kúp térfogata és felszíne?

11. Egy téglatest alaplapjának két éle 12 cm és 16 cm, a téglatest testátlója 60°-os szöget zár be az alaplap síkjával.

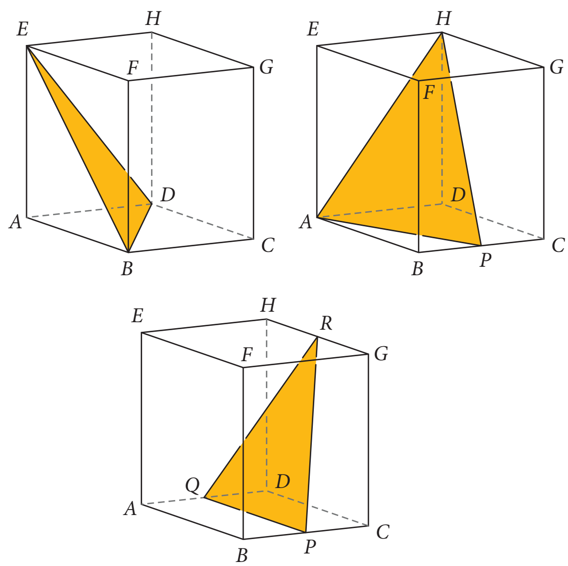
a) Mekkora a téglatest testátlójának hossza?

b) Mekkora a téglatest ismeretlen hosszúságú éle?

c) Mekkora szöget zár be egymással két testátló?

12. Az ábrán látható kocka élei 10 cm hosszúak.

a) Számítsd ki az EBD, APH és QPR háromszögek oldalainak hosszát és szögeinek nagyságát. (P, Q, R pontok a kocka ábra szerinti éleinek felezőpontjai.)



b) Mekkora szöget zárnak be az EBD és PQR háromszögek síkjai a kocka $ABCD$ alaplapjával?

13. Egy téglatest élhosszúságainak aránya 1 : 2 : 3. A téglatest cm^2-ben mért felszínének mérőszáma megegyezik a cm^3-ben mért térfogat mérőszámával. Határozd meg a téglatest éleinek hosszúságát!

14. Egy négyzet alapú egyenes hasáb testátlója 25 cm, alapéle feleakkora, mint az oldaléle.

a) Mekkora szöget zár be a testátló a hasáb éleivel?

b) Mekkora szöget zár be a testátló a testet határoló lapok síkjaival?

c) Mekkora távolságra vannak a testátlótól a hasáb csúcsai?

15. A 8 cm élű kocka csúcsai közül véletlenszerűen kiválasztunk kettőt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott csúcsok közötti távolság $8 \cdot \sqrt{2}$ cm?

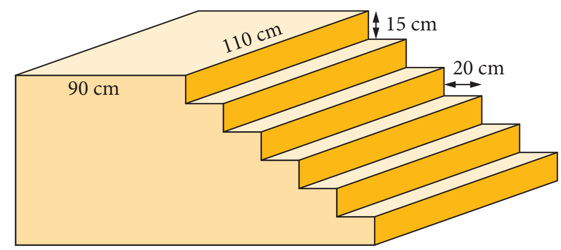
16. Kocka alakú, 10 mm élhosszúságú kis kockacukrokból 135 db kerül egy téglatest alakú dobozba.

a) Milyen méretű dobozokba csomagolhatják a kockacukrot, ha a doboznak nincs 3 cm-nél kisebb éle?

b) Melyik doboz elkészítése igényel kevesebb csomagolóanyagot?

17. Egy szabályos nyolcszög alapú egyenes hasáb alapéle 6 cm, oldaléle 0,7 dm. Milyen hosszúságú a legrövidebb testátlója? Mekkora szöget zár be a leghosszabb testátló az alaplap síkjával?

18. Egy lakóház bejáratánál a mellékelt ábrán látható lépcsőt akarják kiönteni betonból. Hány m^3 betont kell hozzá keverni?



19. Egy 12 cm magasságú egyenes hasáb alapja egy egyenlő szárú háromszög. A hasáb valamelyik két oldallapjának hajlásszöge 70°, térfogata 360 cm^3. Mekkorák a hasáb alapélei?

20. Egy háromoldalú gúla alaplapjának ismerjük két oldalának hosszát, és az általuk közbezárt szög nagyságát: $a = 8$ cm, $b = 13$ cm, $\gamma = 50°$. A gúla 10 cm-es magasságának talppontja az a oldal felezőpontjában van. Határozd meg a gúla többi élének a hosszát!

21. Egy 20 cm magas egyenes hasáb alaplapja olyan szabályos nyolcszög, amelynek köré írható körének sugara 8 cm. Számítsd ki a hasáb felszínét és térfogatát!

22. Egy 9 dm^3 térfogatú szabályos hatoldalú gúla oldaléle az alapsíkkal 72°-os szöget zár be. Milyen hosszúságú az oldaléle? *(Gimnáziumi érettségi feladat – 1988)*

23. Az egyik húsüzemben olyan hengeres alakú felvágottrudakat gyártanak, aminek a két vége félgömbben végződik. Egy ilyen rúd teljes hossza 22 cm, keresztmetszete pedig 8 cm átmérőjű kör.

a) Mekkora egy ilyen rúd térfogata?

b) Mekkora a rajta lévő fólia területe?

24. Egy szabályos ötszög alapú gúla alapéle 5 cm. Ha a gúlát az alaplappal párhuzamos síkkal elmetsszük, a síkmetszet területe harmadrésze az alaplap területének. A metszősík alaplaptól mért távolsága 4 cm. Számítsd ki az eredeti gúla térfogatát és felszínét!

25. Egyenes körhenger alapkörének sugara 5 cm, kiterített palástja pedig olyan téglalap, amelyben az oldalak aránya 2 : 3. Mekkora a henger felszíne és a térfogata?

26. Egy henger alakú sajtkorong 1,2 kg, a korong átmérője 18 cm, magassága 6 cm. Ebből egy 15 dkg-os cikket vágnak le. Mekkora a sajtdarabon lévő barna műanyag fóliának a területe?

27. Egy henger alakú fadarabot, aminek magassága 30 cm, alapkörének átmérője 21 cm, az alaplapokra merőleges, két egymással párhuzamos síkú vágással három darabra hasítunk. A síkok az alapkör átmérőjét három egyenlő részre osztják. Mekkora a keletkezett fadaraboknak a térfogata és a felszíne?

28. Egy pók egy forgáshenger alakú helyiség mennyezetének pereméről a padló átellenes pontjába kétféleképpen is eljuthat ugyanakkora úton:

- függőlegesen leereszkedik, majd a padló átmérője mentén folytatja útját, vagy
- végig a paláston halad úgy, hogy a palástot síkba kiterítve útja egy egyenes szakasz.

Számítsd ki a henger magasságának és átmérőjének arányát!

29. Egy forgáskúp nyílásszöge 60°, magassága 10 cm. Mekkora a kiterített palástjának a középponti szöge és a területe?

30. Egy forgáskúp alapkörének sugara 7 cm, alkotója 25 cm hosszú. A kúpot kettévágjuk a csúcsán átmenő, az alaplapra merőleges síkkal. Mekkora a keletkezett részek felszíne és térfogata?

31. Mekkora annak a kúpnak a nyílásszöge, amelynek palástja háromszor akkora területű, mint az alapkör területe?

32. A bábszínházban jelmezeket készítenek egy mesejáték szereplőinek. A királylány ruháját eredetileg egy 8000 cm^2 területű anyagból szabták ki, de a szabás-varrás során 21,5%-os volt az anyagveszteség. Az elkészített ruha csonkakúp-palást alakú, melynek nyakánál mért átmérője 10 cm, a legalján mért átmérője 30 cm. Milyen magas a királylány, ha a ruhagallértól a feje búbjáig mért távolság 30 cm, a ruha aljától a talpáig mért távolság 44 cm?

33. 50 cm sugarú körlapból süvegeket készítünk úgy, hogy a körlapot 3 körcikkre vágjuk. Ezeknek a középponti szöge 100°, 120° és 140°. Melyik süveg lesz a legmagasabb? Mekkora ennek a magassága?

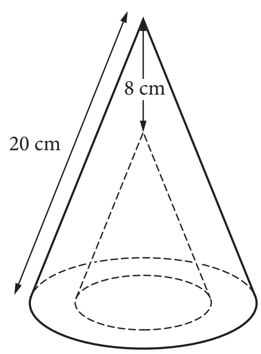
34. Egy egyenes körkúp felszíne 314 cm^2, a kúp alkotójának és az alapkör sugarának összege 20 cm. Számítsd ki a kúp térfogatát!

35. 1 literes, csonka kúp alakú tejfölöspohár alapkörének (belső) átmérője 9 cm, fedőkörének átmérője 11 cm. A pohárban 8 dl tejföl van. Milyen magasan áll a tejföl a pohárban?

36. Egy 10 cm oldalú szabályos háromszöget megforgatunk az egyik oldalegyenese körül. Határozd meg az így keletkezett forgástest felszínét és térfogatát!

37. Egy henger alakú fazék belső átmérője 20 cm, magassága 28 cm. A fazékba hat liter vizet tettünk. Hány darab túrógombócot tehetünk egyszerre a vízbe, ha azt szeretnénk, hogy utána a víz szintje a fazék felső peremétől számítva legalább 2 cm-re legyen? Egy túrógombóc átmérője 4 cm.

38. Az ábrán látható test úgy keletkezett, hogy egy forgáskúpból kivágtak egy kisebb forgáskúpot. A két kúp tengelye egybeesik, nyílásszögük egyenlő, és a kisebb kúp térfogata 27-ed része a nagy kúp térfogatának. A két kúp csúcsának távolsága 8 cm, a nagy kúp alkotója 20 cm. Határozd meg a keletkezett test felszínét!



39. Milyen távol van a 15 cm sugarú gömb középpontjától az a síkmetszete, amelynek területe $\frac{2}{3}$ része a főkör területének?

40. Egy 20 cm átmérőjű gömböt három, páronként egymásra merőleges, a gömb középpontján áthaladó síkkal elvágunk. Mennyivel változott meg az így kapott testek együttes felszíne az eredeti gömb felszínéhez képest?

41. Egy 12 cm élhosszúságú kocka minden csúcsánál levágunk a kockából egy olyan háromoldalú gúlát, amelynek oldalélei a kockaélek 4 cm hosszú darabjai.

a) Hány lapja, csúcsa, éle van a visszamaradó testnek?

b) Mekkora a megmaradt test térfogata és felszíne?

(Szakközépiskolai érettségi feladat – 1988)

42. Egy recept alapján annyi tésztát gyúrtunk, ami 50 db 3 cm átmérőjű kókuszgolyó elkészítéséhez elegendő. Mi ennél nagyobb, 4 cm átmérőjű golyókat formázunk, és a maradékból is készítünk egy gömböt.

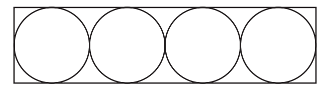
a) Hány darab kókuszgolyónk lesz?

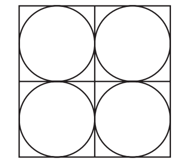
b) A kókuszreszelék mennyisége, amiben a golyókat megforgatjuk, egyenesen arányos a golyók felszínével. A kisebb méretű (3 cm) golyókhoz szükséges kókuszreszelék hány százalékára lesz szükségünk a nagyobb golyók készítése során?

43. Egy szabályos hatszög alapú gúla alapéle 15 cm, magassága 20 cm. Határozd meg a gúlába írható gömb sugarát!

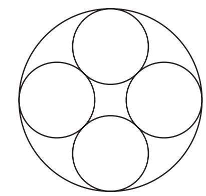
44. Karácsony előtt egy gyertyakészítő az egyenes körhenger formájú gyertyákat négyesével szeretné dobozolni. Erre többféle lehetőség is kínálkozik:

– téglatest alakú dobozokba;





– henger formájú dobozba csomagolja a gyertyákat. (A dobozokat gyertyákkal együtt felülnézetből ábrázoltuk.)



A gyertyák átmérője 6 cm, magassága 9 cm, és úgy kell a dobozokban elhelyezni őket, hogy ne lötyögjenek.

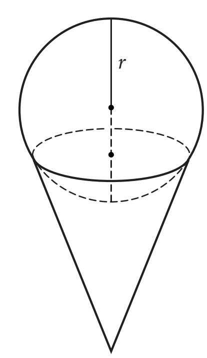
a) A dobozokat kartonpapírból készítik. Melyiknek legkisebb az anyagszükséglete?

b) Számold ki, hogy az egyes esetekben a doboz térfogata hány százaléka a gyertyák együttes térfogatának!

c) Számold ki, hogy az egyes esetekben a doboz térfogatának hány százaléka üres!

45. Egygombócos fagyink a mellékelt rajz szerint néz ki: a tölcsér egyenes körkúp alakú, és az $r = 3$ cm sugarú, gömb alakú fagyigombócnak a kúp tengelyére illeszkedő átmérőjének $\frac{1}{4}$ része esik a tölcsér belsejébe. Ha a gombócot belenyomjuk a tölcsér belsejébe, az éppen megtölti a tölcsért.

Mekkora a tölcsér magassága?



46. Egy esernyő kinyitva olyan gömbsüveg alakú, amelynek alapkörének átmérője 120 cm, magassága pedig 35 cm. Mekkora sugarú az a gömb, amelyből származtatható?

47. Egy 50 cm^3 térfogatú egyenes csonka kúp alapkörének a sugara 25 mm, fedőkörének sugara 13 mm. Milyen magas a csonka kúp?

24 A függvényekről (ismétlés)

CSOPORTMUNKA

Dolgozzatok csoportokban!
Rendszerezzük az eddig tanult függvényeket!

FELADAT

1. **a)** Keressetek olyan függvényeket a matematikában, amelyek értelmezési tartománya nem számhalmaz, de értékkészlete igen!

b) Keressetek olyan függvényeket, amelyek értelmezési tartománya és értékkészlete sem számhalmaz!

2. Az érettségire készülve Bence és barátnője összegyűjtötték, hogy milyen függvényekkel találkoztak az elmúlt években. Olyan függvényeket kerestek, amelyeknek értelmezési tartománya és értékkészlete is számhalmaz. A következő függvénytípusokat találták:

- állandó függvény (konstans függvény) $f(x) = a$ $(a \in \mathbf{R})$
- egyenes arányosság $f(x) = ax$ $(a \in \mathbf{R}, a \neq 0)$
- fordított arányosság $f(x) = \frac{a}{x}$ $(a \in \mathbf{R}, a \neq 0)$
- elsőfokú függvény $f(x) = mx + b$ $(m, b \in \mathbf{R}, m \neq 0)$
- másodfokú függvény $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0)$
- hatványfüggvények $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbf{N}^+)$
- négyzetgyökfüggvény $f(x) = \sqrt{x}$
- *a* alapú exponenciális függvény $f(x) = a^x$ $(a \in \mathbf{R}^+, a \neq 1)$
- *a* alapú logaritmusfüggvény $f(x) = \log_a x$ $(a \in \mathbf{R}^+, a \neq 1)$
- trigonometrikus függvények $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = \mathrm{tg}\, x$

a) A valós számok melyik legbővebb részhalmazán értelmezhetők a felsorolt függvények?
b) Milyen a felsorolt függvények grafikonja?
(Ha szükséges, használjátok a függvénytáblázatot!)

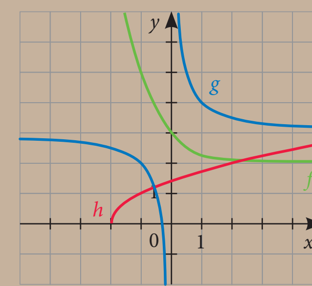
FELADAT

3. Határozd meg a valós számoknak azokat a legbővebb részhalmazait, amelyeken az egyes függvények értelmezhetők! Melyik grafikon melyik függvényhez tartozik?

$k(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2$

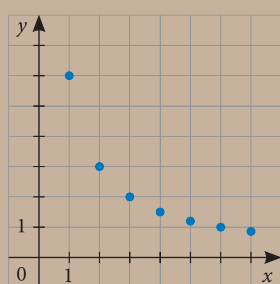
$l(x) = \frac{1}{x} + 3$

$m(x) = \sqrt{x+2}$

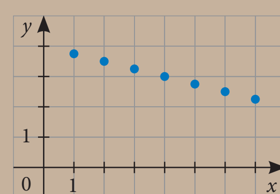


4. A következő grafikonok olyan függvényeket ábrázolnak, amelyek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza. Add meg a függvények hozzárendelési szabályait!

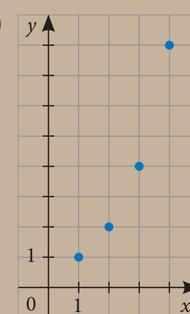
a)



b)



c)



5. Soroljátok fel az értelmezési tartomány tíz legkisebb eleméhez tartozó függvényértékeket! Ábrázoljátok és jellemezzétek a függvényeket!

a) $\mathbf{N}^+ \to \mathbf{R}$: $f(x) = \cos\left(x \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

b) $\mathbf{N}^+ \to \mathbf{R}$: $f(x) = -x^2 + 10x - 21$

c) $\mathbf{N}^+ \to \mathbf{R}$: $f(x) = \frac{x}{x+1}$

d) $\mathbf{N}^+ \to \mathbf{R}$: $f(x) = (-1)^x \cdot 2^x$

HÁZI FELADAT

1. Írj fel öt olyan függvényt, melynek értelmezési tartománya a természetes számok halmaza!
Írd fel ezeknek a függvényeknek az 1, a 10 és a 25 helyen vett helyettesítési értékét!

2. Ábrázold és jellemezd a következő függvényeket!

a) $\mathbf{N} \to \mathbf{R}$: $a(x) = \sqrt{x+1}$

b) $\mathbf{N} \to \mathbf{R}$: $b(x) = \sqrt{x} + 1$

c) $\mathbf{N} \to \mathbf{R}$: $c(x) = \frac{2}{x+1}$

d) $\mathbf{N} \to \mathbf{R}$: $d(x) = 1 + 2^x$

e) $\mathbf{N} \to \mathbf{R}$: $e(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$

3. Keressétek meg a valós számok legbővebb részhalmazát, amelyen a függvény értelmezhető! Ábrázoljátok és jellemezzétek ezen a halmazon a következő függvényeket!

a) $f(x) = x + 2$, $\quad g(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

b) $f(x) = \sqrt{x-3}$, $\quad g(x) = \sqrt{x+3}$

c) $f(x) = \frac{x-3}{2}$, $\quad g(x) = \frac{2}{x-3}$

25 Bevezetés a sorozatokhoz

KIDOLGOZOTT FELADAT

Bence az online számítógépes játékok nagy rajongója. Legújabb játékában termőfölddel kell gazdálkodnia, ezeken (virtuális) növényeket kell termesztenie. Ebben a játékban minden játékos egyetlen mezővel (termőföldparcellával) indul. Ha egy adott napon a „birtokán” található összes mezőt megműveli, akkor ezt a program a következő napon újabb öt megművelhető mezővel jutalmazza, azaz a játékos öt újabb mező birtokosa lesz.
Jocó a játék egy másfajta változatát játssza, amelyben a mezők száma napról napra duplázódik.
Dönci játékában az első két napon csak egy mező van a játékos birtokában, a harmadik naptól kezdve pedig a virtuális mezők száma mindig az előző két nap mezőszámának összegével lesz egyenlő.
Mindhárom fiú nagyon lelkiismeretesen művelgeti a birtokát. Melyiküknek mennyi mezővel kell foglalkoznia az első játékhét utolsó napján?

Megoldás
Az egyes játékok mezőszámainak alakulását az alábbi táblázat összegzi.

	1. nap	2. nap	3. nap	4. nap	5. nap	6. nap	7. nap
Bence	1	6	11	16	21	26	31
Jocó	1	2	4	8	16	32	64
Dönci	1	1	2	3	5	8	13

FELADAT

1. Folytasd a Kidolgozott feladatot! Sorold fel mindhárom fiú esetén, hogyan alakul napról napra a birtokukban lévő virtuális mezők száma a második héten, ha továbbra is mindennap lelkiismeretesen gondozzák a birtokaikat!

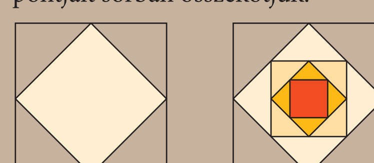
2. Folytasd a Kidolgozott feladatot!

a) Jocó szerint Bencének az 50. napon 246 mező lesz a birtokában. Igaza van?

b) Döncinek a harmadik hét végére alaposan megnő a birtoka. A 20. napon 6765, a 21. napon pedig már 10 946 mezőből álló birtoka lehet. Hány mezője lehet a 22. napon, és hány mezője volt a 19. napon?

c) Jocó játékában a mezőszám csak addig növekszik, amíg túl nem lép az 1 millión (utána a játékos más jutalmat kap a birtoka gondozásáért). Hányadik játéknapon következhet ez be először?

3. Egy 8 cm-es oldalhosszúságú négyzet oldalfelező pontjait sorban összekötjük.



a) Igazold, hogy a keletkezett négyszög négyzet!

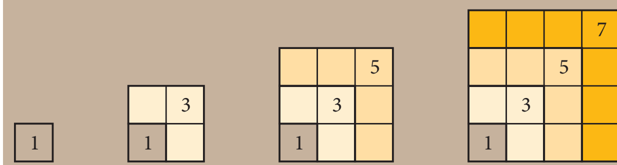
b) Mekkora a kapott négyzet kerülete?

c) Mekkora a kapott négyzet területe?

d) A belső négyzet oldalfelező pontjait sorban összekötjük, majd így járunk el a következő és az ezután kapott négyzettel is. Mennyi az így kapott öt négyzet kerületének összege?

e) Mennyi az öt négyzet területének összege?

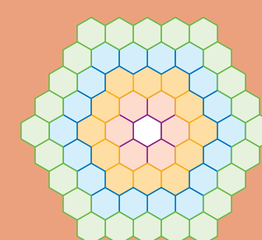
4. Csilla is szeret számolni. Egyszer az 1-től indulva elkezdte összeadogatni a páratlan számokat:
1; $1 + 3 = 4$; $1 + 3 + 5 = 9$; $1 + 3 + 5 + 7 = 16$.
– Ez nagyon érdekes! – gondolta. Még le is tudom rajzolni azt, amit kiszámoltam!



a) Milyen érdekességet fedezett fel Csilla? Fogalmazd meg szavakkal, és írd is le!
b) Mennyi az első 10 páratlan szám összege? És az első 500 páratlan számé? Biztos vagy benne?
c) Biztos, hogy a felfedezett szabályszerűség minden esetben igaz? Válaszodat indokold!

HÁZI FELADAT

1. Egy kör alakú tér közepén hatszögletű emlékoszlop emelkedik. Körülötte a teret egyforma, szabályos hatszög alakú kőlapokkal burkolták úgy, hogy minden „kör” más-más színű lapokból áll.



a) Számold meg, hány lap tartozik a különböző színű „körökhöz”! Milyen szabályosságot lehet megfigyelni az egyes „köröket” alkotó lapok számában?
b) Hány lap lesz a középponttól kifelé számolt 5., 6., illetve 8. „körben”?
c) Összesen hány lap kell az első 8 „körhöz”?

2. A 0,333333 tizedes tört így is felírható: $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10\,000} + \frac{3}{100\,000} + \frac{3}{1\,000\,000}$. Milyen kapcsolatban vannak egymással ennek az összegnek a szomszédos tagjai?

3. Hajni vasárnap kitalált egy jó viccet, hétfőn elmondta három barátnőjének. Kedden mindegyikük elmondta három másik lánynak, ezután mindenki, aki ismerte a viccet, a következő napon továbbmondta három olyan személynek, aki még nem hallotta. Töltsd ki a táblázat üres helyeit!

	hétfőn	kedden	szerdán	csütörtökön	pénteken	szombaton
Hányan ismerték meg a viccet?	3					
Hányan ismerték a viccet összesen?	$1 + 3 = 4$					

4. Ha mindig felfelé megyünk, és minden lépésnél 1 vagy 2 fokot léphetünk egyszerre, akkor hányféleképpen juthatunk fel egy lépcsősor
a) 2. fokára;
b) 4. fokára;
c) 5. fokára;
d) 8. fokára?
(Gondolj arra, hogy pl. az 5. lépcsőfokra a 3. vagy a 4. lépcsőfokról léphetünk!)

26 A sorozat fogalma

BEVEZETŐ

Az előző leckében az egyik feladat arról szólt, hogy Csilla 1-től kezdve lépésről lépésre összeadta a pozitív páratlan számokat. Az *első* eredmény 1, a *második* 4, a *harmadik* összeg 9, a *negyedik* 16 volt. A megkezdett *sorozat* első négy *tagja* 1^2; 2^2; 3^2; 4^2. A feladathoz mellékelt ábra alapján bizonyítható is, hogy ez minden esetben igaz marad: ha az első n számú pozitív páratlan számot adjuk össze, akkor eredményül n^2-t kapunk. Tehát Csilla feladatában minden egyes pozitív egész számhoz tartozik egy megadott szabály szerint képzett szám: az n pozitív egész számhoz a négyzete, az n^2 tartozik. A gondolatmenetünk tehát arra vezetett, hogy Csilla tulajdonképpen megadott egy olyan függvényt, amelynek az értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza, hozzárendelési szabálya pedig $n \mapsto n^2$ volt. Ez a függvény egy *számsorozat*.

Sőt, szerepel itt egy másik számsorozat is, a pozitív páratlan számok növekedő sorozata: 1; 3; 5; 7; … Ez is a pozitív egész számok halmazán értelmezett függvény, a hozzárendelési szabálya: $n \mapsto 2n - 1$.

FELADAT

1. Minden pozitív egész számhoz hozzárendeljük a reciprokát.

a) Melyik szám tartozik az 1-hez, a 2-höz, illetve a 100-hoz?

b) Melyik pozitív egész számhoz tartozik az $\frac{1}{5}$, a 0,125, illetve a 0,05?

2. Minden pozitív egész számhoz hozzárendeljük a tizedét, tehát $n \mapsto \frac{n}{10}$ a hozzárendelési szabály.

a) Melyik számot rendeli a megadott sorozat a 4-hez, a 17-hez, illetve az 51-hez?

b) Melyik pozitív egész számhoz rendeli a sorozat a $\frac{4}{5}$-öt, a 27,8-et, illetve a 67-et?

c) A következő számok közül melyikhez rendel valamilyen értéket ez a függvény?

4; $\frac{5}{4}$; –3; 16; 1200; π; 0; 77

ELMÉLET

Definíció: Azokat a függvényeket, amelyeknek az értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza és az értékei valós számok, **számsorozatoknak** nevezzük. Az n pozitív egész számhoz hozzárendelt számot a sorozat ***n*-edik tagjának** mondjuk.

Jelölés:

Egy sorozat tagjait az a_1; a_2; …; a_n; … szimbólumokkal jelölhetjük, ahol a_n jelöli a sorozat n-edik tagját. A sorozat egészét ilyenkor így jelöljük: (a_n).

Például

Az a_2 a sorozat annyiadik tagját jelöli, amennyit az index mutat, jelen esetben a másodikat.

Az $n \mapsto n^2 - 3$ $(n \in \mathbf{N}^+)$ hozzárendeléssel megadott függvény egy számsorozat. E sorozat

– első tagja az 1-hez rendelt szám: $1^2 - 3 = -2$; azaz $a_1 = -2$;

– második tagja a 2-höz rendelt szám: $2^2 - 3 = 1$; azaz $a_2 = 1$;

– huszonötödik tagja a 25-höz rendelt szám: $25^2 - 3 = 622$; azaz $a_{25} = 622$.

Megjegyzés

Ha egy feladat esetében a szövegből nyilvánvaló, hogy számsorozatról van szó, akkor az értelmezési tartomány megadását, az $(n \in \mathbf{N}^+)$ kifejezést el is hagyhatjuk.

FELADAT

3. Írd fel a következő számsorozatok első 6 tagját!

a) $n \mapsto n^2 - 3$; **b)** $n \mapsto n^3 - 25n$; **c)** $n \mapsto \dfrac{6}{n}$.

4. Van-e a 3. feladatban megadott sorozatok között növekedő vagy fogyó sorozat?

5. Adott az $a_n = \sin\left(n \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)$ sorozat $(n \in \mathbf{N}^+)$.

a) Add meg az a_1, a_2, a_3, a_4, a_{12}, a_{17} tagokat!

b) Hány elemű halmaz a megadott sorozat értékkészlete?

HÁZI FELADAT

1. A következő táblázat a $c_n = n(n-1) + 2$ sorozatra vonatkozik. Töltsd ki az üres helyeket!

	c_1	c_{10}	c_{100}			
n	1	10	100			
c_n				8	74	602

2. A két adott sorozat közül melyiknek nagyobb a 4. tagja?

a) $(12 - 5n)$, illetve $(10 - n^2)$;

b) $(n^2 + n)$, illetve $(35 - n^2)$.

3. Egy számsorozatnak minden páratlan sorszámú tagja 24, minden páros sorszámú tagja (-23). Mennyi az első tíz tag összege? Mennyi az első tizenöt tag összege?

4. Adva van a (k_n) sorozat: $k_1 = 0$ és $k_n = \binom{n}{2}$, ha $n > 1$ $(n \in \mathbf{N}^+)$.

a) Add meg a sorozat első nyolc tagját!

b) Az alábbiakban megadott függvények között van-e olyan, amelyik megegyezik a (k_n) sorozattal, ha $n \in \mathbf{N}^+$?

A) $n \mapsto \dfrac{n}{2}$; C) $n \mapsto \dfrac{n!}{2!}$;

B) $n \mapsto \dfrac{(n+1)!}{n!}$; D) $n \mapsto \dfrac{n^2 - n}{2}$.

Emlékeztetőül: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!};$$

és a legtöbb zsebszámológépen az nCr billentyűvel számolható.

27 A sorozat megadása

KIDOLGOZOTT FELADAT

A 25. leckében, a virtuális termőföldekhez kapcsolódó számítógépes játékban Bence és barátai egy-egy számsorozat néhány egymást követő tagját írták fel. Adjuk meg ezeket a sorozatokat az új jelölésekkel!

Megoldás

Jelöljük Bence sorozatát (b_n)-nel! Ekkor az első tag 1, a többi pedig mind 5-tel nagyobb az előzőnél:
$b_1 = 1$, és ha $n > 1$, akkor $b_n = b_{n-1} + 5$.
Az n-edik tagot úgy is megkaphatjuk, hogy az első taghoz $(n - 1)$-szer adjuk hozzá az 5-öt:
$b_n = 1 + (n - 1) \cdot 5 = 5n - 4$.

Jocó sorozatát könnyű felírni, hiszen ő a 2 egymást követő hatványait választotta. Ha a sorozatát (j_n)-nel jelöljük, akkor minden pozitív egész n esetében $j_n = 2^{n-1}$.

Dönci sorozata csak kissé bonyolultabb. Ha ezt a sorozatot (d_n)-nel jelöljük, akkor $d_1 = d_2 = 1$, és ha $n > 2$, akkor $d_n = d_{n-1} + d_{n-2}$.

ELMÉLET

Egy számsorozat megadása többféleképpen is történhet. Mi a leggyakrabban körülírással, képlettel vagy *rekurzióval* adjuk meg a sorozatokat. Megadhatjuk még a sorozatot néhány (elegendően sok) elemének felsorolásával vagy ábrázolásával.
„A páratlan pozitív egész számok növekedő sorozata" egy **körülírással** megadott sorozat, az $n \mapsto 2n - 1$ $(n \in \mathbf{N}^+)$ pedig ugyanennek a sorozatnak **képlettel** megadott definíciója. Jocó sorozatát is megadhatjuk képlettel: $j_n = 2^{n-1}$ $(n \in \mathbf{N}^+)$.
Ha egy számsorozatnak megadjuk az első tagját, a többit pedig egy vagy több előtte lévő tag segítségével fejezzük ki, akkor ezt **rekurzív definíciónak** nevezzük.

Például

Bence sorozata megadható így is:
$b_1 = 1$, és ha $n > 1$, akkor $b_n = b_{n-1} + 5$.
Dönci sorozata:
$d_1 = d_2 = 1$, és ha $n > 2$, akkor $d_n = d_{n-1} + d_{n-2}$.

FELADAT

1. Írd fel a sorozatok első hat tagját, majd add meg képlettel is a következő sorozatokat!

a) „A pozitív egész számok növekedő sorozata."
b) „A természetes számok növekedő sorozata."
c) „A páros pozitív egész számok növekedő sorozata."
d) „A 3-mal osztva 1 maradékot adó pozitív egész számok növekedő sorozata."

2. Adj szöveges meghatározást a következő sorozatokhoz $(n \in \mathbf{N}^+)$! Add meg a sorozatok első öt tagját!

a) $a_n = 3n$;
b) $b_n = n^3$;
c) $c_n = 3^n$;
d) $d_n = \log_3 n$.

3. Írd fel annak az (a_n) számsorozatnak az első nyolc tagját, amelyet így adunk meg:

a) $a_1 = 3$, és ha $n > 1$, akkor $a_n = 2a_{n-1} - 4$;

b) $a_1 = \sqrt{3}$, és ha $n > 1$, akkor $a_n = 2 + \sqrt{3} \cdot a_{n-1}$.

4. Írd fel és ábrázold a sorozatok első hat tagját! Az (a_n) és (b_n) sorozatot add meg képlettel, a (c_n) sorozatot pedig körülírással is!

a) Az (a_n) sorozat első tagja 5. A második tagtól kezdve a sorozat bármely tagja úgy kapható meg, hogy az őt megelőző taghoz hozzáadunk 2-t.

b) A (b_n) sorozat első tagja 8. A második tagtól kezdve a sorozat bármely tagja úgy kapható meg, hogy az őt megelőző tagot elosztjuk 2-vel.

c) A (c_n) sorozat első tagja 3, második tagja 1. Ha $n > 2$, akkor $c_n = c_{n-1} - c_{n-2}$.

HÁZI FELADAT

1. Egy új televíziós sorozatot január 1-jén délután kezdtek vetíteni. Január 2-ával kezdődően mindennap délelőtt és délután is leadtak egy-egy újabb részt. Magdi néni csak a délutáni részeket tudja megnézni.

a) Írd be a táblázatba, hogy melyik nap hányadik részt látja!

1. nap	2. nap	3. nap	4. nap	5. nap	6. nap	7. nap	8. nap
1. rész	3. rész						

b) Adj meg egy olyan szabályt, amellyel kiszámítható, hogy hányadik részt fogja megnézni Magdi néni az n-edik napon!

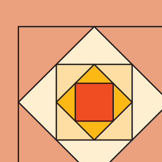
2. Egy nemzeti park állatgondozói a következő egyszerű szabály segítségével modellezik az állatállomány növekedését: a kezdetben 201 egyedből álló állomány minden évben megduplázódik, azonban e duplázódást követően évente átlagosan 200 egyed elpusztul, így az állomány létszáma évről évre közel azonos marad.

a) Töltsd ki a táblázatot! Valóban közel azonos marad az állomány létszáma?

Évek száma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Egyedszám	201									

b) Adj meg rekurzív képletet, amellyel az adott évi egyedszámból kiszámítható a következő!

3. A 25. leckében érdekes számításokat végeztünk a jobb oldali ábra kapcsán. Adj meg olyan sorozatokat, amelyek ehhez a problémához kapcsolódnak!



8 cm

4. Minden olyan függvényhez, amely értelmezve van a pozitív egész számokon is, tartozik egy-egy sorozat. Például az $x \mapsto 3x^2$ függvényhez az $n \mapsto 3n^2$ sorozat tartozik ($n \in \mathbf{N}^+$). Számítsd ki és ábrázold derékszögű koordináta-rendszerben az alább megadott függvényekhez tartozó sorozatok első nyolc tagját!

a) $x \mapsto -x$; **b)** $x \mapsto \frac{x-4}{2}$; **c)** $x \mapsto 1{,}5^x$; **d)** $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x \quad (x \in \mathbf{R}^+)$.

28 Fontos sorozatok

BEVEZETŐ I.

Egy teherautó nyilvántartási értéke kezdetben 5 millió forint. A teherautó értéke minden évben csökken. Ez az értékvesztés a cég nyilvántartásában is megjelenik: a teherautó nyilvántartási értékét évről évre csökkenteni kell 400 ezer forinttal. Eszerint egy év után $5 - 0{,}4 = 4{,}6$ millió forint, 2 év után $5 - 2 \cdot 0{,}4 = 4{,}2$ millió forint, 3 év után $5 - 3 \cdot 0{,}4 = 3{,}8$ millió forint lesz az értéke. Látható, hogy itt az $e_n = 5 - 0{,}4 \cdot n$ ($n \in \mathbf{N}^+$) sorozat tagjairól van szó (millió Ft-ban számolva).

ELMÉLET

Definíció: I. *Ha egy számsorozathoz van egy olyan szám, amelyet bármelyik taghoz hozzáadva megkapjuk a következő tagot, akkor ezt* **számtani sorozatnak** *nevezzük.* A hozzáadott szám neve: **differencia** (különbség), és d-vel jelöljük.

A számtani sorozatban (a másodiktól kezdve) bármely tag és az azt megelőző tag különbsége állandó: $a_{n+1} - a_n = d$.

Például

- A 3-mal osztva 2 maradékot adó pozitív egészek növekedő sorozata (2; 5; 8; 11; …) számtani sorozat, amelynek az első tagja 2, a differenciája pedig 3. Azaz $a_1 = 2$ és $d = 3$.
- A bevezetőben említett $e_n = 5 - 0{,}4 \cdot n$ ($n \in \mathbf{N}^+$) sorozat első tagja $e_1 = 4{,}6$; differenciája $d = -0{,}4$. Ez egy csökkenő számtani sorozat, differenciája negatív.

FELADAT

1. Foglalkozz a $(12 - 5n)$ sorozattal!

a) Írd fel az első hat tagját!

b) Igazold, hogy ez számtani sorozat! Mennyi a differenciája?

2. **a)** Egy számtani sorozat első tagja 6, differenciája 7. Sorold fel a sorozat első tíz tagját!

b) Egy számtani sorozat harmadik tagja 36, ötödik tagja -50. Mennyi lesz az első tag és a differencia?

BEVEZETŐ II.

Az évi 6%-os kamatos kamatra befektetett tőke évről évre ugyanannyiszorosára növekszik. Ha a befektetett tőke T, akkor 1 év után $1{,}06 \cdot T$, 2 év után $1{,}06^2 \cdot T$, 3 év után $1{,}06^3 \cdot T$ lesz a kamattal növelt tőke összege. Látható, hogy itt a $T_n = 1{,}06^n \cdot T$ ($n \in \mathbf{N}^+$) sorozat tagjairól van szó.

ELMÉLET

II. *Ha egy számsorozathoz van olyan nullától különböző szám, amellyel bármelyik tagot megszorozva megkapjuk a következő tagot, akkor ezt* **mértani sorozatnak** *nevezzük.* Az itt fellépő szám neve: **kvóciens** (hányados), jele: q.

A mértani sorozatban (a másodiktól kezdve) bármely tag és az azt megelőző tag hányadosa állandó, $a_{n+1} : a_n = q$.
Például

– Egy sorozat első tagja 8, és a második tagtól kezdve a sorozat bármely tagja úgy kapható meg, hogy az őt megelőző tagot elosztjuk 2-vel: 8; 4; 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; … Itt a 2-vel való osztás helyett akár azt is mondhatnánk, hogy szorzunk $\frac{1}{2}$-del, ez tehát olyan mértani sorozat, amelynek a hányadosa 0,5. Azaz $a_1 = 8$ és $q = 0{,}5$.
– Az 1; −3; 9; −27; 81; −273; ... sorozatban bármely tagból úgy kapjuk meg a következőt, hogy (−3)-mal szorzunk. Ez egy mértani sorozat, melynek kvóciense: $q = -3$.

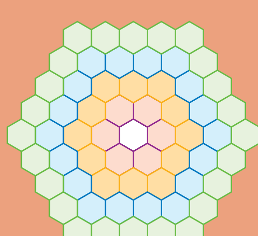
FELADAT

3. Hogy terjed a pletyka? Hajni vasárnap kitalált egy jó viccet, hétfőn elmondta három barátnőjének. Kedden mindegyikük elmondta három másik lánynak, ezután mindenki, aki ismerte a viccet, a következő napon továbbmondta három olyan személynek, aki még nem hallotta. Van-e ebben a problémában számtani vagy mértani sorozat?

4. **a)** Egy mértani sorozat első tagja 1000, kvóciense 0,1. Sorold fel a sorozat első hat tagját!
b) Egy mértani sorozat harmadik tagja $\frac{1}{2}$, hatodik tagja $\frac{1}{16}$. Mekkora az első tag és a kvóciens?

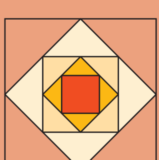
HÁZI FELADAT

1. Egy teret az ábrán látható szabály szerint színes kőlapokkal burkolnak. Milyen sorozatot alkot a más-más színű kőlapok száma, ha a folyamatot végtelennek képzeljük?



2. A 27. lecke 1. házi feladata Magdi néni tévénézési szokásával foglalkozik. Január 1-jén, délután indul egy televíziós sorozat. Január 2-ával kezdve mindennap délelőtt és délután is levetítenek egy újabb részt. Magdi néni csak a délutáni részeket tudja megnézni. Hányadik részt fogja megnézni az n-edik napon?

3. A mellékelt ábrában hasonlítsuk össze a kapott négyzetek kerületét, területét! Az egyre kisebb négyzetek kerülete is, területe is egy-egy mértani sorozatot alkot. Melyiknek melyik szám a hányadosa?



4. Vizsgáld meg a következő sorozatokat:
a) „A pozitív egész számok növekedő sorozata."
b) „A természetes számok növekedő sorozata."
c) „A páros pozitív egész számok növekedő sorozata."
d) „A 3-mal osztva 1 maradékot adó pozitív egész számok növekedő sorozata."
Igazold, hogy ezek számtani sorozatok! Add meg mindegyik sorozat differenciáját!

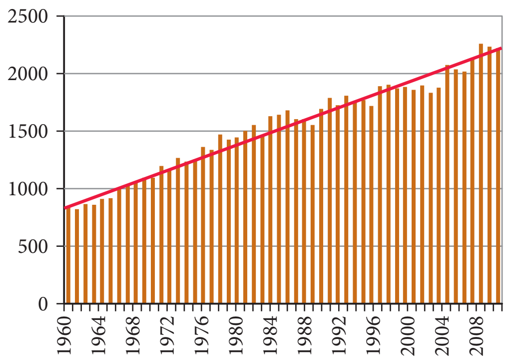
További érdekességeket olvashatsz a 30. lecke után található Ráadásban.

29 Számtani sorozatok

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. A világ gabonatermeléséről tudjuk, hogy 1960 és 2010 között évente átlagosan körülbelül 27 millió tonnával növekedett. 1960-ban a termelés körülbelül 824 millió tonna volt.

A világ gabonatermelése (millió tonna)



Ezt a folyamatot modellezhetjük egy olyan számtani sorozattal, amelynek első tagja az 1960-as gabonatermés millió tonnában mérve, azaz $a_1 = 824$, a sorozat további tagjai pedig a következő évek termésmennyiségei (ugyancsak millió tonnában).

a) Írjuk fel a sorozat első öt tagját!

b) Milyen rekurzív képlet segítségével számítható ki egy bizonyos év termésmennyiségéből a következő évi (azaz a sorozat következő tagja)?

c) Adjunk meg olyan általános képletet, amellyel megbecsülhető a sorozat n-edik tagja, azaz a világ gabonatermése 1960 után $(n-1)$ évvel!

d) Adjunk becslést a modell alapján a 2012-es termés mennyiségére!

Megoldás

a) $a_1 = 824$; $a_2 = 824 + 27 = 851$; $a_3 = 851 + 27 = 878$; $a_4 = 878 + 27 = 905$; $a_5 = 905 + 27 = 932$.

b) $a_{n+1} = a_n + 27$

c) Az első taghoz mindig újra és újra 27-et adunk hozzá:
$a_n = 824 + 27 + 27 + \ldots + 27 = 824 + (n-1) \cdot 27 =$
$= 824 + n \cdot 27 - 27 = 797 + 27n.$

d) 52 évvel 1960 után a 2012-es termést a sorozat 53. tagja adja meg:
$a_{53} = 797 + 27 \cdot 53 = 797 + 1431 = 2228$ (millió tonna).

ELMÉLET

Ha (a_n) számtani sorozat, melynek első tagja a_1 és differenciája d, akkor

$$a_2 = a_1 + d;$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d; \ldots$$

azaz minden $n \in \mathbf{N}^+$ esetén $\quad a_n = a_1 + (n-1)d.$

FELADAT

1. A 33-nál nagyobb páros számokat növekvő sorba állítva számtani sorozatot kapunk.

a) Melyik szám ennek a sorozatnak az első tagja?

b) Mennyi itt a differencia?

c) Melyik szám e sorozat 77. tagja?

d) Hányadik tagja ennek a sorozatnak az 1948?

KIDOLGOZOTT FELADAT

2. Tibor január elsejétől kezdve minden hónapban 100 forinttal többet tesz be a perselyébe, mint az előző hónapban. Tudjuk, hogy az április–június hónapokban betett összeg 2100 forint. Mennyi pénzt tett Tibor a perselybe januárban?

1. megoldás: Itt egy számtani sorozatról van szó, legyen ez (c_n). A januárban megtakarított összeg c_1, a sorozat differenciája 100, és $c_4 + c_5 + c_6 = 2100$. Ezt az összeget felírom az első tag és a differencia segítségével:
$(c_1 + 300) + (c_1 + 400) + (c_1 + 500) = 2100$.
$3c_1 + 1200 = 2100$; $3c_1 = 2100 - 1200 = 900$; $c_1 = 900 : 3 = 300$.
Tehát Tibor januárban 300 forintot tett a perselybe.

2. megoldás: Tibor júniusban 100 forinttal többet, áprilisban pedig 100 forinttal kevesebbet tett a perselybe, mint amennyit májusban. Ha a májusban betett pénzt c-vel jelöljük, akkor az áprilisi $(c - 100)$, a júniusi $(c + 100)$. Ezek összege:
$(c - 100) + c + (c + 100) = 3c$.
$3c = 2100$; ezért $c = 700$.
Májusban 700 Ft-ot tett be Tibor, januárban 400 Ft-tal kevesebbet, azaz 300 Ft-ot.

FELADAT

2. Egy számtani sorozat 10., 11. és 12. tagjának összege 63.
a) Számítsd ki a sorozat 11. tagját! (Alkalmazd Dönci módszerét!)
b) Számítsd ki a sorozat első tagját, ha 5 a sorozat differenciája!
c) Számítsd ki a sorozat 10. és 12. tagját, ha 7 a sorozat differenciája!
d) Mutasd meg, hogy a 11. tag a 10. tag és a 12. tag számtani közepével egyenlő, akármennyi is a differencia!

3. Egy számtani sorozatról tudjuk, hogy a hatodik tagja 80, a differenciája
a) 2,6; **b)** 0; **c)** –5.
Számítsd ki a sorozat első tagját!

4. A (b_n) számtani sorozatról tudjuk, hogy $b_7 - b_1 = 24$ és $b_7 + b_1 = 4$.
a) Mennyi a differencia?
b) Mennyi az első tag?
c) Mennyi a hetedik tag?
d) Mennyi a negyedik tag?

5. Egy számtani sorozat 28. tagja 96, 32. tagja 112. Hányadik tagja ennek a sorozatnak a 192?

HÁZI FELADAT

1. Folytasd a 2. Kidolgozott feladatot! Hány forintot tett a perselyébe Tibor
a) az első év decemberében;
b) a második év decemberében?

2. Egy számtani sorozat hatodik tagja 25, nyolcadik tagja
a) 9; **b)** 25.
Számítsd ki a differenciát, az első tagot és a hetedik tagot!

3. Hányadik tagja a $(3n + 8)$ sorozatnak
a) a 14; **b)** a 38; **c)** a 338; **d)** a 450?

További érdekességeket olvashatsz a 30. lecke után található Ráadásban.

30 Hogyan fogjunk oroszlánt? A számtani sorozat első *n* tagjának összege

BEVEZETŐ

– Hogyan lehet a legegyszerűbben megfogni egy oroszlánt?
– ??
– No, hát úgy, hogy fogunk kettőt, és elengedünk egyet.

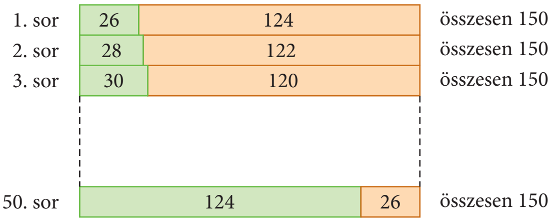
Mi köze ennek a régi viccnek a számtani sorozatokhoz? Sokat segít ez a gondolat akkor, ha egy számtani sorozat tagjainak összegét keressük.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Egy tér egyik részét 50 sorban díszkővel borították. Az első sorba 26 díszkövet tettek, és minden következő sorba 2-vel többet, mint az előző sorba. Hány díszkő van a téren?

Megoldás
A sorokban a díszkövek száma: 26; 28; 30; 32; … . Az utolsó, 50. sorban pedig $26 + 49 \cdot 2 = 124$ díszkő van.
Gondolatban egészítsük ki mindegyik sort: az első sort annyi díszkővel, amennyi az utolsó sorban van, a második sort annyival, amennyi az utolsó előtti sorban van, és így tovább. Mennyi díszkő lesz így a sorokban? $26 + 124 = 150$; $28 + 122 = 150$; $30 + 120 = 150$. Minden sorban 150 díszkő lesz. Ez összesen $50 \cdot 150 = 7500$ darab.
De ekkor kétszer számoltunk minden díszkövet.
A díszkövek száma tehát ennek a fele:

$$\frac{(26 + 124) \cdot 50}{2} = 3750.$$



2. Figyeljük meg, hogyan oldott meg Gauss kisgyermek korában egy, a számtani sorozatokhoz kapcsolódó feladatot!

Carl Friedrich Gauss német matematikus és természettudós 1777-től 1855-ig élt. Már gyermekkorában felfigyelt rá

a tanítója, erről szól a következő történet. Ebben az időben egy tanító párhuzamosan foglalkozott a különböző korú diákokkal. Gauss és társai azt a feladatot kapták, hogy adják össze a számokat 1-től 40-ig. A tanító arra gondolt, hogy amíg ezen dolgoznak, ő foglalkozhat a többi csoporttal. De a kis Gauss már jelentkezett is az eredménnyel: 820.
Figyeljük meg Gauss gondolatmenetét!

$1 + 40 = 41$
$2 + 39 = 41$
$3 + 38 = 41$
…
$20 + 21 = 41$

Vagyis a kiszámítandó összeg 41-nek a 20-szorosa, azaz 820.
A tagok összegét megkapjuk, ha az első és az utolsó tag összegét megszorozzuk a tagok számának felével. Páros sok tag esetén ez könnyen észrevehető, de páratlan számú tag esetén is teljesül.

FELADAT

1. Alkalmazd „az oroszlánfogás trükkjét” az alábbi feladatokban.

a) Egy számtani sorozat első tagja 27, differenciája 3. Mennyi a sorozat első 24 tagjának összege?

b) Egy számtani sorozat első tagja 52, második tagja 48. Mennyi a sorozat első 17 tagjának összege?

c) Egy számtani sorozat első tagja 39, tizenötödik tagja 67. Számítsd ki a sorozat első 15 tagjának összegét!

ELMÉLET

Bármely számtani sorozat első néhány tagjának az összegét megkapjuk, ha

– az első és az utolsó tag összegét megszorozzuk a tagok számával, és ezt a szorzatot elosztjuk 2-vel, vagy ha

– az első és az utolsó tag számtani közepét megszorozzuk a tagok számával.

Ha (a_n) számtani sorozat, és $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, akkor $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ vagy másképp $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

Az első tag és a differencia segítségével ez így írható: $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$

FELADAT

2. Töltsd ki a táblázat üres helyeit!

a_1	d	n	a_n	S_n
129	–10	13		
	5,3	21	112	
–8			22	77
	–1	27	48	

3. Egy számtani sorozat első tagja (-65), n-edik tagja 65. Mennyi a sorozat első n tagjának összege, ha

a) $n = 3$; **b)** $n = 8$; **c)** $n = 11$; **d)** $n = 27$?

4. Egy kis üzlet tulajdonosa 5 láda csilisbab-konzervet szeretne elrendezni gúla alakban. Mindegyik ládában 24 konzerv van. Mindegyik sorba eggyel kevesebbet tesz, mint az alatta lévőbe. El tudja-e rendezni a konzerveket úgy, hogy a legfelső sorba egyet tesz? Ha igen, hányat tegyen a legalsó sorba? Milyen magas lesz a gúlája, ha egy konzerv 12 cm magas? Hány konzerv kellene egy 3 m magas gúlához? Ehhez hány láda babkonzervet kellene rendelnie?

HÁZI FELADAT

1. Összeadtuk a pozitív egész számokat

a) 1-től 100-ig; **b)** 1-től 1000-ig; **c)** 1-től n-ig.

Mit kaptunk eredményül?

2. Tekintsük az (a_n) számtani sorozatot, amelynek első tagja 1, differenciája pedig 2! Mennyi ebben a sorozatban

a) az első 10 tag összege?

b) az első 15 tag összege?

c) az első n tag összege?

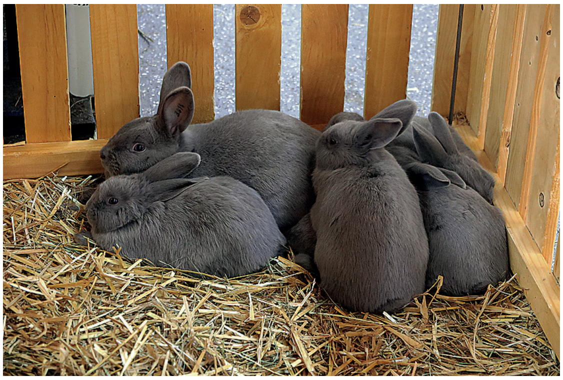
3. Egy stadion nézőterén az első sorban 340 ülés van, minden következő sorban 30 üléssel több, mint az előző sorban. Hány nézőnek van ülőhely a stadionban, ha a sorok száma összesen 27?

4. **a)** Egy számtani sorozatban $a_1 = -5$, $a_6 = 5$. Mennyi lesz d, a_{25} és S_{25}?

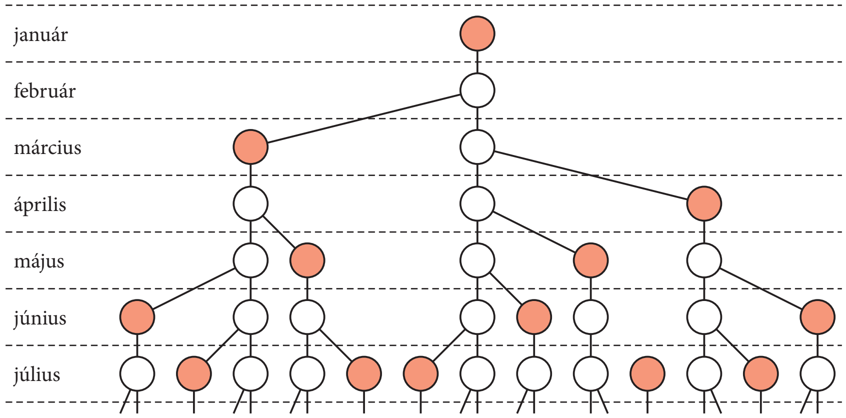
b) Egy számtani sorozatban $a_3 = 6$, $a_{10} = -15$. Mennyi lesz d, a_1, a_{20} és S_{20}?

Érdekességek

1. Egy 800 éves feladat:
Hány nyúl származik egy év alatt egy pár nyúltól, ha mindegyik pár két hónapos korától kezdve havonta egy új párt hoz világra, és közben egyetlen nyúl sem pusztul el?



Megoldás
Tegyük fel, hogy januárban születik az első megfigyelt nyúlpár. Ekkor ők februárban még nem szaporodnak, de a következő hónapok mindegyikében származik tőlük egy új nyúlpár. Tehát februárban 1 nyúlpár, márciusban azonban már 2 pár van. Áprilisban 1 pár születik a januári nyulaktól, és megvan még a márciusi 2 pár.
Jelöljük f_n-nel az n-edik hónapban élő nyúlpárok számát. Ekkor a fentiek szerint $f_1 = f_2 = 1$; $f_3 = 2$; $f_4 = 1 + 2 = 3$.
Mely nyulak szaporodnak májusban? Azok, amelyek legalább 2 hónaposak, vagyis azok, amelyek már éltek márciusban. Ilyen pár 2 van. Tehát májusban él a 2 újszülött pár és még a 3 áprilisi pár: $f_5 = f_3 + f_4 = 2 + 3 = 5$.



Tovább hasonlóan haladva azt tapasztaljuk, hogy minden hónapban annyi nyúlpár él, amennyi az előző két hónapban élt párok összege. Így $f_6 = f_4 + f_5 = 3 + 5 = 8$; $f_7 = f_5 + f_6 = 5 + 8 = 13$. A sorozatot folytatva azt kapjuk, hogy $f_8 = 21$; $f_9 = 34$; $f_{10} = 55$; $f_{11} = 89$; $f_{12} = 144$, így $f_{13} = f_{11} + f_{12} = 233$.
Tehát megfigyelésünk kezdete után egy évvel 233 pár nyúl élt, az eredetin kívül még 232 pár, vagyis 464 nyúl. Ennyi származott az eredeti pártól.
Ez az érdekes probléma Leonardo pisai (olvasd: pízai) kereskedőnek a nevéhez fűződik, aki apja, Bonacci után a Fibonacci nevet kapta. Ő 1200 körül élt, a matematikának igen sok területével foglalkozott eredményesen. Róla nevezik az itt szereplő sorozatot Fibonacci-sorozatnak. A sorozat pontos meghatározása: $f_1 = f_2 = 1$; $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$, ha $n > 2$.

Megjegyzés
A Fibonacci-sorozat első néhány tagja már kétszer is szerepelt könyvünkben. A 25. lecke példájában ez volt Dönci játékának eredménye, és a 4. házi feladat is erre a sorozatra vezetett.

Leonardo Fibonacci (kb. 1170 – kb. 1250) itáliai matematikus

2. Számtani sorozat és számtani közép

Minden számtani sorozatra igaz:
- 3, 5, 7 vagy más páratlan számú egymást követő tag számtani közepe a középső tag;
- minden tag (a másodiktól kezdve) az őt közrefogó két tag számtani közepe;
- minden tag a tőle szimmetrikusan elhelyezkedő két tag számtani közepe.

Például

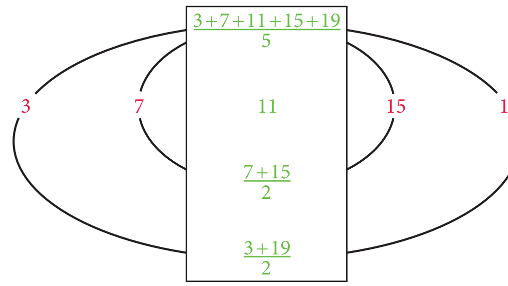
ha egy (a_n) számtani sorozatban $a_{12} = 8$ és $a_{14} = 20$,

akkor $a_{13} = \dfrac{8+20}{2} = 14$;

ha egy (b_n) számtani sorozatban $b_5 = 3$ és $b_9 = -11$,

akkor $b_7 = \dfrac{3+(-11)}{2} = -4$.

Ellenőrizd a 29. lecke 4. feladatában: b_4 éppen a b_1 és a b_7 számtani közepe!



EMELT SZINT

1. Bizonyítsuk be a számtani sorozat első n tagjának összegéről szóló tételt! $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

Bizonyítás:

Írjuk fel az első n tag összegét kétféle sorrendben!

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$

Adjuk össze a két sort!

$2\,S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$.

Ebben a kifejezésben n darab zárójeles tag van, és egy zárójeles tag általános felírása a következő: $(a_k + a_{n+1-k})$.

Írjuk fel ezt az első tag és a differencia segítségével, majd használjuk ki, hogy az n-edik tag miként írható fel az első tag és a differencia segítségével!

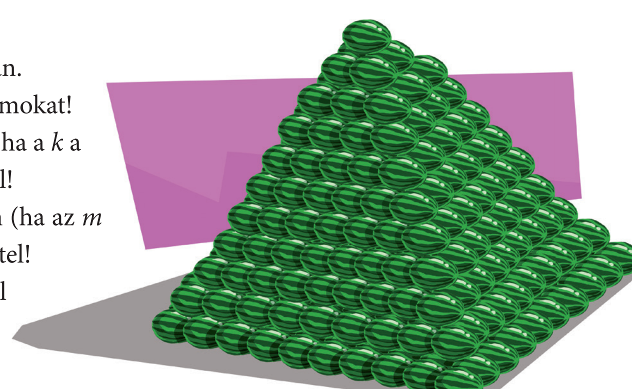
$(a_k + a_{n+1-k}) = a_1 + (k-1)d + a_1 + (n+1-k-1)d = a_1 + a_1 + (n-1)d = a_1 + a_n$.

Ezt helyettesítsük be minden zárójeles tag helyére: $2S_n = (a_1 + a_n)\,n$

Ebből: $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

2. Figyeld meg a dinnyepiramist!...

A rajzon látható piramis „négyzet alakú”, és 11 szintje van.



a) Hány dinnye van az egyes szinteken? Sorold fel a számokat!

b) Hány dinnye van a felülről számított k-adik szinten (ha a k a 12-nél kisebb pozitív egész szám)? Add meg képlettel!

c) Hány dinnye van az alulról számított m-edik szinten (ha az m a 12-nél kisebb pozitív egész szám)? Add meg képlettel!

d) Összesen hány dinnye lehet a kupacban, és ezek közül hány nem látható?

e) Adj valamilyen elfogadható alsó és felső becslést a dinnyekupac tömegére! Indokold a becslésedet számításokkal! (A dinnye sűrűsége közel annyi, mint a vízé.)

f) Bence azt állítja, hogy ha a felülről számított első n szinten található dinnyék számát összeadod, akkor $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$-ot kapsz eredményül. Ellenőrizd, igaza van-e Bencének!

g) Mennyi lehet az $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 25^2$ összeg?

31 Mértani sorozatok

A több évre kötött biztosítások esetében figyelembe kell venni, hogy az évek múlásával a pénz értéke romolhat, az árak emelkedhetnek. Egy lakásbiztosítás esetében például a 8-10 évvel korábban megállapított kifizetési értékek ma már kevésnek bizonyulhatnak egy káresemény bekövetkeztekor. A biztosítók között ezért bevett gyakorlat az értékkövető biztosítási díj megállapítása, az „indexálás". Ez azt jelenti, hogy a biztosítás éves díját minden biztosítási évforduló alkalmával bizonyos mértékben – általában a hivatalosan megállapított infláció mértékével – megemelik. Ez biztosítja azt, hogy kár esetén az aktuális piaci értéknek megfelelő kártérítést tudjanak fizetni.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. A család új lakásbiztosítást szeretne kötni, amelynek az éves díja most az első évben 24 000 Ft lenne. Utánanéztek, hogy hogyan alakult az infláció mértéke az utóbbi években, és úgy találták, hogy az átlagosan évi 5% volt, tehát várhatóan körülbelül ekkora arányban növekszik majd a biztosítás díja is minden évben.

a) Írjuk fel, hogy várhatóan hány forintot fizetnek biztosításra a második, harmadik és negyedik évben!

b) Milyen rekurzív képlet segítségével számítható ki egy adott évi díjból a következő évre vonatkozó díj?

c) Adjunk meg olyan általános képletet, amellyel megbecsülhető az éves díjak sorozatának n-edik tagja, azaz a biztosítási díj a megkötés utáni n-edik évre!

d) Számítsuk ki, hogy ha az infláció hosszú távon is évente 5% körül alakul, várhatóan mennyit kell majd fizetni a biztosításért a 10. évben!

Megoldás

a) Tudjuk, hogy az első éves díj $a_1 = 24\,000$ forint, és hogy az 5%-os növekedés azt jelenti, hogy ezt 1,05-dal kell szorozni. Így tehát $a_2 = a_1 \cdot 1{,}05 = 25\,200$ (Ft); $a_3 = a_2 \cdot 1{,}05 = 26\,460$ (Ft); $a_4 = a_3 \cdot 1{,}05 = 27\,783$ (Ft).

b) $a_{n+1} = a_n \cdot 1{,}05$.

c) Az első tagot mindig újra és újra 1,05-dal szorozzuk: $a_n = 24\,000 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 \cdot \ldots \cdot 1{,}05 = 24\,000 \cdot 1{,}05^{n-1}$.

d) A 10. évben a díj: $a_{10} = 24\,000 \cdot 1{,}05^{10-1} = 24\,000 \cdot 1{,}05^9 \approx 37\,230$ forint.

ELMÉLET

Ha (a_n) számtani sorozat, melynek első tagja a_1 és kvóciense q, $(a_1, q \neq 0)$, akkor

$$a_2 = a_1 \cdot q;$$
$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2; \ldots$$

azaz minden $n \in \mathbf{N}^+$ esetén $$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$$

FELADAT

1. Egy mértani sorozat első tagja 18, második tagja 27. Mennyi a sorozat negyedik, tizedik és huszonötödik tagja?

2. Egy mértani sorozat első tagja 3, kvóciense 1,04. Hány olyan tagja van, amely kisebb, mint 30?

3. Egy vállalkozó 2012-ben vett egy 21,5 millió forint értékű gépet. Ennek az értéke évente az előző évi értékének 85%-ára csökken. Amikor a gép értéke kevesebb lesz, mint az eredeti árának a 45%-a, azaz az értékcsökkenés eléri az 55%-ot, a gépet le kell selejtezni.

a) Mennyit ér ez a gép 3 év múlva? Figyelj! Itt a választ a_4 értéke fogja megadni!
b) Melyik évben kell leselejtezni?
c) Oldd meg ezt a feladatot úgy is, hogy nem használod fel a 21,5 millió forintos adatot!

KIDOLGOZOTT FELADAT

2. Egy mértani sorozat negyedik tagja 10, hatodik tagja 32,4. Számítsuk ki a sorozat ötödik tagját, ha
a) ez a tag pozitív;
b) ez a tag negatív!

Megoldás

A szokásos jelölésekkel: $a_4 = 10$; $a_5 = 10q$ és $a_6 = 10q^2$, tehát
$q^2 = \frac{32{,}4}{10} = 3{,}24.$

a) $q > 0$, ezért $q = \sqrt{3{,}24} = 1{,}8$, tehát
$a_5 = 10 \cdot 1{,}8 = 18.$

b) $q < 0$, ezért $q = -\sqrt{3{,}24} = -1{,}8$, tehát
$a_5 = 10 \cdot (-1{,}8) = -18.$

Megjegyzés

Az a) esetben igaz, hogy $18 = \sqrt{10 \cdot 32{,}4}$, tehát
$a_5 = \sqrt{a_4 \cdot a_6}$.
Az ötödik tag a két szomszédos tag *mértani közepével* egyenlő.
A b) esetben az $a_5^2 = a_4 \cdot a_6$ összefüggés igaz, de ebből $a_5 = -\sqrt{a_4 \cdot a_6}$ következik.

FELADAT

4. Egy mértani sorozat tizedik tagja 9, tizenkettedik tagja 16. Számítsd ki a sorozat tizenegyedik tagját, hányadosát és első tagját, ha

a) a sorozat tagjai pozitívak;
b) a sorozat tagjai között felváltva pozitív és negatív számok szerepelnek!

HÁZI FELADAT

1. Egy mértani sorozat ötödik tagja 128, hetedik tagja 512. Számítsd ki a sorozat
a) hányadosát; **b)** első tagját; **c)** tizedik tagját!

2. Újsághír (Agroinform): *Dél-Koreában 2011-ben mintegy 1,4 millió sertést kellett elpusztítani azért, hogy a gyorsan terjedő fertőző száj- és körömfájás további terjedését megakadályozzák. Ez a szám jóval meghaladja a valóban fertőzött állatok számát, de elővigyázatosságból azokat az állatokat is elpusztították, amelyek a fertőzöttekkel egy telepen éltek.*
Egy tartományban a fertőzött sertések száma az első héten 520. Az új fertőzések száma hetente körülbelül 35%-kal haladja meg az előző heti új fertőzések számát. Megközelítőleg hány új fertőzés lesz
a) a 2. héten; **b)** az 5. héten; **c)** a 15. héten?

3. Egy pénzintézet a három hónapos lekötésekre 4% éves kamatot kínál. Mivel a három hónap éppen egy negyed év, annak leteltével az éves kamat egynegyed részét, azaz 1%-ot írnak jóvá. A három hónapos kamatperiódus lejártával a betét felvehető, vagy azonos feltételekkel újra leköthető.
a) Számítsd ki, hogy az első év végén mennyi pénz lesz azon a számlán, amelyen 1 000 000 forintot helyeztek el a fenti kamatozással, és amelyen minden periódus végén újra lekötötték az aktuális összeget!
b) Legalább mennyi ideig kell várni, hogy az újra és újra lekötött betét legalább 200 000 forint kamatot adjon?

További érdekességeket olvashatsz a 33. lecke után található Ráadásban.

32 A mértani sorozat első n tagjának összege

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy 10 éves lakásbiztosítás első éves díja 24 ezer Ft. Az éves díj minden évben 5%-kal nő, tehát az előző éves díj 105%-a. A 10 év alatt összesen mekkora összeget kell fizetni a biztosításért?

Megoldás

A 10 alkalommal fizetendő díj összesen

$S_{10} = 24 + 24 \cdot 1{,}05 + 24 \cdot 1{,}05^2 + \ldots + 24 \cdot 1{,}05^8 + 24 \cdot 1{,}05^9$ (ezer forint).

Ehhez nagyon hasonló összeget kapunk, ha megszorozzuk 1,05-dal:

$1{,}05 \cdot S_{10} = 24 \cdot 1{,}05 + 24 \cdot 1{,}05^2 + \ldots + 24 \cdot 1{,}05^8 + 24 \cdot 1{,}05^9 + 24 \cdot 1{,}05^{10}$ (ezer forint).

Vonjuk ki az alsó összegből a felső összeget!

$$\begin{aligned}
1{,}05 \cdot S_{10} &= \phantom{24 + {}} 24 \cdot 1{,}05 + 24 \cdot 1{,}05^2 + \ldots + 24 \cdot 1{,}05^8 + 24 \cdot 1{,}05^9 + 24 \cdot 1{,}05^{10} \\
S_{10} &= 24 + 24 \cdot 1{,}05 + 24 \cdot 1{,}05^2 + \ldots + 24 \cdot 1{,}05^8 + 24 \cdot 1{,}05^9 \\
\hline
1{,}05 \cdot S_{10} - S_{10} &= 24 \cdot 1{,}05^{10} - 24 \\
0{,}05 \cdot S_{10} &= 24 \cdot (1{,}05^{10} - 1) \\
S_{10} &= \frac{24 \cdot (1{,}05^{10} - 1)}{0{,}05} \approx 302 \text{ (ezer forint)}
\end{aligned}$$

10 év alatt tehát összesen körülbelül 302 ezer forintba kerül a lakás értékkövető biztosítása.

ELMÉLET

Általánosan is igaz, hogy ha egy mértani sorozat első tagja a_1, hányadosa pedig q, akkor a sorozat első n számú tagjának összege: $S_n = \dfrac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$, ha $q \neq 1$.

Ha $q = 1$, akkor a mértani sorozat minden tagja a_1-gyel egyenlő, ezért ekkor $S_n = n \cdot a_1$.

FELADAT

1. Egy mértani sorozat első tagja 18, második tagja 27. Számítsd ki a sorozat első négy, első tíz és első huszonöt tagjának összegét!

2. Egy mértani sorozat első tagja 49, kvóciense (-1). Mennyi az első n tag összege, ha

a) $n = 5$;

b) $n = 10$;

c) $n = 28$;

d) $n = 79$?

3. Egy fiatalember 18 éves korában dohányozni kezdett. Hetente 2400 forintot költött erre a káros szokására. Egyszer kiszámította, hogy ha az egy év alatt dohányzásra költött összeget évente inkább befektetné, akkor még évi 6%-os kamatos kamattal számolva is szép összeget takaríthatna meg 50 éves korára. Így okoskodott: „Egy év alatt $52 \cdot 2400 = 124\,800$ forintot költök a dohányzásra. Ha ezt az összeget év elején befektetném egy bankba évi 6%-os kamatos

kamatra, akkor 50 éves koromra ez az összeg $124\,800 \cdot 1{,}06^{32}$ forintra hízna. Csakhogy a következő évben is befektetném a dohányzáson megtakarított 124 800 forintot, amely 31 évig kamatozva $124\,800 \cdot 1{,}06^{31}$ forintra növekedne. Ezt a befektetési módszert folytatva 50 éves koromra $124\,800 \cdot 1{,}06^{32} + 124\,800 \cdot 1{,}06^{31} + 124\,800 \cdot 1{,}06^{30} + \ldots + 124\,800 \cdot 1{,}06$ forintom lenne a bankban. Ezt könnyen ki is tudom számolni, hiszen egy mértani sorozat első 32 tagjának összegét kell csak meghatároznom.
Mekkora lesz ez az összeg?

4. Mennyi lehet egy olyan mértani sorozat első hat tagjának az összege, amelynek a második tagja 20 és a negyedik tagja 500?

HÁZI FELADAT

1. Töltsd ki a táblázat üres mezőit (a_1 egy mértani sorozat első tagja, q a hányadosa, a_n az n-edik tagja, S_n az első n tag összege)!

a_1	q	n	a_n	S_n
1	2		1024	
	5	4	300	
512	0,5			1023

2. Egy 120 kg-os ember orvosi tanácsra szigorú diétába kezd, így hetente súlyának 1,5%-át tudja leadni. Hány kilót tud lefogyni
a) 5 hét alatt; **b)** 15 hét alatt; **c)** 20 hét alatt?
Hány hét múlva lesz 85 kg-os?

3. Egy hosszú betegség után 42 kg-osra lefogyott ember szeretné visszanyerni eredeti súlyát, 65 kg-ot. Ha hetente súlyának 1%-át tudja visszanyerni, hány hét után lesz ismét a régi formában?

4. Egy tartományban a száj- és körömfájással fertőzött sertések száma az első héten 520. Az új fertőzések száma hetente körülbelül 35%-kal haladja meg az előző heti új fertőzések számát. Ha a fertőzés terjedésének üteme tartósan megmaradna, akkor megközelítőleg hány sertés fertőződne meg összesen
a) 5 hét alatt; **b)** 15 hét alatt; **c)** 20 hét alatt?

5. Sok ember érdekes hobbija – sőt, újabban már komoly szolgáltatásként is elérhető – a családfakutatás. Időben visszafelé haladva azonban nemcsak azért nehezedik a kutatás, mert egyre hiányosabbak az adatok, hanem azért is, mert minden újabb generációban több és több őst kell felkutatni (két szülő, négy nagyszülő stb.). Számítsuk ki, hogy összesen hány ősünket kellene felkutatni, ha tíz generációra, vagyis körülbelül 200-250 évre visszamenőleg mindegyikükről szeretnénk megtudni valamit!

További érdekességeket olvashatsz a 33. lecke után található Ráadásban.

33 Vegyes feladatok

FELADAT

1. Egy számtani sorozat első tagja 5, differenciája 2. Az első taggal kezdve összeadtuk a sorozat egymást követő tagjait, így 357-et kaptunk eredményül. Hány tagot adtunk össze?

2. Egy mértani sorozat első tagja 16, kvóciense 1,07.

a) Hány olyan tagja van, amely kisebb, mint 1000?

b) Összeadtuk az első n tagját, és a kapott összeg kisebb, mint 1000. Legfeljebb hány tagot adhattunk össze?

3. A (b_n) mértani sorozat első tagja 1, hányadosa $\frac{1}{2}$.

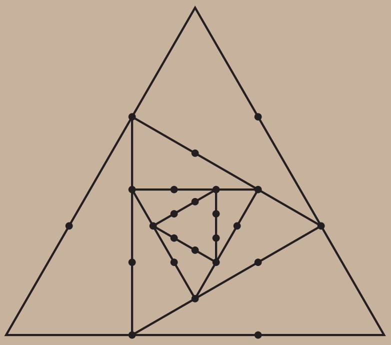
a) Számítsd ki az első 5, 10, 15, 20 tag összegét!

b) Kerekítsd az a) feladat eredményeit ezredekre!

c) Rajzolj olyan számegyenest, amelyen 4 cm-esek az egységek! Ábrázold ezen az $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ összeget!

d) Bence azt állítja, hogy akárhány tagját adod is össze a (b_n) mértani sorozatnak, az összeg sohasem éri el a 2-t. Mi a véleményed erről az állításról?

4. Csilla rajzolt egy 30 cm oldalhosszúságú szabályos háromszöget, majd elharmadolta az oldalait, és az óra járásának megfelelő irányban haladva összekötötte a csúcsoktól számított első osztópontokat. Így ismét egy szabályos háromszöget kapott. Ezt ismételte összesen 3-szor. Annyira megtetszett neki a minta, hogy elhatározta, ilyen alakú emeletes tortát készít Hajninak a születésnapjára. A háromszögek oldalait színes cukrokkal díszíti. Milyen hosszú lesz ez a cukordíszítés, ha négyszintes tortát készít? Összesen hány cm^2 1 cm vastagra nyújtott tésztára lesz szüksége, ha az összegyúrt tésztának kb. 10%-a lesz hulladék?



A cukordíszítés előtt a torta felületét marcipánnal szeretné beborítani. Hány cm^2 1 mm-re nyújtott marcipánra lesz szüksége, ha a torta oldalát is marcipánnal fogja bevonni?

5. Áruvásárlási hitelt hirdetnek 6 hónapra. A hitel összege 100 ezer forint. A hitelező bank tájékoztatása szerint a teljes hiteldíjmutató (THM) évi 30%, ami egy hónapra 2,5% kamatot jelent a fennálló tőketartozás után (más költséget a bank nem számít fel). A havi törlesztőrészlet x ezer Ft.

a) Kövesd nyomon a tartozás alakulását az alábbi táblázat segítségével!

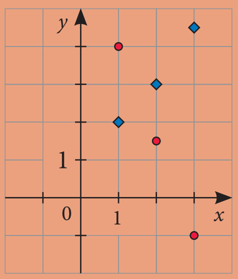
	Tartozás (ezer Ft)	Tartozás „másképpen” (ezer Ft)
1. hónap végén	$100 \cdot 1{,}025 - x$	$102{,}5 - x$
2. hónap végén	$100 \cdot 1{,}025^2 - x \cdot 1{,}025 - x$	$105{,}063 - x \cdot (1{,}025 + 1)$
3. hónap végén	$100 \cdot 1{,}025^3 - x \cdot 1{,}025^2 - x \cdot 1{,}025 - x$	$107{,}689 - x \cdot (1{,}025^2 + 1{,}025 + 1)$
4. hónap végén		
5. hónap végén		
6. hónap végén		

b) A 6. hónap végére a tartozás összegének 0 Ft-nak kell lennie. Ennek ismeretében számítsd ki a havi törlesztőrészletet!

c) Ellenőrizd a b)-ben kapott eredményedet úgy, hogy hónapról hónapra kiszámítod a hónap végén fennálló tartozást!

HÁZI FELADAT

1. A mellékelt grafikonon egy számtani és egy mértani sorozat első 3-3 tagját ábrázoltuk. Határozd meg a sorozatok első és tizedik tagját, valamint az első 25 tag összegét mindkét sorozat esetében!



2. Mennyi lehet annak az (a_n) mértani sorozatnak a 7. tagja, amelynek

a) az 5. tagja (-4) és a 9. tagja (-49);

b) a 4. tagja (-18) és a 10. tagja (-2);

c) kvóciense -3, az első 10 tag összege -7381?

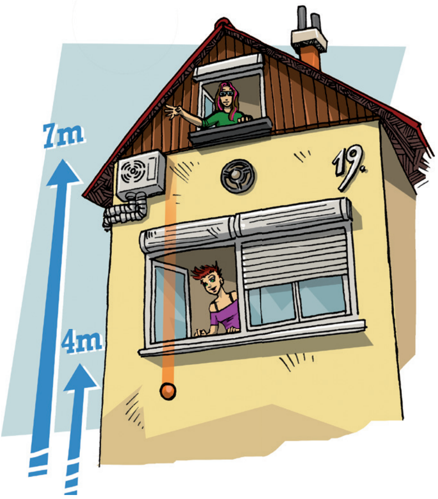
3. Egy faiskolában egy trapéz alakú területen több sorba ültettek barackfákat. Az első sorba 40 csemete került, minden következő sorba pedig 4-gyel több, mint az előzőbe. Összesen 1020 facsemete van ezen a részen. Hány sorba ültettek barackfákat?

EMELT SZINT

1. Hajni egy vadonatúj pattanós labdát felvitt az első emeletre, és kiejtette az ablakból. Teljes megdöbbenésére el tudta kapni a visszapattanó labdát, csak 10 cm-rel lejjebb kellett tartania a kezét. Utánagondolt, hogy kb. 4 m magasságból ejtette ki, és kiszámolta, hogy az eredeti magasság hányad részéig pattan vissza a labda.
Elolvasta a leírást, és kiderült, hogy a labda mindig az eredeti magasság ugyanannyiad részéig pattan vissza.
Csillának is megtetszett a játék, és elhatározták, hogy Hajni a második emeleti ablakból kiejti a labdát, Csilla pedig az első emeleti ablakban elkapja.

a) Hányat pattanhat a labda, ha Csilla kb. 4 m magasságban kapja el, Hajni pedig 7 m magasságból ejti le?

b) Hány méter utat tesz meg, ha Csilla akkor kapja el, amikor utoljára emelkedik 4 m fölé?



2. Arany úr ajándékba kapott 2 liter 55 fokos házi pálinkát. (Egy szeszes ital annyi fokos, ahány százalék benne a tiszta alkohol.) Mivel ők nem fogyasztanak pálinkát, elhatározták, elviszik Vili papának, aki a közelgő névnapjára sok vendéget vár. Megbeszélte a család, hogy az 55 fokos pálinka túl erős, egy részét majd vízzel pótolják. Kiszámították, hogy ha 2 dl, vagyis 10% pálinkát vesznek ki és pótolják vízzel, akkor a töménység $0{,}9 \cdot 55 = 49{,}5$ fok lesz. Még ez is túl erős! Magdi néni úgy döntött, hogy 3 dl-t pótoljanak vízzel.

a) Hány fokos lett a pálinka, amikor Magdi néni kivett belőle 3 dl-t, és vizet öntött a helyébe?

b) Hány fokos lett végül a pálinka, ha Arany úr, valamint 2 fia is tovább hígították ugyanígy a pálinkát: kivettek belőle 3 dl-t, és pótolták vízzel?

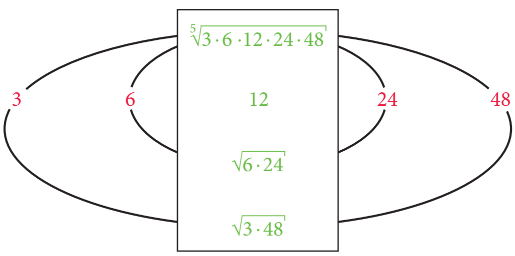
c) A négyszer felhígított pálinkához végül hozzáöntötték a kivett 1,2 l-t. Ez a keverék tulajdonképpen az eredeti 2 liter 55 fokos pálinkából és 1,2 l vízből állt. Ez hány fokos lett?

RÁADÁS

1. Mértani sorozat és mértani közép

Ha az (a_n) mértani sorozat tagjai pozitívak, akkor a sorozat bármelyik tagja (a második tagtól kezdődően) az őt közrefogó két tag *mértani közepével* egyenlő (erről a tulajdonságról kapta a nevét a sorozat).
Némi algebrai ismeret birtokában ez könnyen belátható.
Ha a sorozat hányadosa q, akkor $a_n = a_{n-1} \cdot q$ és $a_n = \frac{a_{n+1}}{q}$, tehát $a_n \cdot a_n = a_{n-1} \cdot q \cdot \frac{a_{n+1}}{q}$.
Egyszerűsítés után: $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$. Mivel $a_n > 0$, ezért $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$, ami az állításunkat igazolja.

Megjegyzés
Az $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$ összefüggés minden mértani sorozatra igaz.



2. A számítógépen futó táblázatkezelő programok használata két ponton igen erősen kapcsolódik a sorozatokhoz. Az egyik a sorozat megadása képlettel vagy rekurzióval, a másik a sorozat tagjainak összegzése. A táblázatkezelőben már alapszintű ismeretek birtokában is mindkettő nagyon egyszerűen megvalósítható. A rekurzív úton megadott sorozatok tagjai számítógép nélkül csak hosszadalmas számolással adhatók meg, a táblázatkezelő programmal azonban (a számkijelzés korlátait figyelembe véve) egyszerűen vizsgálhatók.

	A	B	C	D
1	3	1	100 000	1
2	6	1	90 000	-2
3	12	2	81 000	-1
4	24	3	72 900	-3
5	48	5	65 610	-4
6	96	8	59 049	-7
7	192	13	53 144	-11
8	384	21	47 830	-18
9	768	34	43 047	-29
10	1 536	55	38 742	-47
11	3 072	89	34 868	-76
12	6 144	144	31 381	-123

Hogyan adhatunk meg egy sorozatot a táblázatkezelőben rekurzióval? Lássunk egy példát egy mértani sorozatra! Írjuk be az A1 cellába a mértani sorozat első tagját, például a 3-at! Ha a sorozat hányadosa például 2, akkor az A2 cellába írjuk azt, hogy =A1*2. Ha ezt a cellát „egérhúzással” vagy a képlet egyszerű másolásával az A3, A4, … cellákba írjuk, akkor az A3 cellában az =A2*2, az A4 cellában az =A3*2 értéke (tehát 12, illetve 24) jelenik meg. Világos, hogy a sorozat nagyon sok tagját nagyon gyorsan megjeleníthetjük, majd egyetlen képlettel ezek összegét is kiszámíttathatjuk a számítógéppel.

	A
1	3
2	=A1*2
3	=A2*2
4	=A3*2
5	=A4*2

A Fibonacci-sorozat sok tagját megjeleníthetjük számítógéppel. Az A1 és az A2 cellába írjunk 1-et, majd az A3 cellába írjuk ezt: =A1+A2. Ekkor az A3 cellában nyilván 2 jelenik meg. Ha az A3 cella képletét másoljuk az A4, A5, … cellákba, akkor azokban rendre az =A2+A3, =A3+A4, … képletnek megfelelő érték jelenik meg, azaz rendre 3, 5, … .
A Fibonacci-sorozat tagjainak összegére nem kerestünk képletet (bár létezik ilyen), de számítógéppel gyorsan állíthatjuk elő akár nagyon sok tag összegét is.

	A
1	1
2	1
3	=A1+A2
4	=A2+A3
5	=A3+A4

	A
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5

3. *Egy klasszikus probléma*

Képes-e gyorslábú Akhilleusz utolérni egy teknősbékát?

A Kr. e. 450 körül tevékenykedő eleai Zénón tetszetős logikai érveléssel megpróbálta „bizonyítani", hogy nem képes: *„Akhilleusznak először el kell jutnia oda, ahonnan a teknősbéka indult, de ez alatt az idő alatt az állat már előrehaladt. Mire ott Akhilleusz utolérné, már ismét továbbmászott és így tovább. Itt végtelen sok időtartam összege keletkezik, aminek nem lehet a végére érni."* (Ez Zénón egyik *paradoxonja*; paradoxon = látszólagos ellentmondás.)

Aki először hallja ezt az érvelést, nem biztos, hogy rájön arra, hogy ennek melyik részlete okozza a látszólagos ellentmondást a tapasztalat és a logika között. Ez a részlet az, amelyik azt állítja, hogy végtelen sok időtartam összege nem lehet véges, azaz végtelen sok pozitív szám összege szükségképpen végtelen.

Ez az állítás hamis.

Aki megoldotta a 4. feladat d) részét, az pontosan tudja, hogy ha egy szakaszhoz hozzáadjuk a felét, aztán a maradék félnek a felét, majd újra és újra a maradék felét, akkor akárhány tagot adunk is össze, az összeg nem éri el a szakasz hosszának a kétszeresét: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}<2$; $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}<2$, és így tovább.

Tehát végtelen sok pozitív szám „összege" lehet véges, Zénón „bizonyítása" nem vezet ellentmondásra!

Megjegyzések

1. Ha egy mértani sorozat első tagja az a_1 pozitív szám és a hányadosa (q) az 1-nél kisebb pozitív szám, akkor akárhány tagot adunk is össze az első tagtól kezdve, az összeg mindig kisebb az $\frac{a_1}{1-q}$ számnál.

   Az is igaz azonban, hogy akár egymilliomodra is megközelítheti az összeg ezt a számot, ha elég sok tagot adunk össze.
2. Bebizonyítható, hogy ha a pozitív egész számok reciprokait rendezzük csökkenő sorozatba, és összeadásjeleket írunk a számok közé:

   $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots$, akkor ez a „végtelen sok tagból álló összeg" minden pozitív egész számnál nagyobb lesz. Ez nagyon meglepőnek tűnik annak ismeretében, hogy az ugyancsak végtelen sok „egyre kisebb" tagból álló összeg, az $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\ldots$ nem lehet nagyobb 2-nél.

4. A megfizethetetlen játék

Egy legenda szerint volt Indiában egy király, aki annyira unatkozott, hogy belebetegedett. Udvarából az egyik bölcs, Sessa ebn Daher ekkor kitalált egy játékot, a SAKK-ot. A király alig játszott le egy partit, máris meggyógyult tőle. Annyira megörült, hogy megkérdezte Sessát:

– Mit kívánsz jutalmul?

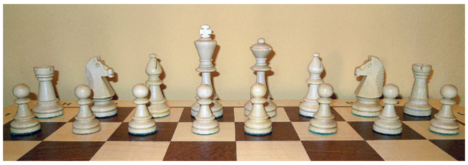
A bölcs így válaszolt:

– Tégy a sakktábla első kockájára egy búzaszemet, a másodikra kettőt, a harmadikra négyet, és így tovább, minden kockára kétszer annyit, mint az előtte lévőn volt. Ez legyen a jutalmam!

A sakktábla első kockáira még alig kerül valami. De vajon mekkora lenne Sessa ebn Daher jutalma?

A válaszhoz az 1; 2; 4; 8; … mértani sor első 64 tagjának összegét kell meghatároznunk.

$$S_{64}=\frac{a_1\cdot\left(q^{64}-1\right)}{q-1}=\frac{1\cdot\left(2^{64}-1\right)}{2-1}=2^{64}-1$$



Ez közelítőleg $1{,}84\cdot10^{19}$ db búzaszem.

Egy átlagos búzaszem tömege körülbelül 0,04 g.

A jutalom tehát $1{,}84\cdot10^{19}\cdot4\cdot10^{-5}$ (kg) $=7{,}36\cdot10^{14}$ (kg). Ez 736 milliárd tonna búza.

A világ teljes búzatermelése 740 millió tonna körül volt 2016-ban, ennek ezerszeresét kérte az indiai bölcs. Nem terem ennyi búza a világon.

Még egy érdekes adat: ennyi búzával kb. 1 cm vastagon beboríthatnánk az egész földgolyót.

34 Gyakorlás vagy tudáspróba

CSOPORTVERSENY

Alkossatok 4 fős csoportokat!

I. Oldjátok meg az 1–8. feladatokat, a 8. feladat eredményét írjátok fel a táblára! Az a csoport nyer, amelyik először írja fel a jó eredményt. A verseny addig tart, amíg mindegyik csoport felírja eredményét a táblára. Ez alatt az idő alatt mindegyik csoport egyszer javíthat.

1. feladat Mennyivel nagyobb az $(5n - 4)$ sorozat hetedik tagja a harmadiknál?	*A kapott számot jelöljétek a K betűvel!*
2. feladat Egy mértani sorozat harmadik tagja is és kvóciense is $\frac{1}{2}$. Hány tagot kell összeadni az elsőtől kezdve, hogy az összeg 3,8-nél nagyobb legyen?	*Az eredményt jelöljétek az L betűvel!*
3. feladat Mennyi az 50-nél kisebb 2 jegyű pozitív egész számok összege?	*A kapott számot jelöljétek M-mel!*
4. feladat Egy számtani sorozat negyedik tagja 31, a hatodik tagja pedig 51. Számítsd ki a sorozat első tagját!	*A kapott számot jelöljétek N-nel!*
5. feladat Hány olyan mértani sorozat van, amelynek a negyedik tagja 20 és a hatodik tagja 5?	*A kapott számot jelöljétek P-vel!*
6. feladat Elhelyeztünk a bankban 80 ezer forintot évi 6%-os kamatra. Hány év alatt nő ez az összeg $80 \cdot 1{,}06^7$ ezer forintra?	*A kapott számot jelöljétek Q-val!*
7. feladat Összeadtuk az $a_n = 0{,}08 \cdot 2^{n-1}$ sorozat első tizenöt tagját. Mennyi az összeg legkisebb helyiértékű számjegye?	*A kapott számot jelöljétek R-rel!*
8. feladat Számítsátok ki, mennyi az $\frac{M}{K}x^2 - (R \cdot Q + 3)x - 2(L \cdot N + P) = 0$ másodfokú egyenlet pozitív gyöke!	*A kapott számot írjátok fel a táblára! Zárójelben tüntessétek fel a felírás időpontját!*

II. Az első 3 helyezett csapat mutassa be, milyen egyszerű módszereket alkalmazott!

FELADAT

1. Egy számtani sorozat tizenötödik tagja 21. Mennyi az első tagja, és mennyi a differenciája, ha az első tizenöt tag összege

a) 52,5; **b)** −52,5?

2. A következő feladatokban (b_n) egy-egy mértani sorozatot, n egy pozitív egész számot jelöl, q a mértani sorozat hányadosa, S_n pedig az első n tagjának az összege. Töltsd ki a táblázat üres helyeit!

b_1	q	n	b_n	S_n
120	0,5	10		
–5	3	8		
	–2	4	72	
	2	5		155

3. Egy vetélkedőn 29 000 forint jutalmat osztottak ki. Az első helyezett 3800 Ft-ot kapott, a további helyezettek rendre 200 Ft-tal kevesebbet, mint a versenyben közvetlenül előttük végző versenyző. Hány versenyzőt jutalmaztak?

4. A vásárban úgy kínálják eladásra a Betyár nevű lovat, hogy csak a patkószegekért kell fizetni, a ló ingyen van. Az első patkószeg ára 1 fillér, minden további patkószeg ára kétszer annyi fillér, mint az előzőé. Betyár pataiba összesen 32 patkószeget vertek. Mennyiért lehet megvenni Betyárt?

5. Egy gazdának 7 fia van. Az ember úgy rendelkezik, hogy a legidősebb fiú kapja meg a vagyonának a 20%-át, a korban utána következő a vagyonból így megmaradó 80%-os rész 20%-át, és így tovább a többi fiú, utoljára a legkisebb is megkapja a megmaradó rész 20%-át. Az ezután megmaradó vagyonrészt jótékony célra szánja a gazda.

a) A vagyon hány százalékát kapja a középső fiú?

b) A vagyon hány százalékát kapja a legkisebb fiú?

c) A vagyonnak mekkora része jut jótékony célokra?

HÁZI FELADAT

1. Egy számítógép úgy van beállítva, hogy ha a rendszer túlterheltség miatt elutasítja a csatlakozási kérelmét egy bizonyos weboldalhoz, akkor először 1 másodperc után próbál újra csatlakozni, majd – hogy a túlterheltséget enyhítse – újabb 3 másodperc után, és így tovább, fokozatosan, mindig 2 másodperccel növelve a várakozási időt az egyes próbálkozások között.

a) Hány másodpercet fog várni a gép a tizedik újrapróbálkozás előtt?

b) Összesen hány másodperccel hosszabbítja meg a csatlakozási kísérleteket a tíz várakozás?

c) Hány másodpercet fog várni a gép a tizedik újrapróbálkozás előtt, ha úgy állították be, hogy az első 1 másodperc után a várakozási időt mindig 10%-kal növelje?

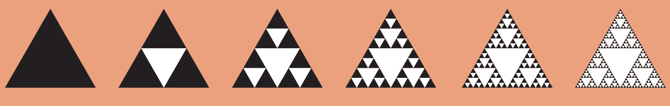
d) Összesen hány másodperccel hosszabbítja meg a csatlakozási kísérleteket a tíz várakozás ebben az esetben?

2. A modern matematika egyik érdekes ága a fraktálok elméletével foglalkozik. A fraktálok olyan alakzatok, amelyeknek bármilyen kicsiny részletét kinagyítva az eredetihez hasonló alakzatot kapunk. Az egyik legegyszerűbb és leghíresebb fraktál az úgynevezett *Sierpiński-háromszög*. Kössük össze egy teljesen feketére festett szabályos háromszög oldalfelező pontjait, és az így keletkezett belső háromszöget fessük fehérre! Ismételjük meg az eljárást az összes megmaradt fekete háromszöggel újra és újra! Az eljárás során kapott alakzatok közül az első hatot láthatod a mellékelt ábrán.

a) Hány fekete háromszög lesz a 20. ábrán?

b) Adj meg rekurzív képletet, amellyel az előző ábra fekete részének területéből kiszámítható a feketén maradó rész területe!

c) Az eredeti háromszög területének mekkora része fekete a 20. ábrán?



Témazáró feladatgyűjtemény

1. Határozzuk meg az alábbi sorozatok hatodik, illetve tizedik tagját!

a) $a_n = 3n^2 + n - 4$; **b)** $b_n = 2^n - 3$

2. Hányadik tagja az alábbi sorozatoknak a 17?

a) $a_n = 5n - 43$; **b)** $b_n = 3^n - 64$

3. Tagja-e az $a_n = 0{,}5n^3 - 9$, valamint $b_n = \frac{(3n+2)}{2n}$ sorozatoknak a $-9{,}5$?

4. Egy számsorozat első tagja 3. Adjuk meg a sorozat első hat tagját, ha tudjuk, hogy $a_{n+1} = 3a_n - 2$, ahol n pozitív egész szám!

5. Egy számtani sorozat hetedik tagja 503, harmincharmadik tagja 399. Határozzuk meg a sorozat első tagját és differenciáját!

6. Egy számtani sorozat első három tagjának összege 12, valamint tudjuk, hogy az ötödik tag tizenkettővel kisebb a nyolcadik tagnál. Melyik ez a sorozat?

7. A 7 és 35 közé iktassunk hat számot úgy, hogy a megadott számokkal együtt egy számtani sorozat nyolc egymást követő tagját kapjuk!

8. Egy számtani sorozat harmadik tagja $-17{,}5$. A sorozat első nyolc tagjának összege kétszer akkora, mint a következő nyolc tag összege. Határozzuk meg a sorozat első tíz tagjának összegét!

9. Határozzuk meg a háromjegyű páratlan számok összegét!

10. Egy számtani sorozat első tíz tagjának összege 20; ezek közül a páratlan indexű tagok összege 5. Melyik ez a sorozat?

11. Egy számtani sorozat első három tagjának összege 21; ugyanezen tagok szorzata 231. Határozzuk meg a sorozat nyolcadik és kilencedik tagjának szorzatát!

12. Határozzuk meg azoknak a négyjegyű számoknak az összegét, melyek hárommal osztva 2 maradékot adnak!

13. Egy számtani sorozat első tagja 8; differenciája 3. Az első tagtól kezdve hányat adjunk össze, hogy a kapott összeg legalább 1000 legyen?

14. **a)** Iktasson be a 6 és az 1623 közé két számot úgy, hogy azok a megadottakkal együtt egy számtani sorozat szomszédos tagjai legyenek!

b) Számítsa ki a 6 és az 1623 közötti néggyel osztható számok összegét!

(2005. május, középszint)

15. Milyen valós k esetén lesz az alábbi három mennyiség egy számtani sorozat egymást követő három tagja?

$3k - 1$; $4k + 2$; $7 - 5k$

16. Farönköket rakunk „gúlába" úgy, hogy a legalsó sorban 16 farönk van. A második sor farönköt az első sor szomszédos farönkjei közötti mélyedésekbe helyezzük és így tovább. Az utolsó sorba egy farönk jut. Hány farönk van az egész halomban?

17. Golyókat helyezünk el „háromszög" alakban úgy, hogy az első sorban egy golyó van, a másodikban kettő, a harmadikban három és így tovább. Hány sorban tudunk elhelyezni 28 golyót?

18. Egy sokszög kerülete 158 cm. Oldalai olyan számtani sorozat egymást követő elemei, amelynek különbsége 3 cm. A sokszög leghosszabb oldala 44 cm. Hány oldalú a sokszög?

19. Egy derékszögű háromszög oldalai számtani sorozatot alkotnak. A háromszög kerülete 84 cm. Mekkora a háromszög területe, illetve legkisebb szöge?

20. Adjuk meg az n-dik tagját az alábbi mértani sorozatoknak!

a) $\frac{6}{5}; \frac{12}{5}; \frac{24}{5}; \ldots$ **b)** $\frac{5}{2}; \frac{5}{4}; \frac{5}{8}; \ldots$ **c)** $3; -9; 27; \ldots$

21. Számítsuk ki annak a mértani sorozatnak a hatodik elemét, melynek adott az első eleme és a hányadosa az alábbiak szerint:

a) $a_1 = 6; \quad q = 0,5$

b) $a_1 = -\frac{1}{2}; \quad q = 4$

c) $a_1 = \frac{9}{4}; \quad q = -\frac{1}{3}$

22. Számoljuk ki a mértani sorozat első elemét, ha

a) $a_8 = 256; \quad q = 4$

b) $a_3 = \frac{4}{9}; \quad q = -\frac{1}{3}$

c) $a_6 = 2,25; \quad q = 1,5$

23. Határozzuk meg az alábbi mértani sorozatok hányadosát!

a) $a_1 = 4; \quad a_5 = 64$

b) $a_1 = \frac{2}{5}; \quad a_5 = \frac{1}{40}$

c) $a_1 = \sqrt{5}; \quad a_5 = \frac{1}{\sqrt{5}}$

24. Határozzuk meg az n értékét, ha

a) $a_1 = 3; \quad a_n = 243; \quad q = 3$

b) $a_1 = 0,6; \quad a_n = 0,075, \quad q = 0,5$

c) $a_1 = \frac{8}{5}; \quad a_n = 0,1; \quad q = \frac{1}{2}$

25. 160 és 5 közé iktassunk be négy számot úgy, hogy egy mértani sorozat egymás utáni elemeit alkossa a hat szám!

26. Egy mértani sorozat első három tagjának összege 168, az ezt követő három tag összege 21. Határozzuk meg a sorozat első hat tagját!

27. Egy mértani sorozat első eleme 0,5, kvóciense –2. Határozzuk meg a sorozat első hat elemének szorzatát!

28. Egy mértani sorozat első tagja 1, hányadosa 0,5. A sorozatnak melyik két szomszédos tagja közé esik a 0,000 001?

29. Egy számtani sorozat második tagja 5. Ezen sorozat első, harmadik és tizenegyedik tagja egy mértani sorozat három egymást követő tagja. Határozza meg a mértani sorozat hányadosát!

30. Egy mértani sorozat első három tagjának összege 52. Ha a harmadik számot tizenhattal csökkentjük, egy számtani sorozat első három tagjához jutunk. Határozza meg a mértani sorozatot!

31. Egy számtani sorozat első, második, illetve hetedik tagja egyúttal mértani sorozatot alkot. Tudjuk, hogy ezen tagok összege 93. Határozzuk meg a számtani sorozat első hét elemét!

32. Egy háromszög oldalai olyan mértani sorozatot alkotnak, melynek hányadosa $\frac{4}{3}$. Határozzuk meg a háromszög legnagyobb szögét!

33. Egy berendezés értéke évente átlagosan 6%-kal csökken. Mennyit ér egy félmillió forintos berendezés 12 év múlva?

34. Mennyi pénzünk lesz abban a bankban 10 év múlva, melyben 2 millió forintot helyezünk el évi 6%-os kamat mellett?

35. Évi hány százalékos átlagos növekedés mellett változik az eredetileg 6800 m^3 mértékű faállomány mennyisége 20 év alatt 12 260 m^3-re?

36. Hány év alatt duplázódik meg a betett pénz abban a pénzintézetben, melyben a kamat mértéke évi 5%?

37. Tíz éven keresztül minden év elején elhelyezünk a bankban 100 000 forintot. Mennyi pénzünk lesz a tizedik év végén, ha a kamat mértéke 5,5% évente?

38. Egy autó jelenlegi értéke 4,5 millió forint. Mennyit ért az autó 7 évvel ezelőtt, ha tudjuk, hogy az évi amortizáció (értékromlás) mértéke 4%?

39. Mennyi annak a hatmillió forintos hitelnek az évenkénti törlesztőrészlete, melyet tíz éven keresztül tíz egyenlő részletben szeretnénk visszafizetni, ha a bank a hitelért 10% kamatot számol évente?

35 Adatrendezés – statisztikai jellemzők

BEVEZETŐ

Egy kisváros tűzoltóparancsnoka összesítést készített, hogy az előző hónapban naponta hány riasztáshoz vonultak ki:

A napi riasztások száma	0	1	2	4	6	14
Hány napon fordult elő?	1	11	6	8	4	1

– 93 eset 31 nap alatt, ez naponta átlagosan három riasztás – elemezte a táblázatot a parancsnok.
– Csak azért, mert volt egy nap, amikor szokatlanul sok dolgunk akadt! – válaszolta az egyik társa. – Valójában jobb a helyzet, hiszen a hónap több mint felében maximum kétszer vonultunk, én inkább ezt gondolnám tipikusnak.
– Szerintem meg a legjellemzőbb esetszám az egy, hiszen ilyen napból volt a legtöbb – szólt közbe egy harmadik.
Kinek van igaza?

Megoldás
Nézzük, hogy mit mondhatunk a 31 adatból álló adatsokaságról!

A 31 adat között 6-féle szám fordul elő: a 0, az 1, a 2, a 4, a 6 és a 14. Ezek *gyakorisága* rendre 1, 11, 6, 8, 4, illetve 1.
Már tudjuk, hogy egy adatsokaságot (más szóval *adathalmazt*) egyetlen „legjellemzőbb” számmal leírni többféle módon is lehet. Így mindhárom tűzoltónak igaza lehet.
– A napi riasztások számának *átlaga* (számtani közepe) valóban 3, mert a 31 adat összege 93. A számtani közepet azonban most jelentősen növeli az egyetlen kiugróan nagy adat, a 14 (nélküle csak körülbelül 2,63 lenne a többi 30 adat átlaga).
– Ha az adatokat nagyság szerint sorba rendezzük, a kiugróan kicsi és nagy értékek a sor elejére, illetve a végére kerülnek, a sor közepén álló adat (*a medián*) pedig éppen a 2 lesz.
– Természetesen az is igaz, hogy a leggyakoribb esetszám (*a módusz*) még így is az 1, mert ennek a gyakorisága 11.

ELMÉLET

Egy véges számsokaság legfőbb **statisztikai jellemzői**:

átlag	a számsokaság elemeinek az összegét elosztjuk az elemek számával
módusz	a legtöbbször előforduló adat; ha több ilyen van, akkor a móduszok halmazáról beszélünk
medián	a nagyság szerinti felsorolásban középen álló szám, vagy páros számú elem esetén a két középső szám átlaga
terjedelem	a legnagyobb és a legkisebb szám különbsége

Az átlag-, módusz- és mediánértékeket szokás a számsokaság statisztikai középértékeinek is nevezni.

FELADAT

1. Egy város középiskolájában 4 évfolyamos gimnáziumi és 3 évfolyamos szakmunkásképzős osztályok vannak. A gimnáziumi osztályok betűjele: A, B, C és D, a szakiskolai osztályoké E, F és G. Az osztálylétszámokat a táblázat mutatja:

	A	B	C	D	E	F	G
9. évfolyam	36	36	34	36	25	38	26
10. évfolyam	35	29	30	31	27	33	20
11. évfolyam	30	31	36	33	21	26	12
12. évfolyam	27	29	34	31	–	–	–

a) Mennyi az átlagos létszám az egyes évfolyamokon?

b) Készíts diagramot az a) feladathoz!

c) Jelöld K-val a 16 gimnáziumi osztály átlagos létszámát, L-lel pedig a 9 szakmunkásképzős osztály átlagos létszámát! Számítsd ki, mennyi a K és mennyi az L!

d) Mit ad meg a $\frac{16K + 9L}{25}$ szám?

2. Az 1. feladatban az osztálylétszámok egy 25 számból álló számsokaságot alkotnak.

a) Melyik szám ennek a számsokaságnak a módusza?

b) Melyik szám ennek a számsokaságnak a mediánja?

c) Mennyi a számsokaság terjedelme?

3. Megadunk egy számsokaságot:
32, 18, 20, 18, 20, 24, 15, 18, 55, 10.

a) Mennyi az átlaga, a módusza, a mediánja?

b) A számsokaságból véletlenszerűen kiválasztunk egy számot. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám megegyezik valamely középértékkel (a módusszal, a mediánnal vagy az átlaggal)?

c) Adj meg öt számot úgy, hogy ennek a számsokaságnak ugyanaz legyen a módusza és a mediánja, mint az adott számsokaságé, de az átlaga kétszer akkora legyen!

d) Adj meg öt számot úgy, hogy ennek a számsokaságnak ugyanaz legyen az átlaga és a mediánja, mint az adott számsokaságé, de a módusza 3-mal kisebb legyen!

HÁZI FELADAT

1. Egy osztály történelemdolgozatot írt. Az érdemjegyeket mutatja a táblázat.

Osztályzat	1	2	3	4	5
Gyakoriság	0	9	8	6	5

a) Ábrázold az osztályzatok gyakoriságát oszlopdiagramon!

b) Add meg az osztályzatokat tartalmazó adathalmaz terjedelmét, móduszát, mediánját és átlagát!

c) Add meg az egyes érdemjegyek relatív gyakoriságát!

d) Ábrázold a c) feladatban kapott relatív gyakoriságokat oszlopdiagramon!

e) Mekkora a valószínűsége, hogy két dolgozatot véletlenszerűen kiválasztva mindkettő eredménye legalább 4-es?

2. Egy osztályban 25-en írtak történelemdolgozatot. A dolgozatokat a tanár az 1, 2, 3, 4, 5 érdemjegyek valamelyikével minősítette. Az osztályzatok átlaga 3,16 lett.

a) Számítsd ki, hogy mennyi a dolgozatokra írt érdemjegyek összege a 25 dolgozat esetében!

b) Adj meg egy lehetséges jegyeloszlást, amelyben 3 az érdemjegyek módusza!

c) Adj meg egy olyan lehetséges jegyeloszlást, amelyben 2 az érdemjegyek mediánja!

d) Elképzelhető-e olyan jegyeloszlás, amelyben az érdemjegyek módusza az 5? Ha igen, adj meg egy lehetőséget! Ha nem, válaszodat indokold!

e) Elképzelhető-e, hogy csak 3-as és 4-es osztályzatok születtek? Ha igen, adj meg egy lehetőséget! Ha nem, válaszodat indokold!

3. Bence beteg volt, de a háziorvosa szerint hétfőn már mehet iskolába. Bence vasárnap ötször is megmérte a lázát. A mérések átlaga 36,8 °C lett.

a) Elképzelhető-e, hogy egész nap láztalan volt Bence, azaz mind az ötször 37,5 °C-nál kevesebbet mért? Ha igen, adj meg egy lehetőséget! Ha nem, válaszodat indokold!

b) Elképzelhető-e, hogy Bencének kétszer is 37,8 °C volt a láza? Ha igen, adj meg egy lehetőséget! Ha nem, válaszodat indokold!

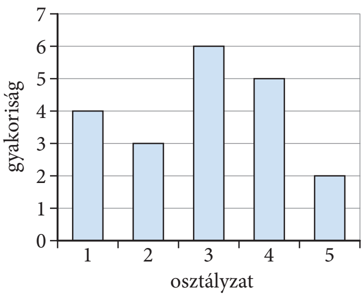
c) Elképzelhető-e, hogy a mért hőmérsékletek módusza 37 °C volt? Ha igen, adj meg egy lehetőséget! Ha nem, válaszodat indokold!

d) Elképzelhető-e, hogy a mért hőmérsékletek mediánja 36,6 °C volt? Ha igen, adj meg egy lehetőséget! Ha nem, válaszodat indokold!

36 Diagramok

KIDOLGOZOTT FELADAT

Az oszlopdiagramon egy osztály egyik matematikadolgozatának eredményei láthatók, osztályzatok szerinti összesítésben.



a) Foglaljuk táblázatba az egyes érdemjegyek gyakoriságát és relatív gyakoriságát!

b) Ábrázoljuk kördiagramon az érdemjegyek relatív gyakoriságát!

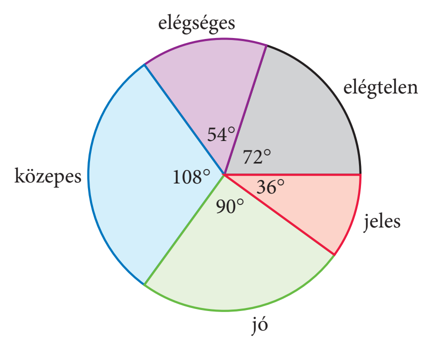
c) Adjuk meg az osztályzatokból álló adatsokaság terjedelmét, móduszát, mediánját és átlagát!

Megoldás

a) A gyakoriságokat leolvashatjuk a diagramról. A relatív gyakoriság az adat gyakoriságának és az összes adat számának a hányadosa. Feladatunkban 20 osztályzat szerepel, vagyis az adatok száma 20.

Osztályzat	1	2	3	4	5
Gyakorisága	4	3	6	5	2
Relatív gyakorisága	$\frac{4}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{2}{20}$
Százalékban	20%	15%	30%	25%	10%

b) A kördiagramon az adatok relatív gyakorisága a középponti szöggel egyenesen arányos. Az elégtelen osztályzat $\frac{4}{20}$ relatív gyakoriságához $\frac{4}{20} \cdot 360° = 72°$ nagyságú középponti szög tartozik, az elégséges $\frac{3}{20}$ relatív gyakoriságához $\frac{3}{20} \cdot 360° = 54°$ nagyságú középponti szög tartozik, és így tovább, rendre 108°, 90°, illetve 36° a további osztályzatokhoz tartozó középponti szög.



Megjegyzés
A kördiagram ugyanilyen lenne, ha nem a relatív gyakoriságokhoz, hanem a gyakoriságokhoz készítettük volna, hiszen a gyakoriságok és a relatív gyakoriságok egyenesen arányosak (mindegyik gyakoriság 20-szorosa a megfelelő relatív gyakoriságnak).

c) A 20 adat terjedelme $5 - 1 = 4$, módusza a 3.
Mivel a nagyság szerint rendezett adatok sorában középen a 10. és 11. helyen is 3 áll, ezért a medián is 3.
Az adatok átlagát *súlyozott számtani középpel* is kiszámíthatjuk:

$$\frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{4 + 3 + 6 + 5 + 2} = \frac{58}{20} = 2{,}9.$$

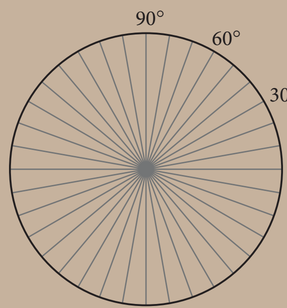
Diagramok elkészítéséhez jól használhatók a számítógépes programok.

FELADAT

1. Egy 6 évfolyamos gimnázium 600 tanulójának évfolyamonkénti megoszlását kördiagramon ábrázolták. Az egyes évfolyamokhoz tartozó körcikkek középponti szögét a táblázat mutatja:

Évfolyam	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Középponti szög	72°	65°	56°	50°	69°	48°

a) Rajzold meg vázlatosan az évfolyamonkénti megoszlást bemutató kördiagramot!



b) Melyik évfolyamon hány diák tanul?

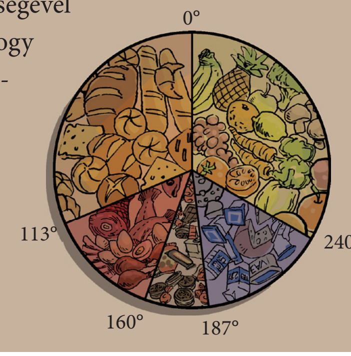
c) Mely számok alkotják az adathalmazt, és mennyi a különböző adatok relatív gyakorisága? Add meg a móduszt, a mediánt és az átlagot! Melyik statisztikai jellemzőnek nincs „gyakorlati haszna” jelen esetben?

d) Készíts az adatok alapján oszlopdiagramot!

e) Az iskola tanulói közül véletlenszerűen kiválasztunk kettőt. Mekkora a valószínűsége, hogy közülük egyik sem végzős?

2. Oldd meg az 1. b) feladatot abban az esetben, amikor a tanulók összlétszáma 480!

3. A mellékelt kördiagram az egészséges táplálkozáshoz szükséges élelmiszerfajták eloszlását mutatja. A diagram segítségével számítsd ki, hogy melyik élelmiszerfajta milyen arányban szerepeljen az étlapon!



HÁZI FELADAT

1. 2001-es és 2014-es adatok szerint az akkor regisztrált munkavállalók legmagasabb iskolai végzettsége a következőképpen alakult:

Legmagasabb iskolai végzettség	Foglalkoztatottak száma (ezer fő)	
	2001	2014
Általános iskola	753	446
Középfokú szakmai végzettség	1063	1161
Érettségi	1199	1389
Főiskola, egyetem	675	1094
Összes munkavállaló	3690	4090

a) Számítsd ki az egyes végzettségekhez tartozó relatív gyakoriságot, és rendezd az adatokat kördiagramba!

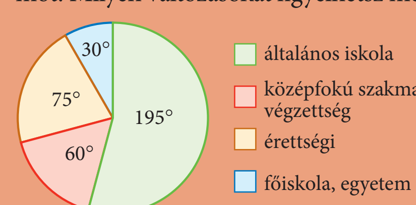
b) Döntsd el az alábbi állításokról, hogy igazak-e!

A: A foglalkoztatottak száma 2001 és 2014 között nőtt.

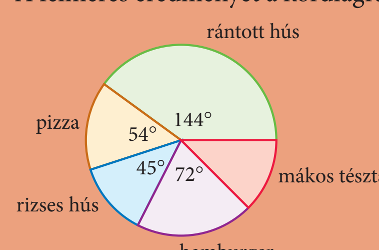
B: A legmagasabb végzettségük szerint középfokú szakmai végzettséggel rendelkező foglalkoztatottak száma 2001 és 2014 között nőtt.

C: A legmagasabb végzettségük szerint középfokú szakmai végzettséggel rendelkező foglalkoztatottak százalékos aránya a foglalkoztatottak teljes körében 2001 és 2014 között nőtt.

c) A foglalkoztatottak legmagasabb iskolai végzettségének 1980-ban mért megoszlását a mellékelt kördiagramon láthatod. Hasonlítsd össze a 2014-es évről szóló és az 1980-as évről készített kördiagramot! Milyen változásokat figyelhetsz meg?



2. Egy felmérés során 40 diákot kérdeztek meg arról, hogy a felsoroltak közül melyik a kedvenc ételük. A felmérés eredményét a kördiagram szemlélteti.



a) Hányféle adat szerepel a felmérés eredményében, és melyiknek mennyi a relatív gyakorisága?

b) A terjedelem, a módusz, a medián és az átlag közül melyiknek van értelme az adott adathalmaz esetében?

37 Sávdiagram, vonaldiagram

KIDOLGOZOTT FELADAT

Miből állt össze a cigaretta ára 2004. január 1-jén?

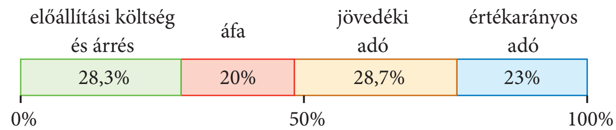
Adónem, egyéb költség	%
Előállítási költség + kereskedelmi árrés	28,3
Áfa	20
Jövedéki adó	28,7
Értékarányos adó (ad valorem adó)	23
Összesen	100,0

Ábrázoljuk *sávdiagramon* a cigaretta árának összetevőit!

Megoldás

A sávdiagram azokban az esetekben ad szemléletes képet, amelyekben az adathalmaz adatainak relatív gyakoriságát vagy valamely összetett rendszer alkotórészeinek részesedését (megoszlását) akarjuk szemléltetni. Most az utóbbi esetről van szó.

A sávdiagram úgy keletkezik, hogy egy téglalapot az egyik oldalával párhuzamos egyenesekkel kisebb téglalapokra bontunk. Az egyes téglalapok területe arányos a szemléltetett relatív gyakoriságokkal és a nekik megfelelő százaléklábakkal. A feladatunkban a cigaretta árának 4 összetevője van, ezért az ábrán egy 4 részre osztott téglalapot láthatunk. Maga a nagy téglalap szemlélteti a teljes árat, vagyis a 100%-ot.



Megjegyzések

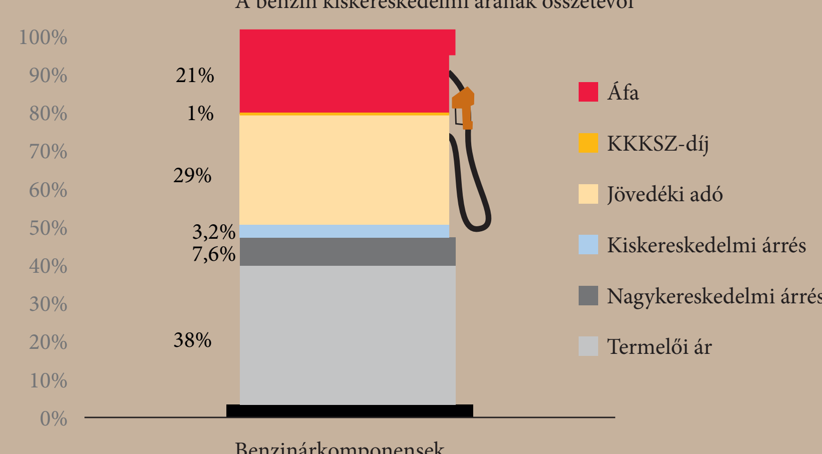
– A sávdiagram és a kördiagram készítése azonos elv alapján történik, hiszen a kördiagramnál a körcikkek területe arányos az ábrázolt mennyiséggel.

– A fenti táblázat alapján sokan azt hiszik, sőt hirdetik, hogy az államnak igen nagy haszna van a dohánytermékek forgalmazásából. Ez azonban téves elképzelés, amint az több, a dohányipartól független kutató társadalmi költség vizsgálatából kiderült. Ugyanis a dohányzás közvetlen és közvetett *költségei* **messze meghaladják** az állami költségvetésnek azokat a bevételeit, amelyek a dohányszektortól vagy más, a szektorral kapcsolatban álló vállalkozásoktól származnak. Különösen nagy összeget kell költenie az egészségügynek és a magánszemélyeknek is a dohányzás miatt fellépő súlyos betegségek kezelésére.

FELADAT

1. A jobb oldalon látható ábra valójában egy sávdiagram, a benzin árának összetevőit szemlélteti (2013-as adatok). Számítsuk ki, hogy milyen célra mennyit fizettünk, amikor 1 liter benzinért 2013 januárjában 420 forintot adtunk. (Kőolaj és Kőolajtermék Készletező Szövetség – KKKSZ)

A benzin kiskereskedelmi árának összetevői



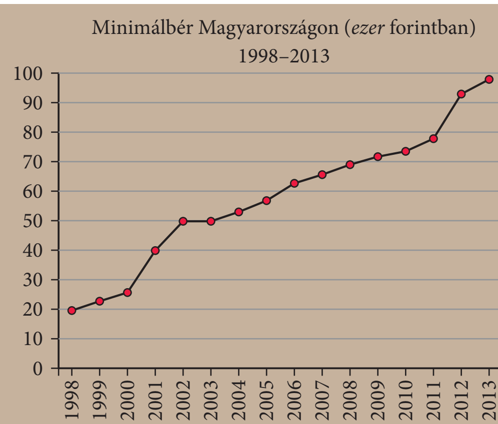
2. A mellékelt vonaldiagram a havi minimálbér alakulását szemlélteti Magyarországon 1998 és 2013 között.

a) Mely időszakokban nőtt a leglátványosabban a minimálbér összege?

b) Van-e értelme a következő megállapításnak? „A havi minimálbér összege Magyarországon körülbelül 2000 áprilisában lépte át a 30 000 forintos határt."

c) Foglald táblázatba, melyik évben hány forint volt a minimálbér! (A diagram alapján természetesen csak közelítőleg pontos értékeket kaphatsz.)

d) Hány százalékkal nőtt a minimálbér a vizsgált 15 év alatt?



3. A következő táblázat azt mutatja, hány százalékos volt hazánkban az infláció 1998-tól 2012-ig.

Év	Infláció %-ban
1998	14,3
1999	10,0
2000	9,8
2001	9,2
2002	5,3

Év	Infláció %-ban
2003	4,7
2004	6,8
2005	3,6
2006	3,9
2007	8,0

Év	Infláció %-ban
2008	6,1
2009	4,2
2010	4,9
2011	3,9
2012	5,7

Készíts vonaldiagramot a táblázat adatai alapján!

HÁZI FELADAT

1. Vesd egybe a 2. és a 3. feladat adatait!

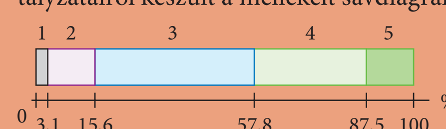
a) Számítsd ki, mennyi lett volna az egyes években a minimálbér, ha az minden évben az infláció mértékével emelkedett volna! Eredményeidet foglald táblázatba!

b) Hány százalékkal nőtt volna a minimálbér ebben az esetben a vizsgált 14 év alatt?

c) Készíts vonaldiagramot az a) feladat eredményeivel! Hasonlítsd össze a minimálbér valódi értékeit mutató diagrammal (2. feladat)! Mit mutat ez az összehasonlítás?

d) Hány százalékkal nőtt a minimálbér vásárlóértéke a vizsgált 14 év alatt?

2. Egy iskola 320 tanulójának év végi matematikaosztályzatairól készült a mellékelt sávdiagram.



a) Készíts relatív gyakorisági, illetve gyakorisági táblázatot az osztályzatokról!

b) Mennyi a 320 adat terjedelme, módusza, mediánja és átlaga?

c) A b)-ben megadott mutatók közül melyek olvashatók le egyszerűen a sávdiagramról?

d) Készíts kördiagramot az osztályzatokról!

RÁADÁS

2013-ban változtak a cigarettára vonatkozó árrések és adók. Az addig szokásos 4-5%-os árrés helyett a kiskereskedelmi árrés egységesen 10%-os lett. Egy 19 szálat tartalmazó doboz esetén a tételes jövedéki adó 238 Ft, ez nem függ a cigaretta árától. A jövedéki adó másik része, az értékarányos adó (értékadó) azonban igen, ez a kiskereskedelmi ár 31%-a. A cigarettát a szokásos 27%-os áfa is terheli. A nagykereskedés bevétele dobozonként körülbelül 100 Ft.

a) Mindezeket figyelembe véve mennyibe kell kerülnie egy doboz cigarettának?

b) Készíts sávdiagramot a cigaretta árának összetevőiről a 2013-as szabályozást követően!

c) Vajon vásárolhatunk-e a jelenlegi szabályozás mellett 740 Ft-ért cigarettát?

38 Eltérés az átlagtól

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Két izzógyár versenyez a vevőkért. Mindkét gyár terméke olyan izzó, amely a gyártó szerint átlagosan 1000 órán keresztül világít. Ezt az állítását mindkét gyár ezer-ezer izzó élettartamának megvizsgálásával támasztja alá. A minőségellenőrzés során a megvizsgált izzók élettartamát 10 órára kerekítették és táblázatba foglalták.

Élettartam (óra)	800	820	850	880	910	980	990	1000	1010	1030	1050	1070	1100	1400	1570
1. gyár izzóinak száma	5	10	8	12	24	75	130	190	333	120	70	14	8	0	1
2. gyár izzóinak száma	10	29	46	48	59	98	107	153	192	112	45	41	26	19	15

a) Elemezzük mindkét adathalmazt a terjedelem, módusz, medián és átlag segítségével!

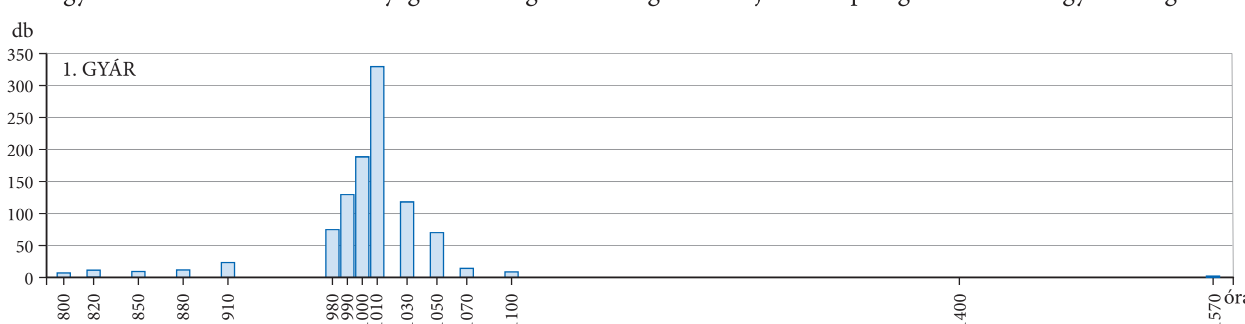
b) Hogyan vélekedünk a gyárak termékeiről, melyik gyár ígéretét tartjuk megbízhatóbbnak?

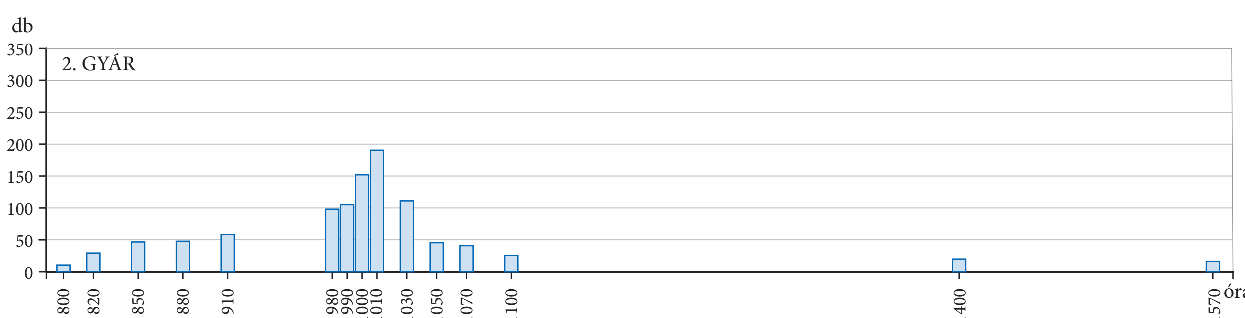
Megoldás

a) Táblázatba foglalva áttekinthetőbbek az egyes jellemzők:

	Terjedelem	Módusz	Medián	Átlag
1. gyár	770	1010	1010	1002
2. gyár	770	1010	1000	1001

b) Ha nem látnánk az 1000-1000 mérés eredményét, akkor pusztán a statisztikai jellemzők alapján azt gondolhatnánk, hogy a két gyár termékei között nincs lényeges minőségi különbség. Ábrázoljuk oszlopdiagramon a mért gyakoriságokat!





Azonnal szembeötlő különbség mutatkozik a két gyár termékei között. Az első diagram azt mutatja, hogy az 1. gyárban az izzók több mint 80%-ának valóban 1000 órához közeli volt az élettartama (980 és 1050 óra között). Vizuálisan ez úgy jelenik meg a diagramon, hogy a „jelentős magasságú” oszlopok egy viszonylag szűk (mintegy 70 óra „szélességű”) tartományban vannak.

A 2. gyár esetében a diagram „szétterül”. Ha itt is ki akarunk jelölni a vízszintes tengelyen egy olyan szakaszt, amelyikben az adatoknak mondjuk a 80%-a megtalálható, akkor ehhez már egy legalább 160 óra szélességű tartományra van szükségünk (például 910 és 1070 óra között).
A gyakorlat számára ez igen jelentős információ az 1000 adatból álló adathalmazra nézve. Az 1. gyár ígéretét megbízhatóbbnak gondoljuk, a legtöbb esetben valóban 1000 órához közel lesz a tőlük vásárolt izzók élettartama.
A 2. gyár esetében azt mondjuk, hogy az 1000 adatnak nagy a **szóródása** az átlag (az 1000 óra) körül. Emiatt a 2. gyár termékei kevésbé megbízhatók, elég nagy valószínűséggel lehetnek nagy eltérések is a reklámban meghirdetett 1000 órás élettartamhoz képest. A mindennapok során erre egyszerűen annyit mondunk, hogy az 1000 óra átlag *nem megbízható információ* a 2. gyár esetében.

ELMÉLET

A sok, olykor akár több tízezer adatot tartalmazó adatsokaságot nem jellemzi megfelelően az eddig megismert néhány statisztikai mutató (terjedelem, módusz, medián és átlag). Ha az adatokat magukat nem ismerjük, akkor az adatok „szétszórtságára” vonatkozóan is tájékoztatást kell adnunk. Az eddigi statisztikai jellemzőkhöz ezért hozzávesszük az adathalmaz szóródására jellemző „mutatókat” is.

KIDOLGOZOTT FELADAT

2. Egy új kávékeverék piaci megjelenését megelőzően kóstolóval egybekötött termékbemutatót tartottak. Két csoport véleményét kérték ki úgy, hogy a terméket az 1-től 10-ig terjedő skálán mindenkinek egy-egy egész számmal kellett értékelnie. Mindkét csoport létszáma 20 fő volt. A csoportok értékelése az alábbi táblázatokban látható.

Pontszám	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Gyakoriság az 1. csoportban	0	0	1	0	6	8	2	2	1	0
Gyakoriság a 2. csoportban	0	8	0	2	0	1	0	0	0	9

a) Mekkora az adott pontok átlaga az egyes csoportokban?
b) Jellemezzük az adott pontok szóródását az egyes csoportokban a következőképpen:
– először számoljuk ki az adatok átlagát,
– ezután minden egyes adat esetén jegyezzük fel azt, hogy az adat mekkora távolságra van az átlagtól,
– végül számítsuk ki az adatok átlagtól való távolságának az átlagát is!
Melyik csoportban nagyobb az így megadott szóródási mutató?

Megoldás

a) Az 1. csoport átlaga: $\frac{3\cdot 1+5\cdot 6+6\cdot 8+7\cdot 2+8\cdot 2+9\cdot 1}{20}=\frac{120}{20}=6$,

a 2. csoporté: $\frac{2\cdot 8+4\cdot 2+6\cdot 1+10\cdot 9}{20}=\frac{120}{20}=6$.
A két csoportban az átlag megegyezik, mindkettő 6.

b) Foglaljuk táblázatba az átlagtól való távolságokat!

Távolság az átlagtól	0	1	2	3	4
Gyakorisága az 1. csoportban	8	8	2	2	0
Gyakorisága a 2. csoportban	1	0	2	0	17

A távolságok átlaga az 1. csoportban: $\frac{0\cdot 8+1\cdot 8+2\cdot 2+3\cdot 2}{20}=\frac{18}{20}=0{,}9$,
a 2. csoportban: $\frac{0\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 0+4\cdot 17}{20}=\frac{72}{20}=3{,}6$.
Tehát a második csoportban (lényegesen) nagyobb az átlagtól való eltérések átlaga.

FELADAT

1. Számítsd ki a következő táblázattal megadott

a) adathalmazok átlagát;

b) az adatok átlagtól való távolságát;

c) az adatok átlagtól való távolságának átlagát!

Adatok	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Gyakorisága az 1. adathalmazban	0	4	5	1	2	7	1	2	2	1
Gyakorisága a 2. adathalmazban	2	0	0	0	16	3	2	2	0	0

HÁZI FELADAT

1. Egy vasárukat gyártó üzem a csavarokat olyan tasakokban hozza forgalomba, amelyen ez áll: „Tartalma: 1000±2 darab". Egy hatósági ellenőrzés során véletlenszerűen kiválasztottak 100 tasakot, és a súlyuk alapján ellenőrizték, hogy hány csavart tartalmaznak. Az eredményt a táblázatban láthatjuk.

Darabszám	Gyakoriság
995-nél kevesebb	0
995	9
996	11
997	12
998	12
999	13
1000	14
1001	10
1002	8
1003	8
1004	3
1004-nél több	0

a) Hányszor tér el a csavarok száma az 1000-től 1-gyel, 2-vel, 3-mal, 4-gyel, illetve 5-tel? Készíts táblázatot!

b) A kísérleti méréseknek hány százaléka felel meg a tasakra írt ígéretnek?

c) A tasakok hány százalékában tér el a csavarok száma legalább 4-gyel az 1000-től?

d) Mennyi az 1000-től való átlagos eltérés? Ennek alapján fogalmazd meg a saját véleményedet a tasak feliratában található 1000±2 tájékoztatás megbízhatóságáról!

e) Mennyi a 100 tasakban lévő csavarok számának az átlaga?

2. A 2. Kidolgozott feladatban 20-20 személy pontozta a kávékat.

a) Írd fel a két csoportban adott pontszámokat növekvő sorrendben! Így két, 20-20 számból álló adatsokaságot kapsz.

b) Készíts mindkét adatsokasághoz diagramot!

c) Melyik esetben melyik szám a medián?

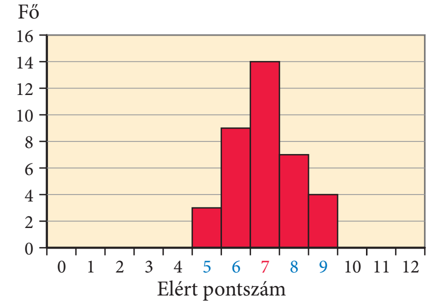
d) Van-e mindkét adatsokaságnak módusza? Ha van, melyik szám az?

RÁADÁS

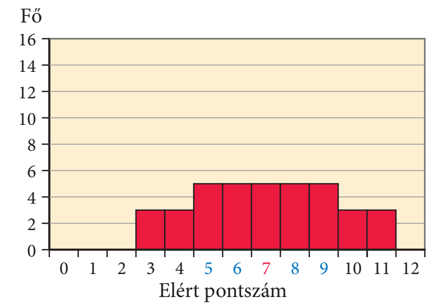
1. Néhány egyszerű példát láthatsz arra, hogy mennyire kevés információt hordoz egy adathalmazról az adathalmaz átlaga. Ez egyben azt is indokolja, hogy ha egy adathalmaz egyes adatait nem ismerjük (például több ezer adatról van szó), akkor feltétlenül szükségünk van olyan jellemzőre, amelyik az adatok szóródására nézve ad tájékoztatást.

Egy iskola több osztályában is megíratták ugyanazt az évfolyamdolgozatot. A dolgozat 12 kérdésből állt, a helyes válasz minden kérdésre egy pontot ért. Az alábbi grafikonok néhány osztály eredményeit szemléltetik:

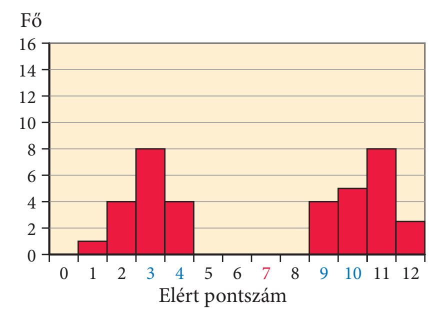
Ebben az osztályban az elért pontszámok átlaga 7 (egyben ugyanez a pontszámok módusza és mediánja is), míg az ettől való átlagos eltérés igen kicsi, mindössze körülbelül 0,81.
Azaz elmondhatjuk, hogy – ahogyan az a grafikonról is látszik – a pontszámok döntő többsége a 7±0,81 (azaz kb. a 6–8) tartományba esik. Ebben az osztályban a tanulók felkészültségében nem mutatkozott nagy eltérés.



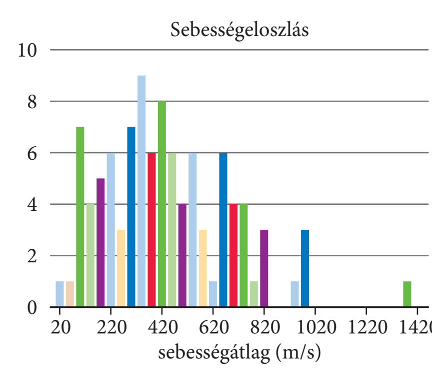
Egy másik osztályban az eredmények már közel sem ennyire egységesek. Bár az átlag itt is 7, az ettől való átlagos eltérés azonban körülbelül 1,95. Ez azt jelenti, hogy az adatok többsége most már – a grafikonnal megint csak egyezően – a 7±1,95 (nagyjából 5–9) tartományban található. Ebben az osztályban a tanulók által elért pontszámok jobban „szórnak", feltételezhetően azért, mert a tanulók felkészültségében is hasonló eltérések vannak.



A harmadik osztályban megint másféle eredmények születtek: a tanulók eredményei két jól elkülönülő csoportra oszlanak. Bár az átlag ebben az osztályban is 7, valójában egyetlen tanuló sem ért el ennyi pontot. Az átlagtól való átlagos eltérés itt a legnagyobb: 3,78, ami azt jelenti, hogy az adatok többsége most a 7±3,78 (3–11) tartományba esik (hiszen mindkét csoportban sok, az átlagtól jelentősen eltérő tanuló van).



2. Egy számítógépes szimulációban száz pontszerű részecske mozgását vizsgálták (kinetikus gázelmélet). A részecskék sebességeinek eloszlását egy pillanatban az alábbi grafikon ábrázolja. A részecskék sebességei folytonos eloszlásúak, tehát tetszőleges értéket felvehetnek, ezért a részecskéket a sebességeik szerint osztályokba sorolták. Minden osztály 40 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ szélességű. Eszerint az első osztályba sorolt részecskék sebessége 0 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ és 40 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ közötti $\left(0\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \leq v < 40\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$, a második osztályba sorolt részecskék sebessége 40 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ és 80 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ közötti $\left(40\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \leq v < 80\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$ stb.



A modell vizsgálatához közelítsünk úgy, hogy minden részecskének a sebességét az adott osztály osztályközepének tekintjük. Ez az osztály két szélértékének átlagát jelenti. Tehát a 0 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ és 40 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ közötti sebességgel haladó részecskéket egységesen 20 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességűnek tekintjük stb.

a) Olvasd le a grafikonról és foglald táblázatba, hogy az egyes osztályokba hány részecske tartozik!

b) Számítsd ki a részecskék sebességének átlagát az osztályközepekkel való közelítés segítségével!

c) Mekkora az átlagtól való eltérések átlaga? Vizsgáld meg, hogy ez alapján a részecskék nagy része mely sebességtartományban található!

39 Az átlagtól való eltérés mérése

BEVEZETŐ

Hogyan lehetne jellemezni egy számsokaság esetén az adatok „szétszórtságát”? Jó lenne ehhez néhány praktikus, könnyen számolható mutató.

Az adatok „szétszórtságát” a következőkben két módon is vizsgáljuk, a számításunk eredményét pedig mindkét esetben egyetlen nemnegatív számmal fejezzük ki. Ez a nemnegatív szám arról tájékoztat minket, hogy az adathalmaz átlaga körül (az átlagtól „jobbra és balra”) mekkora távolságban található meg az adatok jelentős része.

A múlt órán vizsgált izzógyárak esetében az 1. gyárnál az átlag körül „40 órás távolságban” – a 960–1040 óra intervallumban – található meg az adatok jelentős része, míg a második gyárnál ez a 920–1080 intervallumra igaz, tehát az átlag körüli „80 órás távolságon” belül található az adatok jelentős része.

Az említett két eljárás a számsokaság *átlagos abszolút eltérésének* és *szórásának* a kiszámítása.

ELMÉLET

Az átlagos abszolút eltérés

Definíció: Ha egy véges adathalmaz adatait $x_1, x_2, \dots x_n$ jelöli, és ezek átlaga $\overline{x}$, akkor az $\dfrac{|x_1-\overline{x}|+|x_2-\overline{x}|+\dots+|x_n-\overline{x}|}{n}$ számot az adathalmaz átlagos abszolút eltérésének nevezzük.

Megjegyzés

Az átlagos abszolút eltérés előnye az, hogy az abszolút érték használata miatt nem egyenlítődnek ki az átlagtól való pozitív és negatív eltérések.

A szórás

Definíció: Ha egy véges adathalmaz adatait $x_1, x_2, \dots x_n$ jelöli, és ezek átlaga $\overline{x}$, akkor a $\dfrac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\dots+(x_n-\overline{x})^2}{n}$ számot az adathalmaz szórásnégyzetének, ennek a négyzetgyökét pedig az adathalmaz szórásának nevezzük. A szórást általában a görög szigma (σ) betűvel jelöljük.

Ezzel a jelöléssel a szórás: $\sigma = \sqrt{\dfrac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\dots+(x_n-\overline{x})^2}{n}}$.

Adatsokaságok kezelésére, jellemzésére többféle számítógépes program is jól használható.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Mennyi az alábbi adathalmazok átlagos abszolút eltérése, és mennyi a szórása?

a) 33, 45, 46, 48; **b)** 33, 33, 45, 45, 45, 45, 45, 45, 46, 48.

Megoldás

a) A 33, 45, 46, 48 számok összege 172, a négy szám átlaga tehát 172 : 4 = 43. Az átlagtól való eltérések abszolút értéke:

$|43-33| = 10$; $|43-45| = |-2| = 2$; $|43-46| = |-3| = 3$; $|43-48| = |-5| = 5$.

Ennek megfelelően az átlagos abszolút eltérés: $\dfrac{10+2+3+5}{4} = \dfrac{20}{4} = 5$,

a szórás pedig $\sqrt{\dfrac{10^2+2^2+3^2+5^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{138}{4}} = \sqrt{34{,}5} \approx 5{,}9$.

b) Az adott 10 szám átlaga: $\frac{2 \cdot 33 + 6 \cdot 45 + 46 + 48}{10} = 43$.
Töltsük ki a táblázatot!

Adat (x_i)	33	45	46	48
gyakorisága	2	6	1	1
$\lvert x_i - 43\rvert$	10	2	3	5
$(x_i - 43)^2$	100	4	9	25

az átlagos abszolút eltérés:

$$\frac{2 \cdot 10 + 6 \cdot 2 + 3 + 5}{10} = \frac{40}{10} = 4,$$

a szórás pedig

$$\sqrt{\frac{2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 2^2 + 3^2 + 5^2}{10}} = \sqrt{\frac{258}{10}} = \sqrt{25{,}8} \approx 5{,}1.$$

FELADAT

1. Egy cinkelt dobókockát egymás után 120-szor feldobtunk. A dobott pontok gyakoriságát táblázattal adjuk meg:

Pontszám	1	2	3	4	5	6
Gyakoriság	21	18	4	45	22	10

a) Ábrázold az adathalmaz gyakoriságeloszlását oszlopdiagramon!
b) Mennyi a 120 dobás átlaga?
c) Melyik szám a medián?
d) Van-e ennek a számsokaságnak módusza? Ha van, melyik szám az?
e) Mennyi itt a terjedelem?
f) Számítsd ki az átlagos abszolút eltérést!
g) Mennyi a 120 adatból álló adathalmaz szórása?

2. Foglalkozz a –97; 0; 5; 100 számokból álló adathalmazzal!
a) Számítsd ki az átlagot és a terjedelmet!
b) Számítsd ki az átlagos abszolút eltérést!
c) Számítsd ki a szórást!

HÁZI FELADAT

1. Foglalkozz a 2, 3, 4, 5, 2, 4, 4, 6, 8, 2, 6, 9, 2, 3, 7 adatsokasággal!
a) Rendezd az adatokat növekedő sorrendbe!
b) Ábrázold az adatok relatív gyakoriságát diagramon!
c) Mennyi az adathalmaz terjedelme?
d) Mennyi az adott számok átlaga?
e) Mekkora az egyes adatok átlagtól való eltérésének abszolút értéke?
f) Számítsd ki az átlagos abszolút eltérést!

2. Foglalkozz tovább a 38. lecke 1. Kidolgozott feladatában szereplő problémával! A táblázat segítségével válaszolj a kérdésekre!

Élettartam (x_i)	800	820	850	880	910	980	990	1000	1010	1030	1050	1070	1100	1400	1570
db (1. gyár)	5	10	8	12	24	75	130	190	333	120	70	14	8	0	1
$\lvert x_i - 1002\rvert$															
db (2. gyár)	10	29	46	48	59	98	107	153	192	112	45	41	26	19	15
$\lvert x_i - 1001\rvert$															

a) Mennyi az 1. gyár izzói esetében az átlagos abszolút eltérés?
b) Mennyi a 2. gyár izzói esetében az átlagos abszolút eltérés?
c) Mennyi az 1. gyár izzói esetében a szórás?
d) Mennyi a 2. gyár izzói esetében a szórás?

40 A) Ismét segít a számológép

A 40. leckét két különböző feldolgozásra ajánljuk. Azok a csoportok, ahol erre lehetőség van, a 40 A) leckét feldolgozva megtanulhatják, hogyan használhatják fel a számológépüket statisztikai problémák gyors és hatékony megoldásához.
A két lecke összevonható egy differenciált tanóra megtartásához.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Egy városi közlekedési vállalat 20 járatot üzemeltet. Szeretnék a hálózatot a megváltozott közlekedési igények szerint átszervezni. Ennek első lépéseként összeírták, hogy az egyes járatok jelenleg hány megálló hosszúságú szakaszokon közlekednek. Az *adatokat* (a megállók számát) és ezek *gyakoriságát* (a járatok számát) a mellékelt táblázat foglalja össze.

a) Írjuk fel az itt szereplő adathalmazt!
b) Keressük meg az adatok móduszát!
c) Számítsuk ki az adathalmaz terjedelmét!
d) Melyik szám a medián?
e) Számítsuk ki az adatok átlagát!
f) Mekkora az adatok szórása?

Megállók száma	Járatok száma
4	1
8	3
11	5
13	4
14	3
15	2
16	1
17	1

Megoldás

a) Az adathalmazt itt a megállószámok mutatják; mindegyik annyiszor fordul elő, ahány járatra vonatkozik:
4, 8, 8, 8, 11, 11, 11, 11, 11, 13, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 15, 15, 16, 17.

b) A legnagyobb gyakoriságú adat a 11, ez tehát az adatok módusza.

c) A terjedelem: $17 - 4 = 13$.

d) A sorba rendezett 20 adat esetén a medián a 10. és 11. adat számtani közepe.
A sorban a tizedik és a tizenegyedik adat is a 13, így a számtani középük, tehát a medián is a 13.

e) Az átlag kiszámítását segíti, ha használjuk a gyakoriságokat is!

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + 5 \cdot 11 + 4 \cdot 13 + 3 \cdot 14 + 2 \cdot 15 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 17}{20} = \frac{240}{20} = 12.$$

Tehát a buszvonalak „hosszának” átlaga 12 megálló.

f) Foglaljuk táblázatba az adatokat!

Adat (x_i)	4	8	11	13	14	15	16	17
$(x_i - 12)$	–8	–4	–1	1	2	3	4	5
$(x_i - 12)^2$	64	16	1	1	4	9	16	25
Gyakorisága	1	3	5	4	3	2	1	1

A szórás: $\sigma = \sqrt{\dfrac{1 \cdot 64 + 3 \cdot 16 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 9 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 25}{20}} \approx 3{,}10.$

Megjegyzés:
Ha a táblázatot új sorokkal kiegészítjük, sok statisztikai mutató könnyen kiszámolható belőle. Ezek kerülhetnek az egyes sorok első cellájába:

adat (x_i); gyakoriság (f_i); $f_i \cdot x_i$; $|x_i - \bar{x}|$; $f_i \cdot |x_i - \bar{x}|$; $f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$; $\dfrac{f_i}{n}$; $\dfrac{f_i}{n}$ (%).

2. Az 1. KIDOLGOZOTT FELADAT e) és f) részét **számológépünk statisztika-üzemmódjának használatával** sokkal gyorsabban is megoldhatjuk.

Megoldás

– Állítsuk a számológépünket *statisztikai üzemmódba*! Ez a beállítás számológépenként különböző módon végezhető el. Az egysoros kijelzőjű számológépnél a legtöbb esetben van egy STAT feliratú nyomógomb (legtöbbször a nyomógomb második funkciójával aktiválható). Ha ezt az üzemmódot aktiváltuk, akkor a kijelzőn megjelenik a STAT felirat. (A drágább, általában többsoros kijelzőjű gépek esetében a statisztikai üzemmód a MODE vagy a SETUP feliratú billentyű megnyomása után választható ki, ami esetleg az SD-mód kiválasztását jelenti.)
– Először ellenőrizzük, nincsenek-e korábban bevitt adatok a gépben! Ha vannak, ezeket törölnünk kell. A törléshez nem elegendő a C, esetleg a CA gomb megnyomása, hanem általában a 2*nd* (más gépeknél: SHIFT) billentyű és egy másik gomb megnyomása (Scl, CS, …) szükséges.
– Keressük meg azt a nyomógombot, amelyhez a DATA, DAT vagy DT felirat tartozik! Ennek a megnyomásával a kijelzőn álló számot egy adatként lehet bevinni a gépbe. Ha egymás után többször megnyomjuk ezt a gombot, akkor ugyanazt a számot annyiszor viszi be a gép adatként, ahányszor megnyomtuk a gombot.

– A példánknál maradva a STAT üzemmódban először töröljünk minden adatot a kijelzőről és a memóriából is! Ekkor a kijelzőn a 0-nak kell állnia (esetleg az $n = 0$ felirat is látható).
– Ezután írjunk be egy 4-est a gépbe, majd nyomjuk meg a DAT nyomógombot egyszer! (Géptől függően vagy semmi lényegeset nem észlelünk, vagy többsoros kijelző esetén megjelenhet a kijelzőn az $n = 1$ felirat, ami azt jelzi, hogy 1 darab adat van a gépben.)
– Töröljük a kijelzőt és nyomjuk meg a 8-as számhoz tartozó gombot, majd a DAT gombot 3-szor egymás után! Ha véletlenül 4-szer nyomtuk meg a gombot, akkor a 2nd billentyű és utána a DAT billentyű megnyomásával az utoljára bevitt adatot törölhetjük. Ha pont 3-szor vittük be a 8-at, akkor a kijelzőn (esetleg) az $n = 4$ kijelzés is látható.
– Töröljük a kijelzőt, írjuk be a gépbe a 11-et, majd nyomjuk meg a DAT billentyűt 5-ször egymás után ($n = 9$)!
– Miután hasonló módon a többi adatot is bevittük a gépbe, töröljük a kijelzőt. (A kijelző törlése nem törli a bevitt adatokat.)
– Keressük meg a gépen az $\overline{x}$ feliratú billentyűt és nyomjuk meg (ehhez először valószínűleg a 2*nd* billentyűt kell lenyomnunk, esetleg más, a gép használati útmutatójában megadott billentyűt)! Ekkor (géptől függően) megjelenik az adatok átlaga (feladatunkban a 12), de előfordulhat, hogy ehhez még az „=” (vagy Enter) billentyűt is meg kell nyomnunk.
– Keressük meg a σ (esetleg σ_x) feliratú billentyűt, és (a 2*nd* billentyű vagy a gép leírásában megadott más billentyű megnyomása után) nyomjuk meg ezt is! A kijelzőn megjelenik a számológépbe bevitt adatok szórása (feladatunkban a 3,098386677).
– Ha újabb feladatot kell megoldanunk, akkor ne feledjük el törölni a bevitt adatokat!

Megjegyzés: sok **számológép használati útmutatója** megtalálható az **interneten** is.

FELADAT

Zsebszámológép segítségével vizsgáljunk meg néhány korábban bemutatott adatsokaságot!

1. Egy kisváros tűzoltóparancsnoka összesítést készített, hogy az előző hónapban naponta hány riasztáshoz vonultak ki.

A napi riasztások száma	0	1	2	4	6	14
Hány napon fordult elő?	1	11	6	8	4	1

Számítsd ki zsebszámológéped statisztika-üzemmódjának használatával, hogy mennyi a napi riasztások

a) átlaga; **b)** szórása!

2. Egy új kávékeverék piaci megjelenését megelőzően kóstolóval egybekötött termékbemutatót tartottak. Két csoport véleményét kérték ki úgy, hogy a terméket egy 1-től 10-ig terjedő skálán mindenkinek egy-egy egész számmal kellett értékelnie. Mindkét csoport létszáma 20 fő volt. A csoportok értékelése az alábbi táblázatokban látható.

Pontszám	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Gyakoriság az 1. csoportban	0	0	1	0	6	8	2	2	1	0
Gyakoriság a 2. csoportban	0	8	0	2	0	1	0	0	0	9

Számítsd ki zsebszámológéped használatával, hogy mennyi a két csoportban az adott pontszámok

a) átlaga; **b)** szórása!

3. Egy cinkelt dobókockát egymás után 120-szor feldobtunk, a dobott pontok gyakoriságát táblázattal adtuk meg:

Pontszám	1	2	3	4	5	6
Gyakoriság	21	18	4	45	22	10

Számítsd ki zsebszámológéped statisztika-üzemmódjának használatával, mennyi a dobott pontok

a) átlaga; **b)** szórása!

4. Számítsd ki zsebszámológéped statisztika-üzemmódjának használatával a 38. lecke 1. házi feladatában megadott adathalmaz szórását!

HÁZI FELADAT

1. Számítsd ki a 38. leckében szereplő, izzók élettartamára vonatkozó két adathalmaz átlagát és szórását számológéped statisztika-üzemmódjának segítségével!

2. Számítsd ki zsebszámológéped statisztika-üzemmódjának használatával az adathalmazok szórását!

a) 33, 45, 46, 48; **b)** 33, 33, 45, 45, 45, 45, 45, 45, 46, 48.

3. Számítsd ki a zsebszámológéped statisztika-üzemmódjának használatával a következő adathalmazoknak

a) az átlagát; **b)** a szórását!

Adat	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Gyakorisága az 1. adathalmazban	0	4	5	1	2	7	1	2	2	1
Gyakorisága a 2. adathalmazban	2	0	0	0	16	3	2	2	0	0

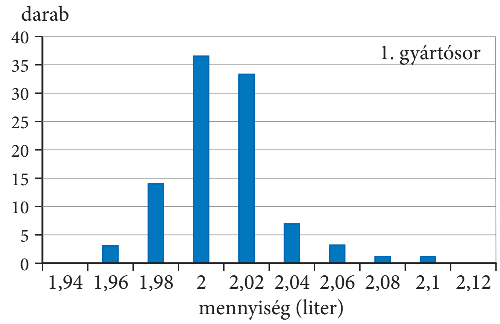
RÁADÁS

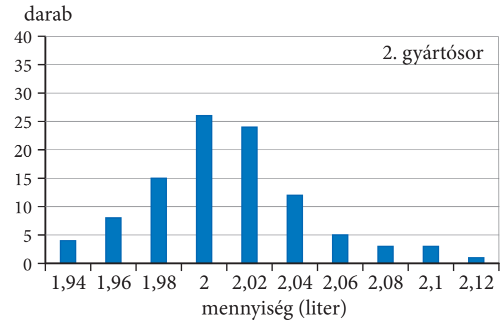
1. Mit jellemez egy adathalmaz szórása?

Megadható-e olyan „sáv” az átlag körül, amelybe az adatok nagy része, például háromnegyede beleesik? Érdekes módon igen, a szórás ismeretében megadható. Bebizonyítható például, hogy legalább az adatok háromnegyede *legfeljebb „kétszórásnyi távolságra” van az átlagtól* – vagyis az átlagtól való eltérése nem nagyobb, mint a szórás kétszerese.

2. Van olyan zsebszámológép, amelyen **van lehetőség az adatokkal együtt a gyakoriságuk bevitelére is**. Oldjuk meg ilyen zsebszámológéppel a következő feladatot!

Egy palackozóüzemben az üdítőital töltését két gyártósoron automaták végzik. Mindkét gyártósoron 2 liter az előírás szerinti töltőmennyiség. A gépek beállítását úgy ellenőrizték, hogy mindkét gyártósoron 100-100 megtöltött palackot kiválasztottak, és megmérték a betöltött üdítőital-mennyiséget. A mérések eredményét az alábbi két diagramon láthatjuk.





a) Foglaljuk gyakorisági táblázatba a mérések eredményét!

b) Adjuk meg a 100-100 palackba töltött üdítőital-mennyiségek terjedelmét, móduszát, mediánját, átlagát és szórását!

c) Az egyik, illetve a másik gyártósor esetében is számítsuk ki, hogy a mérési adatoknak hány százaléka van közelebb az átlaghoz, mint a szórás, illetve a szórás kétszerese?

Megoldás

a)

Mennyiség (liter)	1,94	1,96	1,98	2	2,02	2,04	2,06	2,08	2,1	2,12
Gyakorisága az 1. gyártósoron	0	3	14	37	34	7	3	1	1	0
Gyakorisága a 2. gyártósoron	4	8	15	26	24	12	5	3	3	1

b) Az átlag és a szórás kiszámítását a számológép statisztika-üzemmódjában végezzük (a számológép használati útmutatójában leírtak szerint). Az adat begépelése után – valamilyen elválasztójel (például pontosvessző) bevitelét követően – megadjuk az adat gyakoriságát, és csak ezután nyomjuk meg a DAT billentyűt. Ha helyesen jártunk el, akkor a számológépen a bevitt adatok kijelzett száma annyival növekszik, amennyi a bevitt adat gyakorisága volt.

Például az 1. gyártósor adatainak bevitelét az egyik zsebszámológépen a STAT módba állítás és a statisztikai memória törlése után így is elkezdhetjük: 1,96 **;** 3 **DAT**, és így folytathatjuk: 1,98 **;** 14 **DAT**.

Az összes adat bevitelét követően, a megfelelő funkcióbillentyűk aktiválásával leolvashatjuk az egyes gyártósorokhoz tartozó átlagokat és szórásokat. Eredményeinket célszerű táblázatba foglalva, áttekinthető formában megadni (literben).

	Terjedelem	Módusz	Medián	Átlag	Szórás
1. gyártósornál	0,14	2	2	2,01	0,023
2. gyártósornál	0,18	2	2	2,01	0,036

c) Az 1. gépsornál a 2,01 literes átlaghoz az adatok 78%-a van 0,023 liternél közelebb, és az adatok 92%-a van 0,046 liternél közelebb. A 2. gépsornál a 2,01 literes átlaghoz az adatok 77%-a van 0,036 liternél közelebb, és az adatok 96%-a van 0,072 liternél közelebb.

Megjegyzés

– Egyes számológépekbe táblázatos formában is bevihetők a statisztikai adatok; külön oszlopba kerülnek az adatok és külön oszlopba az adatok gyakorisága.

– A szórást a Microsoft Excel program segítségével is könnyen kiszámíthatjuk. Ehhez a program statisztikai függvényei közül használjuk az STDEVP (standard deviation based on entire population = szórás a teljes populációra), a magyar nyelvű változatban a SZÓR.S (szórás a teljes sokaságra) parancsot.

– Statisztikai mutatók kiszámolásánál gyakran egy *korrigált szórást* számolnak, amelyhez az átlagtól való négyzetes eltérések összegét nem a teljes populációszámmal (n), hanem ennél egy 1-gyel kisebb számmal ($n - 1$) osztják el. Ez a definíció nem tudja értelmezni egyetlen elem szórását.

40 B) Gyakorlás

A 40. leckét két különböző feldolgozásra ajánljuk. A 40 B) leckét az eddig tanultak gyakorlására szánjuk. A két lecke összevonható egy differenciált tanóra megtartásához.

FELADAT

1. Az alábbi táblázat a 2011/2012-es tanév és a 2014/2015-ös tanév közötti időszak szakiskolai nevelés-oktatására vonatkozik. (Forrás: Központi Statisztikai Hivatal)

Tanév	Iskolák száma	Tanuló		Osztályok a nappali oktatásban	Osztályterem	Egy pedagógusra jutó tanuló
		összesen	ebből: nappali oktatás			
2011/2012	838	149 556	139 160	6 165	4 894	13,2
2012/2013	843	139 453	126 677	5 681	4 939	12,1
2013/2014	877	125 606	113 466	5 516	4 686	11,2
2014/2015	838	109 978	100 032	5 411	4 553	10,3

a) Ábrázold közös oszlopdiagramon az iskolák számának és a tanulói létszámnak a változását! Figyelj arra, hogy az egyes kategóriák oszlopai más nagyságrendű számokat tartalmaznak. Az oszlopdiagramon ezt úgy szokás ábrázolni, hogy a függőleges tengelyt a diagram jobb és bal oldalára is felvesszük, egyik oldalon az egyik, a másik oldalon a másik adatsor értékeit jelölve.

b) Hogyan változott az átlagos osztálylétszám a jelzett időszakban? Ábrázold vonaldiagramon!

c) Hogyan változott a szakiskolában tanító tanárok száma a jelzett időszakban? Ábrázold vonaldiagramon!

2. Bencének nyolc jegye van matematikából. Ezekről tudjuk, hogy az átlaguk 3,75, a módusz 4, a medián 4 és a terjedelem 2.

a) Határozd meg, milyen osztályzatai lehetnek Bencének! Keress több megoldást is!

b) Számítsd ki Bence jegyeinek szórását legalább két megtalált megoldás esetére!

3. Történelemből Bencének hat jegye van. Ezek átlaga 4 és szórása 0. Mik lehetnek Bence osztályzatai történelemből? Mennyi a jegyeinek terjedelme, módusza és mediánja?

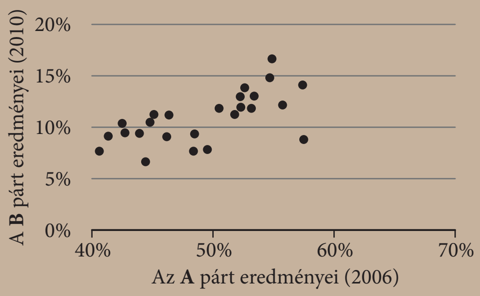
4. Az alábbi grafikon a 2010-es választások elemzésekor készült. A grafikonhoz az alábbi cikkrészlet kapcsolódik. Értelmezzük és értékeljük a cikket a grafikon vizsgálata mellett.

„A vízszintes tengely az **A** *legutóbbi eredményét reprezentálja, ha egy pont balra került, akkor ott viszonylag gyenge volt 2006-ban az* **A***, ha jobbra, akkor erős. A függőleges tengely hasonlóan a* **B** *jelöltjének 2010-es százalékos eredmé-*

nyét mutatja, a följebb lévő pontok az erősebb **B** *eredményt jelentik. Ha igaz, amit feltételeztünk, vagyis a megyében a* **B** *most ott volt erősebb, ahol 2006-ban az* **A***, a pontok egy képzeletbeli ferde vonal környezetében helyezkednek el. Az ábráról látszik, hogy így is van, vagyis azokban a megyei választókerületekben szerepelt most jól a* **B***-s jelölt, ahol legutóbb az* **A***-s, és viszont.”*

(forrás: index.hu)

Vizsgáljuk meg, hogyan nézne ki a grafikon, ha a cikkben írt következtetés nem lenne igaz! Mit jelentene az, ha egy pont a grafikon jobb alsó, illetve bal felső sarkában lenne látható?



HÁZI FELADAT

1. George R. R. Martin *A tűz és jég dala* ciklusának első kötetében, a *Trónok harcában* az egyes fejezeteket különböző szereplők nézőpontjaiból olvashatjuk:

a) Ábrázold kördiagramon a nézőpontkaraktereket a hozzájuk tartozó fejezetek száma szerint!

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy két fejezetet véletlenszerűen kiválasztva az egyik Eddard Stark, a másik pedig Tyrion Lannister nézőpontjából van megírva?

Szereplő neve	Fejezetek száma, amelyben ő a nézőpontkarakter
Eddard ’Ned’ Stark	15
Catelyn Stark	11
Daenerys Targaryen	10
Tyrion Lannister	9
Jon Snow	9
Bran Stark	7
Sansa Stark	6
Arya Stark	5
Will	1 (prológus)

2. Számítsd ki a saját matematika- és történelemjegyeid átlagát, móduszát, mediánját, terjedelmét és szórását!

3. Az alábbi táblázat 2009 és 2014 között mutatja a televízió- és rádióműsor-időket (órában) műsortípus szerint a közszolgálati televízióban.

Év	Hírek, aktuális politika, gazdaság, információ, oktatás	Irodalom, művészet, tudomány, kultúra, szórakozás	Zenei program	Sport	Egyéb	Összesen
2009	8 224	11 397	2 012	1 069	2 753	25 455
2010	8 998	11 229	1 989	1 209	2 463	25 888
2011	11 394	15 238	3 703	1 034	2 754	34 123
2012	8 963	18 189	1 897	2 020	2 689	33 758
2013	7 620	20 063	1 653	1 206	3 028	33 570
2014	8 054	26 183	2 437	1 886	592	39 152

a) Ábrázold kördiagramon, milyen volt 2009-ben, illetve 2014-ben a műsortípusok eloszlása! Hasonlítsd össze a kettőt! Milyen változásokat figyelhetsz meg?

b) Ábrázold közös vonaldiagramon a 2009 és 2014 közötti időszakban az összes műsoróra, valamint az első két műsortípus műsorórájának változását! Miket figyelhetsz meg a grafikon alapján a tárgyalt időszakot nézve?

41 Számítások osztályközepekkel

KIDOLGOZOTT FELADAT

Csilla mindennap délután 3-kor ráírja a falinaptárára, hány fokot mutat erkélyükön a hőmérő. Az adatokból ezt a táblázatot készítette:

Hány fok?	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Hányszor volt?	3	4	2	4	4	6	3	3	1

Bence és Hajni megnézte Csilla táblázatát, majd egy egyszerűbb táblázatot készítettek. Mindketten *osztályokba sorolták* az előforduló hőmérséklet-értékeket, és csak az osztályok gyakoriságát jegyezték fel. Az *osztályhatárokat* és az egyes osztályokba tartozó adatok gyakoriságát mutatják az alábbi táblázatok.

Bence táblázata:

	Osztályok	
Hőmérséklet (°C)	11–15	16–19
Gyakoriság	17	13

Hajni táblázata:

	Osztályok		
Hőmérséklet (°C)	11–13	14–16	17–19
Gyakoriság	9	14	7

Az átlagszámításnál nem vették figyelembe valamennyi adatot, csak az egyes osztályok *osztályközepét* és az osztályokhoz tartozó gyakoriságokat.

Bence adatai	Osztályközepek	
	13	17,5
Bence így számolta ki az átlagot:	$(13 \cdot 17 + 17{,}5 \cdot 13) : 30 = 14{,}95$	

Hajni adatai	Osztályközepek		
	12	15	18
Hajni így számolta ki az átlagot:	$(12 \cdot 9 + 15 \cdot 14 + 18 \cdot 7) : 30 = 14{,}8$		

ELMÉLET

Osztályba sorolást és osztályközepeket akkor alkalmazunk, ha a nagyon nagy számú különböző adat áttekinthetetlenné tenné az adatsokaságot.

Osztályközépnek nevezzük az adott osztályt határoló két érték számtani közepét.

FELADAT

1. Mennyi a Kidolgozott feladatban szereplő 30 hőmérséklet átlaga?

2. A következő táblázat a Szentendrén 2009-ben és 2010-ben mért havi csapadékmennyiséget mutatja:

2009	jan.	febr.	márc.	ápr.	máj.	jún.	júl.	aug.	szept.	okt.	nov.	dec.
Csapadék (mm)	52	59	51	6	38	98	37	51	23	58	87	80
2010	jan.	febr.	márc.	ápr.	máj.	jún.	júl.	aug.	szept.	okt.	nov.	dec.
Csapadék (mm)	54	52	18	49	197	91	88	104	118	57	81	74

a) Töltsd ki a következő táblázatot a 24 hónap adatai segítségével, és készíts gyakorisági diagramot!

Osztályok	0–40 (mm)	41–81 (mm)	82–122 (mm)	123–163 (mm)	164–204 (mm)
Gyakoriság					
Osztályközép					

b) Számítsd ki az a) feladat eredményei alapján az átlagos havi csapadékmennyiség közelítő értékét!

c) Számítsd ki a szórást az osztályközepek felhasználásával!

d) Az eredeti, 24 adatot tartalmazó táblázatban szereplő értékek hány százaléka van a b)-ben kapott átlaghoz a c)-ben kapott szórásnál közelebb? Változik-e a válasz, ha az osztályközepekkel számolsz?

3. Egy elektromos paneleket gyártó üzemben az egyik robot feladata az, hogy 14,5 mm hosszúságú vékony huzaldarabokat vágjon le, amelyekkel egy panel két forrasztási pontját kötik majd össze. A robot működését a levágott huzaldarabok hosszának mérésével rendszeresen ellenőrzik. Az egyik ellenőrzés adatait mutatja az alábbi táblázat.

A huzaldarab hossza (mm)	11,8–12,8	12,9–13,9	14,0–15,0	15,1–16,1	16,2–17,2
Gyakorisága	2	4	13	5	1

a) Ha a gyártásnál az előírt hossztól való megengedett legnagyobb eltérés (a *tűrés*) ±1,2 mm, akkor az ellenőrzött huzalok hány százaléka felel meg ennek az előírásnak (az osztályközepekkel számolva)?

b) Mennyi az ellenőrzött huzaldarabok hosszának átlaga (az osztályközepekkel számolva)?

c) Ha a tűrés helyett a legfeljebb 1,2 mm-es szórás lenne a minőségi előírás, akkor a minta alapján ítélve kellene-e állítani a robot működésén? Az osztályközepekkel számolj!

HÁZI FELADAT

1. Egy matematikatanár minden általa tanított 12. osztályos tanulóval (összesen 50 fő) ugyanazt a dolgozatot íratta meg. Az elért pontszámok a következők:

Elért pontszám	0–30	31–40	41–50	51–60	61–70	71–80	81–90	91–100
Gyakorisága	0	2	8	21	9	9	1	0

Az osztályközepek felhasználásával számítsd ki a pontszámok átlagát és szórását! Hány dolgozat pontszáma van „egyszórásnyi távolságnál” közelebb az átlagpontszámhoz? Hány százaléka ez az összes dolgozatnak?

2. Az emberek szellemi teljesítőképességének (intelligenciájának) a szintjét egy-egy számmal, az *intelligenciahányadossal* (IQ-val) szoktuk kifejezni. Ennek mérését alkalmas kérdéssorozatokkal, ún. *IQ-tesztekkel* végzik, és ún. *IQ-pontokkal* értékelik. Egy modern IQ-tesztet a szakemberek akkor tekintenek szabványszerűnek, ha az átlagos várható eredmény 100, míg a szórás 15 IQ-pontnak felel meg. Egy frissen elkészült teszt első 1000 kitöltőjének eredményeit a mellékelt táblázat szemlélteti.

Elért pontszám	75–84	85–94	95–104	105–114	115–124	125–134
Gyakorisága	17	132	225	468	130	28

a) Az osztályközepek segítségével számítsd ki a fenti 1000 fős minta átlagát és szórását!

b) Mit tapasztalsz? Milyen lehetséges magyarázatot tudsz adni a tapasztaltakra?

Megjegyzés

Az IQ betűszó a latin *intelligentia* = intelligencia és *quotiens* = hányados szavak kezdőbetűiből állt össze.

42 Grafikonok hitelessége

BEVEZETŐ 1.

– Már tudom, mit kérek tőled a születésnapomra – mondja Jutka Lacinak. – Egy MyCream©-féle kézkrémet! Itt olvasom, hogy a megyeszékhelyeken lakó 40 és 59 év közötti érettségizett nők 64%-a ezt használja! Ez pedig valószínűleg igaz, mert 1000 fős reprezentatív minta alapján számolták ki.
Mit jelent az, hogy reprezentatív minta?

ELMÉLET

A statisztika többféle szempont szerint is csoportosítja hazánk lakosságát. A 2011. évi népszámlálás jelentésében többek között a következő csoportosításokat látjuk:
Településtípus szerint: főváros, megyeszékhely, megyei jogú város, többi város, községek – nagyközségek (5 csoport).
Nemek szerint: férfi, nő (2 csoport).
Korcsoportok szerint: 0–2; 3–5; 6–14; 15–39; 40–59; 60–62, 63–65; 66–69; 70-től (9 csoport).
Legmagasabb befejezett iskolai végzettség szerint: egyetemi vagy főiskolai oklevél; érettségi; középfokú végzettség érettségi nélkül vagy szakmai oklevél; általános iskola 8. évfolyam; általános iskola 8. évfolyamnál alacsonyabb (5 csoport).
Ha mindenkiről megállapítjuk, hogy e szerint a négy szempont szerint melyik csoportba tartozik (például „megyeszékhelyeken lakó 40 és 59 év közötti érettségizett, de felsőfokú diplomát nem szerzett nő), akkor $5 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 5 = 450$ osztály keletkezik. Most hazánk minden lakosa egy és csak egy osztályban van benne a 450 osztály közül.

E négy szempont szerint akkor tekintünk *reprezentatívnak* egy mintát, ha ebben a mintában a 450 osztályba sorolt személyek számának aránya **megegyezik az országos arányokkal**.
Bevezető feladatunkban joggal vitatható, hogy az 1000 fős minta reprezentatív volt. Miért? Mert 1000 fő között a 450 osztályba sorolt személyek száma teljesen esetleges. (Még ha feltesszük, hogy csupa 14 évesnél idősebb nőt választottak az 1000 fős mintába, akkor is $5 \cdot 6 \cdot 5 = 150$ osztály keletkezik!)

FELADAT

1. Egy város önkormányzata ilyen statisztikát készített a helyi lakosságról:

Legmagasabb iskolai végzettség	Legfeljebb alapfokú	Szakiskolai	Érettségi	Felsőfokú
Nők	1927	1281	2271	1121
Férfiak	1610	1963	1845	982

Ez a táblázat 8 osztályba sorolta a lakosságot.
a) Állíts össze ezeknek a szempontoknak megfelelően a teljes lakosságból egy 2000 fős, a táblázattal megadott 8 osztályba sorolt reprezentatív mintát! Eredményeidet táblázatban add meg!

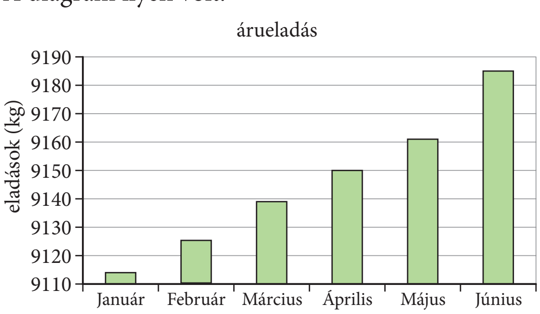
b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a **teljes lakosságból** véletlenszerűen kiválasztott személy férfi, és a legmagasabb végzettsége szakiskola?

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a **2000 fős mintádból** véletlenszerűen kiválasztott személy férfi, és a legmagasabb végzettsége szakiskola?

d) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a **2000 fős** mintádból véletlenszerűen kiválasztott személy érettségizett nő? (Vigyázz, nem biztos, hogy az érettségi a legmagasabb végzettsége!)

BEVEZETŐ 2.

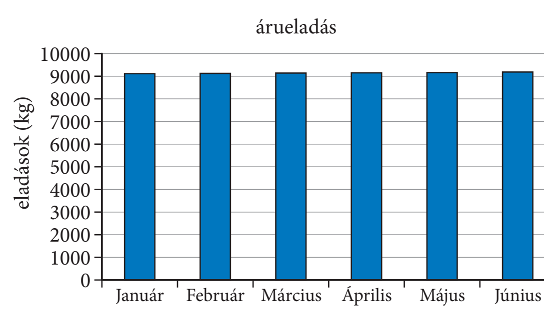
A statisztikai adatok szemléltetésével kapcsolatosan néhány elvárásnak meg kell felelnünk azért, hogy a szemléltetés kellően pontos, áttekinthető legyen. Az elővigyázatosság nem árt, mert a szemléltetés olykor félrevezető is lehet. Ez akkor is előfordulhat, ha a diagram készítőjének nem a szándékos megtévesztés volt a célja.
Nézzünk egy egyszerű példát! Egy mosópor-forgalmazó kisvállalatnál kimutatást készítettek a havi eladásokról.
A diagram ilyen volt:



Első ránézésre az a benyomásunk támad, hogy az eladások az év első 6 hónapjában erőteljesen növekedtek. Ám ha figyelmesebben megnézzük a diagramot, akkor láthatjuk, hogy az eladott termék mennyisége a januári 9114 kg-ról júniusra csak 9185 kg-ra növekedett. Mivel $\frac{9185}{9114} \approx 1,008$, ez mindössze 0,8%-os növekedést jelent. Ez rendben is van, de azt nem lehet mondani, hogy a fejlődés dinamikus lett volna.

Mi okozza a félreértést? Az, hogy a függőleges tengelyen nem a 0-tól indul a beosztás. Emiatt **a diagram nem arányos**, vagyis az egyes hónapokban eladott mosópormennyiségek aránya torz módon jelenik meg a szemlélő számára. Például a júniusi eladásnak megfelelő oszlop magassága több mint kétszer akkora, mint a márciusnak megfelelő oszlopé, pedig a júniusban eladott termék mennyisége alig haladja meg a márciusban eladottét.

Ezt jól láthatjuk, ha megrajzoljuk azt a diagramot, amelyen az oszlopok magassága **arányos** az eladott termék mennyiségével.



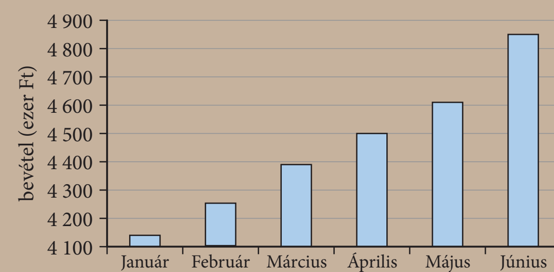
Lehetséges, hogy az első diagram megtévesztés céljával készült, de az is elképzelhető, hogy azért ábrázolták így az adatokat, mert az eladott mosópor mennyisége az első diagramról pontosabban olvasható le, mint a másodikról.

FELADAT

2. Az oszlopdiagram egy városi mozi bevételét ábrázolja.

a) Sorold fel a megadott oszlopdiagram hiányosságait, hibáit!

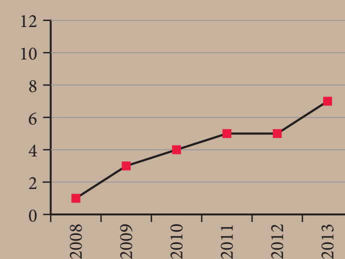
b) Módosítsd úgy a diagramot, hogy **arányos** legyen!

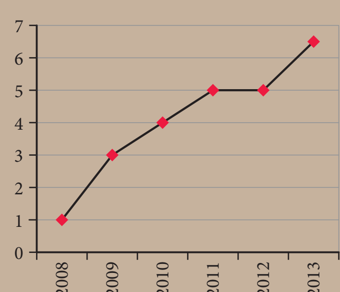


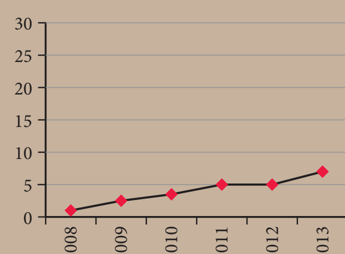
3. Az uniós pénzből felújított játszóterek számáról vonaldiagram készült a főváros egyik kerületében. Ugyanezeket az adatokat két napilap is megjelentette, de nem pontosan ebben a formában.

a) Egyértelmű-e, hogy mit ábrázolnak a diagramok?

b) Hogyan változik meg a szubjektív benyomás az eredetihez képest az új grafikonokat szemlélve? Mi okozza a változást?



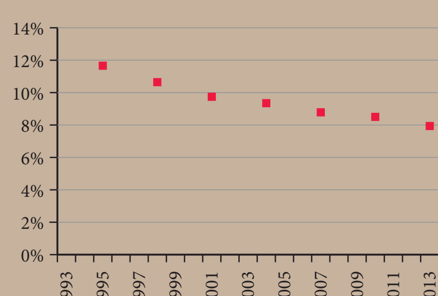


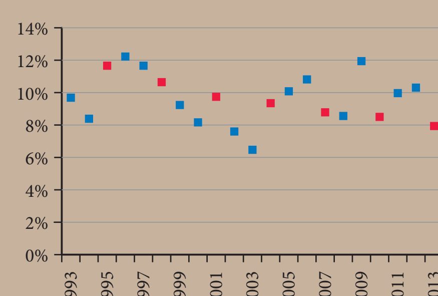


4. „A munkanélküliség folyamatos csökkenése városunkban" címmel jelent meg egy újságcikk a város helyi lapjában. A cikk szerint a munkanélküliség folyamatosan csökkent, amit az olvasók a mellékelt diagramon meg is tekinthetnek. A valóságban a második diagram szerint alakult a munkanélküliség.

a) Milyen módszerrel érte el az újságcikk írója azt, hogy a címben megjelent állítását alátámassza?

b) Hogyan kellene módosítania a szerzőnek az újságcikk címét?





5. A következő táblázatról leolvashatjuk, hogy hazánk 7 régiójában 1990-ben, 2001-ben és 2011-ben mennyi az 1000 férfira jutó nők száma:

	Közép-Magyarország	Közép-Dunántúl	Nyugat-Dunántúl	Dél-Dunántúl	Észak-Magyarország	Észak-Alföld	Dél-Alföld
1990	1116	1034	1056	1079	1082	1071	1078
2001	1130	1050	1070	1094	1101	1084	1096
2011	1141	1073	1075	1101	1105	1088	1101

a) Megállapítható-e az adatok alapján az, hogy az egyes években mennyi volt az 1000 férfira jutó nők száma Magyarország teljes lakosságát figyelembe véve? Ha igen, akkor hogyan, ha nem, akkor miért nem?

b) Válassz a táblázatból egy évszámot! Készíts olyan oszlopdiagramot, amely szemlélteti a kiválasztott év adatait, de az adatok közötti különbség jóval nagyobbnak látszik, mint amekkora valójában (azaz a diagram nem arányos)!

c) Válassz a táblázatból egy régiót! Készíts olyan vonaldiagramot, amely az általad kiválasztott régióban bemutatja a mutatószám változását a megadott három évben! Mi a hátránya az arányos diagramnak? Hogyan lehet ezt a hátrányt megszüntetni, milyen torzulások keletkeznek?

HÁZI FELADAT

1. Az alábbi táblázat a KSH 2012-es adatai alapján a külföldi látogatók számát foglalja össze (ezer főre kerekítve), a látogatókat 15 osztályba sorolva. 2012-ben a táblázatban megadott országokból érkezett a legtöbb látogató Magyarországra.

	Szlovákia	Románia	Ausztria	Németország	Szerbia és Montenegró
1 napos látogatók	9292	6810	6229	789	2277
1-3 éjszakát eltöltők	569	885	524	849	307
4 vagy több éjszakát eltöltők	109	206	481	1550	73
Összesen	9970	7901	7234	3188	2657

Az alábbi 1000 fős minta azt mutatja, hogy a magyarországi tapasztalataikról hány látogatót kérdeztek meg az egyes osztályokból.

a) Keress érveket amellett, hogy az 1000 fős minta nem reprezentatív!

	Szlovákia	Románia	Ausztria	Németország	Szerbia és Montenegró
1 napos látogatók	250	190	171	2	55
1-3 éjszakát eltöltők	43	28	18	30	10
4 vagy több éjszakát eltöltők	31	35	45	72	20
Összesen	324	253	234	104	85

b) Mutasd meg, hogy a látogatók nemzetek szerinti eloszlását tekintve a minta reprezentatívnak tekinthető!

c) Mi okozhatta a két táblázat közötti jelentős eltéréseket?

2. A MyCream☺ kozmetikai cég legújabb arckrémének a tavalyi évben eladott havi mennyiségét mutatja a következő táblázat. Készíts az adatok alapján

a) arányos diagramot;

b) olyan diagramot, amelyen jól követhető az adatok változása!

Hónap sorszáma	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Termelt mennyiség (kg-ban)	42,7	45,6	48,2	48,1	51,3	54,2	50,6	57,1	42,8	58,9	60,4	66,3

3. Készíts az órai 5. feladat táblázata alapján a három évre és mind a hét régióra vonatkozóan közös vonaldiagramot! (A vízszintes tengelyen az évszámok, a függőleges tengelyen az 1000 férfira jutó nők száma legyen feltüntetve!)

43 Gyakorlás vagy tudáspróba

FELADAT

1. **a)** Foglalkozzunk olyan adathalmazzal, amelynek mindegyik eleme egyenlő! Ha mind a tizenöt adat 222, akkor az adatok átlaga is 222. Mennyi a módusz, a medián, a terjedelem, az átlagos abszolút eltérés és a szórás ebben az adathalmazban?

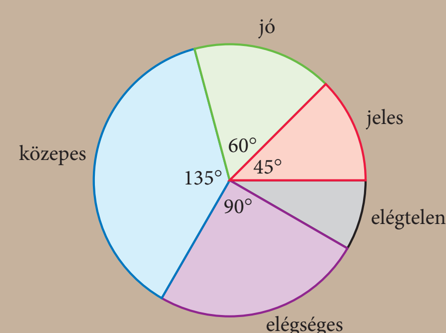
b) Igaz-e, hogy ha egy adathalmaz mindegyik eleme egyenlő, akkor a szórása 0?

c) Igaz-e, hogy ha egy adathalmaz szórása 0, akkor az adathalmaz mindegyik eleme egyenlő?

d) Igaz-e, hogy ha egy adathalmaz adatainak átlaga 0, akkor az összes adat egyenlő?

2. Egy adathalmazban hat adat van, ezek mind különbözők, és az átlaguk 0. Add meg úgy az adatokat (akár több próbálkozás eredményeként), hogy az adathalmaz szórása körülbelül 2 legyen!

3. A kördiagram azt mutatja, hogyan sikerült a 12. B osztály 24 tanulójának a legutóbbi témazáró dolgozata.



a) Töltsd ki a táblázatot!

Osztályzat	5	4	3	2	1
Gyakoriság					
Relatív gyakoriság					

b) Ábrázold sávdiagramon az adatok eloszlását!

c) Változtasd meg az egyik tengelyen az egységet úgy, hogy a b) pontban készített grafikonról a relatív gyakoriságokat olvashassuk le!

d) Mennyi a 24 osztályzat átlaga, módusza, mediánja?

e) Mennyi a vizsgált adathalmaz átlagos abszolút eltérése, és mennyi a szórása?

4. Nagyhegy község legfiatalabb lakói a féléves ikrek, Jancsi és Juliska, a legidősebb férfi a 84 éves Kis József, a legidősebb nő a 96 éves Tóth Péterné. A lakosság életkori megoszlására vonatkozik a következő táblázat.

Életkor	Legfeljebb 18 éves	18 és 65 év közötti	Legalább 65 éves
Nők száma	350	2177	473
Férfiak száma	376	1943	251

a) Sorold a nőket is és a férfiakat is az életkoruknak megfelelő három osztályba, és számítsd ki az osztályközepeket!

b) Hány nő és hány férfi lakik Nagyhegyen? Mennyi az összlakosság?

c) Az osztályközepek felhasználásával adj becslést a nagyhegyi nők, illetve a nagyhegyi férfiak átlagos életkorára és az életkorok szórására!

d) Sorold az életkoruk szerint három osztályba a nagyhegyi lakosokat! Számítsd ki a község lakosainak átlagos életkorát kétféleképpen: a három osztályközép segítségével, illetve a b) és a c) feladat eredményeit felhasználva a nők és a férfiak átlagéletkorának súlyozott átlagaként! Ugyanazt kaptad-e eredményül a két esetben?

5. A fizikaórai tanulókísérlet egy tömegmérési feladat volt. A mérést 19 tanuló végezte el. A mért tömegre gramm pontossággal a következő adatokat kapták: 37, 33, 37, 36, 35, 36, 37, 40, 38, 33, 37, 36, 35, 35, 38, 37, 36, 35, 37.

a) Készítse el a mért adatok gyakorisági táblázatát!

b) Mennyi a mérési adatok átlaga gramm pontossággal?

c) Mekkora a kapott eredmények mediánja, módusza?

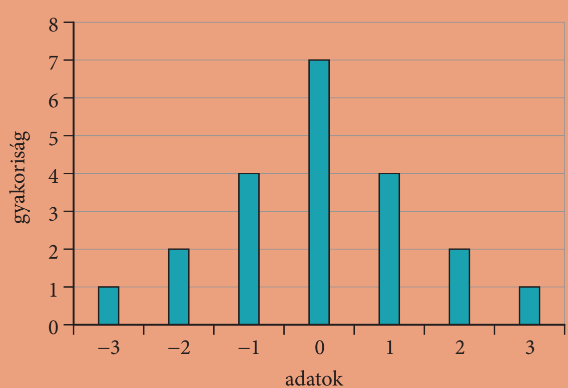
d) Készítsen oszlopdiagramot a mérési eredményekről!

(2005. október, középszint)

HÁZI FELADAT

1. Egy tízelemű adathalmaz módusza 3, szórása 0. Mennyi az átlaga, mediánja, terjedelme, átlagos abszolút eltérése?

2. Adj becslést a diagramon szemléltetett adathalmaz átlagára és szórására, majd számolással ellenőrizd a becslésedet!



3. Egy óvodában megállapították, hogy 16 gyereknek nincs testvére, 10-nek egy, 18-nak kettő, 2-nek négy testvére van. Azt nem tudjuk, hány gyereknek van három testvére. Mindegyik gyerek más családban él, négynél több testvére egyiküknek sincs. Készíts gyakorisági táblázatot arról, hogy az itteni óvodások családjában hány gyerek van! Mennyi lehet a hiányzó adat, ha

a) a számsokaság mediánja 2;

b) a számsokaság módusza 2;

c) a gyermekek száma családonként átlagosan 2,5?

4. Egy munkahelyen a dolgozók ezer forintban kifejezett havibérét a következő táblázat adja meg:

Havibér	95	112	130	186	318
Gyakoriság	8	5	4	2	1

a) Add meg a havibérek szóródási mutatóit (terjedelem, átlagos abszolút eltérés, szórás)!

b) Hogyan változnak a szóródási mutatók, ha mindenkinek felemelik a bérét 18 ezer forinttal?

c) Hogyan változnak a szóródási mutatók, ha mindenkinek felemelik a bérét 10%-kal?

Témazáró feladatgyűjtemény

1. A tizenkettedikesek matematikaérettségijében a 12-es feladatra legfeljebb 4 pontot lehetett szerezni. A 73 vizsgázó pontjai így alakultak:
4, 3, 4, 4, 1, 3, 1, 4, 2, 2, 4, 3, 4, 3, 4, 4, 4, 1, 2, 3, 3, 3, 2, 4, 4, 4, 4, 4, 3, 4, 4, 4, 4, 3, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 4, 3, 3, 2, 4, 3, 3, 4, 2, 2, 3, 3, 4, 1, 3, 3, 2, 1, 4, 4, 3, 4, 4, 2, 4, 3, 4.
Határozd meg a pontszámok átlagát, móduszát, mediánját, terjedelmét és szórását!

2. Egy másik feladatra legfeljebb 12 pontot lehetett szerezni. Az egyik 15 fős matematikacsoport pontszámai így alakultak: 11, 6, 11, 7, 3, 8, 11, 11, 11, 10, 11, 9, 11, 10, 7.
Határozd meg a pontszámok átlagát, móduszát, mediánját, terjedelmét és szórását!

3. A 16. feladatot (a választható feladatok egyikét) 7 tanuló választotta. A feladatra legfeljebb 17 pontot lehetett szerezni. A pontszámokról tudjuk, hogy a móduszuk 17, a mediánjuk 16, a terjedelmük 10 és az átlaguk 13,1 és 13,2 között van.

a) Hány pontos lett a leggyengébb megoldás a feladatra?
b) Hányan oldották meg hibátlanul a feladatot?
c) Született-e 12 pontos dolgozat?

4. A C osztályból 11-en emelt szintű érettségit írtak matematikából. Az 5. (választható) feladatot mindannyian választották. A legalacsonyabb pontszám 8 volt, és csupán egy hibátlan, 16 pontos megoldás született. A pontszámok átlaga 12,2 és 12,3 között volt, a mediánja 12, módusza pedig nem volt. Tamara és Beni egyarán 10 pontot szereztek. Adj meg olyan adathalmazt, amely a fenti feltételeknek megfelel, és számítsd ki az általad megadott számok szórását!

5. Hét darab pozitív számból álló számsokaságról a következőket tudjuk: az átlag 4, a módusz 1, a medián 3, a terjedelem pedig 9. Mik lehetnek a számsokaság elemei? Adj meg egy ilyen sokaságot!

6. Táblázatba foglaltuk a Magyarországon kiadott, magyar szerzőktől származó könyveket a művek jellege szerint. A táblázat az 1990 és 2014 közötti időszakot ábrázolja. (Forrás: Központi Statisztikai Hivatal)

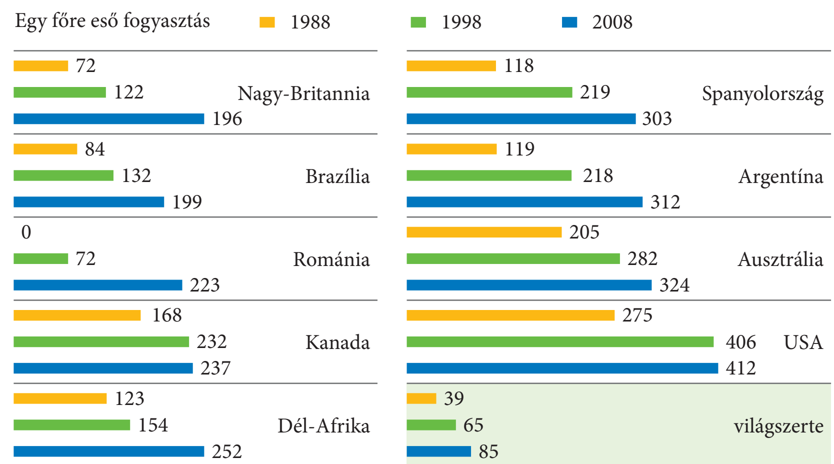
Év	Tudományos és ismeretterjesztő	Szakmai	Szépirodalom	Ifjúsági és gyermekirodalom	Tankönyv	Egyéb	Összesen
1990	1332	2917	832	256	1225	172	6734
1994	800	3594	870	350	1702	213	7529
1998	1197	3390	1210	474	1706	197	8174
2002	1032	2634	1069	218	2227	130	7310
2006	1107	2667	1330	366	2395	223	8088
2010	808	3890	1639	560	2070	341	9308
2014	960	3239	1506	615	1877	330	8527

a) Ábrázold kördiagramon az egyes években kiadott könyvek számát jellegük szerint!
b) Ábrázold vonaldiagramon az összes kiadott könyvet, valamint a szépirodalmi és a tudományos és ismeretterjesztő könyvek számának változását!
c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a 2014-ben kiadott könyvek közül véletlenszerűen kettőt kiválasztva azok mind szakmai könyvek?
d) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a 2014-ben kiadott könyvek közül véletlenszerűen tízet kiválasztva azok közül pontosan kettő szakmai könyv?

7. A jobb oldali színes grafikon szemlélteti néhány ország egy főre jutó éves átlagos Coca-Cola-fogyasztását. A mennyiségek 8-ounce (uncia, 8 ounce kb. 2,5 dl) kiszerelésű adagokban értendők.

a) Mely országban fogyasztották az egyes években összesen a legtöbb, illetve legkevesebb kólát?

b) Hol a legnagyobb és a legkisebb arányú a kólafogyasztás növekedése 1988 és 1998, illetve 1998 és 2008 között?



Az egyes országok lakossága (millió főben számolva):

	Nagy-Britannia	Brazília	Románia	Kanada	Dél-Afrika	Spanyolország	Argentína	Ausztrália	USA	Föld
1988	56,9	141	23,1	26,8	29,2	38,7	31,7	16,5	244,5	5138
1998	58,4	166	22,5	30,2	42,1	39,7	36,1	18,7	275,9	5975
2008	61,2	187	21,5	33,5	48,7	45,3	39,7	21,2	304,4	6754

c) Mennyi kólát fogyasztott a világ lakossága a három jelzett évben?

8. Bálint matematikajegyei az első félévben: 1, 2, 2, 5, 4, 3, 5.

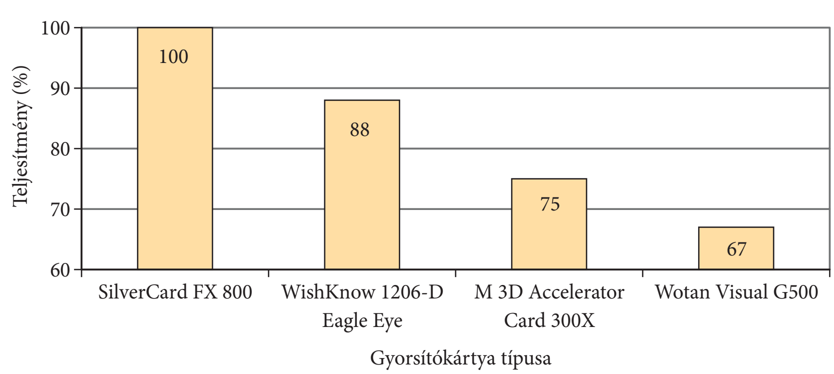
a) Add meg a jegyek terjedelmét, móduszát és mediánját!

b) Számítsd ki a jegyek átlagát és szórását!

c) Félévzárás előtt két héttel Bálint kétségbeesetten kérdezi meg tanárát, hogy hogyan javíthatna a négyesért. Tanára felhívja rá a figyelmét, hogy 3,5-es átlag alatt nem hajlandó megadni a négyest (Bálint év elején alig dolgozott valamit!), ahhoz pedig, hogy kérdés nélkül a jobb jegyet ajánlja meg, az átlagnak el kell érnie a 3,65-ot. Hány ötöst kellene szereznie a fennmaradó két hétben Bálintnak ahhoz, hogy biztosan négyes lehessen félévkor?

9. „A forradalmian új technológiának köszönhetően a SilverCard FX800 bármely eddig használt 3D-gyorsítókártyát könnyedén maga mögé utasítja teljesítményében. De beszéljenek helyettünk a számok! Íme egy táblázat a legismertebb márkájú kártyák teljesítményéről, a SilverCard FX800-éhoz képest:"

Milyen hibát tartalmaz a diagram?



10. A 7 Csoda című játékban Szulamit pontszámai a következők voltak az egymást követő játszmákban:
73, 59, 57, 45, 49, 51, 47, 56, 64, 52, 41, 49, 57, 53, 54, 45, 54, 57, 56, 57.

a) Határozd meg a pontszámok átlagát, móduszát, mediánját és szórását!

b) Oszd be a pontszámokat a következő osztályokba: 41–45, 46–50, 51–55, 56–60, 61–65, 66–70, 71–75!

c) Készíts oszlopdiagramot az előbbi osztályokról!

d) Számítsd ki a pontszámok átlagát és szórását az osztályközepekkel való közelítés segítségével!

11. A 7 Csoda című játékban Kati pontszámai a következők voltak az egymást követő játszmákban:
35, 45, 44, 35, 55, 38, 50, 45, 57, 48, 46, 50, 39, 61, 66, 56, 57, 48, 45, 47

a) Határozd meg a pontszámok átlagát, móduszát, mediánját és szórását!

b) Oszd be a pontszámokat a következő osztályokba: 32–36, 37–41, 42–46, 47–51, 52–56, 57–61, 62–66!

c) Készíts oszlopdiagramot az előbbi osztályokról!

d) Számítsd ki a pontszámok átlagát és szórását az osztályközepekkel való közelítés segítségével!

12. Szulamiték szerepjátékoznak. A játék elején mindenki kap 150 pontot. Ezt kell szétosztania tíz tulajdonság között, de semelyik tulajdonságra sem adhat többet, mint 20 pont. Szulamit papnőjének, Helenának az alábbi tulajdonságértékei vannak: erő: 11, ügyesség: 14, gyorsaság: 14, állóképesség: 13, egészség: 14, karizma: 18, intelligencia: 19, akaraterő: 16, asztrális érzék: 16, észlelés: 15.

a) Mennyi a tulajdonságok átlagos értéke?

b) Mekkora a tulajdonságok szórása?

13. Marciék szerepjátékoznak. A játék elején mindenki kap 150 pontot. Ezt kell szétosztania tíz tulajdonság között, de semelyik tulajdonságra sem adhat többet, mint 20 pont.
Marci egy ork harcost ruház fel tulajdonságokkal. 18 pontot ad az erejére. A többi 4 fizikai tulajdonság (ügyesség, gyorsaság, állóképesség, egészség) sem lesz alacsonyabb értékű, mint bármelyik mentális tulajdonság (5 db: karizma, intelligencia, akaraterő, asztrális érzék és észlelés).

Marci úgy osztotta el a 150 pontot, hogy a pontértékek szórása nem több, mint 1,5.
Adj meg egy lehetséges leosztást!
Legfeljebb hány pontos lehet az ork harcos többi fizikai tulajdonsága?

14. Jocó a felvételi jelentkezését egy külföldi egyetemre is beadta. Az egyetem azt kívánja meg tőle, hogy minden érettségi eredménye legalább 70 százalék, az érettségi átlaga pedig 80 százalék fölött legyen. Az emelt szintű érettségik százalékos eredményét az egyetem ugyanúgy számítja be, mint a középszintűekét (tehát nem ad hozzá 40 pontot).
Jocó így gondolkodik:
Matematikából emelt szintű érettségit fog tenni. A próbaérettségik, amiket eddig megírt: 78, 84, 82, 85, 81 százalékosak lettek. Ezek átlagára számít a valódi érettségin is.
Magyarból és történelemből középszintű érettségit szeretne tenni. A történelemérettségitől tart a legjobban, ezért annak a pontszámát a lehető legjobban alulbecsüli. A magyarérettségit 80 százalék vagy afölöttinek érzi.
Angolból két éve előrehozott érettségit tett, ami 85 százalékos lett. Ezzel az eredményével meg is van elégedve.
Ezeken kívül még fizikából fog emelt szintű érettségit tenni.
Ha a legrosszabb esetet számítjuk, de a tantárgyakon általában saját elvárásai szerint teljesít, akkor legalább hány százalékos fizikaérettségit kell írnia, hogy felvegyék külföldre?

15. Az IMDb internetes filmadatbázis felhasználói pontozhatják az adatbázisban található filmeket. 2015-ben a toplista első helyezettje *A remény rabjai* című 1994-es filmalkotás volt, 9,2 átlagos pontszámmal (a 10-ből), a második pedig – ugyancsak 9,2 átlagos pontszámmal – *A Keresztapa* (Francis Ford Coppola 1972-es remekműve).
Az IMDb-n a filmek pontszáma ugyanakkor nem azonos a filmre adott szavazatok átlagos értékével. Ennek oka, hogy az oldal üzemeltetői igyekeznek kiküszöbölni a film rajongóinak és ellenzőinek elvakult (10 és 1 pontos) értékeléseit. (Ettől persze még jogos maradhat, hogy a filmet valaki 10 vagy akár 1 pontra értékelje.) Ennek részleteibe az oldal szándéka szerint nem nyerünk beavatást.

Az alábbi táblázat részletezi az egyik filmre leadott szavazatokat.

Szavazatok száma	Értékelés
544 471	10
237 026	9
113 042	8
45 465	7
17 664	6
10 310	5
5 215	4
4 175	3
4 226	2
31 369	1

a) Határozd meg az egyes értékelések relatív gyakoriságát!

b) Készíts sávdiagramot az értékelésekről! (Ilyen diagramokat az IMDb honlapján is találhatsz.)

c) Számítsd ki az értékelések átlagát! (A 10 és 1 pontos értékeléseket is számold az átlagba!)

d) Hány maximális (10 pontos) értékelésre lenne szükség ahhoz, hogy a film átlagos értékelése valóban 9,2 legyen?

e) Dönci a húgával és a szüleivel úgy dönt, hogy megnézi moziban A Keresztapát. Amikor hazaérnek, mind a négyen pontozzák az alkotást. A filmre adott szavazataik: 10, 10, 9 és 8 voltak. Hányféleképpen adhatták ezeket a szavazatokat?

16. A Big Voice című 2015-ös musical 9,8 pontot kapott az IMDb-n. Ez mégsem elegendő a toplistára kerüléshez, ugyanis ez az átlag 8 darab szavazó értékeléséből származik. Ők egytől egyig 9 vagy 10 ponttal értékelték a filmet.

a) Hányan adtak 10 és hányan 9 pontot? (A 9,8-es átlag egy kerekített érték, ilyen kevés szavazónál pedig az IMDb rendszere nem korrigálja az előző feladatban leírtak szerint az eredményt.)

Hat szavazatról a honlap részletesebb leírást is közöl:

	Szavazatok száma	Átlag
Férfiak	3	9,70
Nők	3	9,70
18–29 év közöttiek	1	10,00
ebből férfi	1	10,00
30–44 év közöttiek	4	9,80
ebből férfi	2	9,50
nő	2	10,00
45 év fölöttiek	1	9,00
ebből nő	1	9,00
USA-szavazók	5	9,80
USA-n kívülről szavazók	1	9,00

A táblázat alapján válaszolj a kérdésekre:

b) Eldönthető-e az USA-n kívülről szavazó neme?

c) Eldönthető-e az USA-n kívülről szavazó korosztálya, ha tudjuk, hogy férfi volt?

d) Eldönthető-e az USA-n kívülről szavazó korosztálya, ha tudjuk, hogy nő volt?

Korábbi érettségi feladatok:

17. Egy dolgozatnál az elérhető legmagasabb pontszám 100 volt. 15 tanuló eredményeit tartalmazza a következő táblázat:

Elért pontszám	100	95	91	80	65	31	17	8	5
A dolgozatok	3	2	1	2	1	2	2	1	2

a) Határozza meg az összes dolgozat pontszámának átlagát (számtani közepét), móduszát és mediánját!

b) A dolgozatok érdemjegyeit az alábbi táblázat alapján kell megállapítani:

Pontszám	Osztályzat
80–100	jeles
60–79	jó
40–59	közepes
20–39	elégséges
0–19	elégtelen

Ennek ismeretében töltsd ki a következő táblázatot a füzetedben!

Osztályzat	Jeles	Jó	Közepes	Elégséges	Elégtelen
A dolgozatok száma					

c) Készítsen kördiagramot az osztályzatok megoszlásáról! Adja meg az egyes körcikkekhez tartozó középponti szögek értékét is!

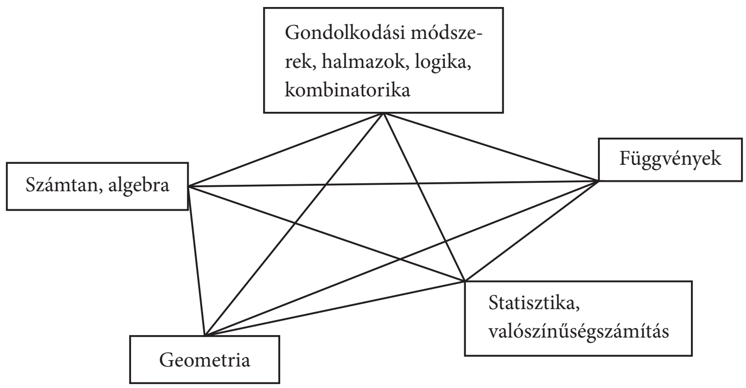
(2005. május, középszint)

18. Egy növekvő számtani sorozat első három tagjából álló adathalmaz szórásnégyzete 6. Igazolja, hogy a számtani sorozat differenciája 3!

(2014. május, emelt szint)

KÉSZÜLJÜNK AZ ÉRETTSÉGIRE!

A középiskolai anyagot öt téma köré csoportosítottuk. A következő *teljes gráf* azt mutatja, hogy igazából minden téma mindegyik másikkal összefügg, még ha látszólag egymástól távoli területekről van is szó.



Néhány, talán nem nyilvánvaló kapcsolat:

- geometria és statisztika: kördiagram, középponti szög
- geometria és valószínűségszámítás: ponthalmazokkal kapcsolatos valószínűségszámítási feladatok, kockadobási problémák
- kombinatorika és geometria: geometriai problémáknál az adott feltételnek megfelelő lehetséges esetek felsorolása (diszkusszió)
- halmazok és függvények: értelmezési tartomány és értékkészlet, geometriai transzformációk (ponthalmazok)
- geometria és függvények: geometriai transzformációk (egyértelmű hozzárendelés)

A következő részben áttekintjük ezt az öt területet. Minden részt egy összefoglaló táblázattal kezdünk. Ebben felsoroljuk a témakörhöz tartozó legfontosabb definíciókat (D) és tételeket (T). Az egyes leckékben pedig a témakörhöz kapcsolódó feladatokon keresztül ismételjük át a teljes tananyagot.

Gondolkodási módszerek, halmazok, logika, kombinatorika

A MATEMATIKA ALAPJAI

Miért kezdődik szinte mindegyik rendszerező matematika-tankönyv a halmazelmélettel? Röviden azért, mert az egész matematika a halmazelméletre épül. Az érthetőbb válasz megadásához azonban vissza kell nyúlnunk az 1900-as évek elejére. Akkoriban alakult ki az igény arra, hogy a nagyobb elméleteket axiómarendszerekre alapozva építsék fel. Úgy, mint egy társasjátékot a játékszabályra. Az axióma olyan állítás, amelyet nem bizonyítunk, hanem igaznak fogadunk el. Ilyen axiómák húzódnak meg – sokszor nehézségük miatt „láthatatlanul” – a középiskolában tanult matematika mélyén is. A halmazelmélet axiomatizálása azért volt fontos, mert a matematika számos területét fel lehet építeni tisztán halmazelméletre alapozva.

Algebra: Hogyan definiálhatók a természetes számok? Mit jelent a 0, az 1, a 2, a 3? Neumann János halmazok segítségével definiálta a természetes számokat:
0 legyen az $\emptyset$, vagyis az üres halmaz.
1 legyen ez a halmaz: $\{\emptyset\}$, vagyis az a halmaz, amelynek egyetlen eleme van: az üres halmaz.
2 legyen ez a halmaz: $\{\emptyset; \{\emptyset\}\}$, és így tovább. (Tudod folytatni?)

Koordinátageometria: A sík pontjait rendezett számpárokkal, koordinátákkal adjuk meg. A rendezett pár két halmaz egyfajta szorzataként definiálható: a pár első tagja az egyik halmaz eleme, a második a másik halmazé. A sík pontjait a valós számhalmaz önmagával vett szorzata adja.

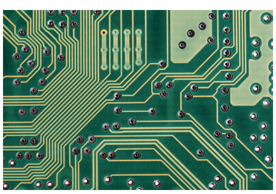
Függvények: A hozzárendelés fogalma is visszavezethető a halmazokra. A függvények úgy határozhatók meg mint rendezett párok nem üres halmaza, amelyeknek az első tagja mind különböző. Az első tagok halmaza a függvény értelmezési tartománya, a második tagok halmaza a függvény értékkészlete.

A halmazelméletben azonban a századfordulón váratlan ellentmondásokkal kellett szembenézniük a matematikusoknak. Az derült ki ugyanis, hogy tetszőlegesen nem lehet halmazt létrehozni.

Erről szól *Bertrand Russell* híres paradoxona 1901-ből. Egy laktanyában senki sem lehet borostás. Aki nem tud borotválkozni, azt a katonaborbély borotválja meg, aki tud, azt nem borotválja meg a katonaborbély. Kérdés: hogy tűnik el a katonaborbély borostája? Ha megborotválja magát, akkor nem borotválhatja meg a katonaborbély, ami ellentmondás, hiszen ez ő maga. Ha nem borotválja meg magát, akkor a katonaborbély borotválja meg, azaz önmaga, tehát újra csak ellentmondás. Bárhogy jár is el, ellentmondásra jutunk. Ez a példa átfogalmazható a halmazok nyelvére. Az ilyen típusú ellentmondások alapjaiban rengették meg az egész, halmazelméletre épülő matematikát, ezért kiküszöbölésük égető volt. Ennek az ellentmondásnak a mélyén az önmagát is tartalmazó halmaz problémája húzódik meg, amelynek a létezését a ma érvényben lévő axiómarendszer kizárja.

A matematikai (vagy más néven *formális*) logika a következtetések szerkezetét vizsgálja matematikai módszerekkel. Formalizál, szabályokat állapít meg, hogy a kijelentésekből újabb kijelentésekre lehessen következtetni. A matematikai logika egyik legnagyobb hatású kijelentése *Kurt Gödel* osztrák matematikus 1931-ből származó tétele, miszerint minden ilyen matematikai rendszer – ha alapjaiban ellentmondásmentes – szükségszerűen tartalmaz megoldhatatlan problémákat.

Kurt Gödel

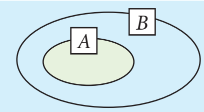
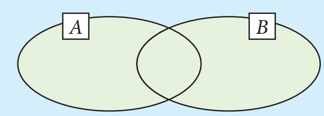
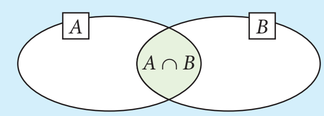
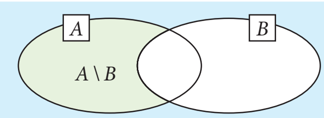
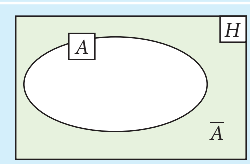


Kezdetben a matematikai logika kifejezetten absztrakt és alapvetően csak a matematikusokat érdeklő elméleti problémákkal foglalkozott. A számítógép és a különböző programozási nyelvek megjelenésével új területen nyert alkalmazást, és észrevétlenül mindennapi életünk részévé vált.

FOGALMAK, TÉTELEK

I. HALMAZOK (Részletesen lásd 9. osztályos tankönyv, 6–9. lecke.)

A **halmazt** alapfogalomnak tekintjük, nem adunk rá meghatározást.

D	Két halmazt **egyenlőnek** mondunk, ha ugyanazok az elemeik.	
D	Ha egy halmaznak nincs eleme, akkor **üres halmaznak** nevezzük.	
D	Egy halmazt **véges halmaznak** nevezünk, ha van olyan szám, amelynél e halmaznak nincs több eleme.	
D	Egy halmazt **végtelen halmaznak** mondunk, ha nem véges. Más szóval: akármekkora számot adunk is meg, a halmaznak ennél az adott számnál is több eleme van.	
D	Akkor mondjuk, hogy egy A halmaz **részhalmaza** egy B halmaznak, ha az A minden egyes eleme egyúttal eleme a B-nek is. Ha egy A halmaz részhalmaza egy B halmaznak, és a B-nek olyan eleme is van, amely nem eleme az A-nak, akkor az A-t a B **valódi részhalmazának** nevezzük.	 $A \subset B$
D	Ha A és B halmaz, akkor azoknak a dolgoknak a halmazát, amelyek A és B közül legalább az egyiknek elemei, az A és a B halmaz **uniójának (egyesítésének)** nevezzük. Jele: $A \cup B$.	 $A \cup B$
D	Ha A és B halmaz, akkor azoknak a dolgoknak a halmazát, amelyek A-nak is és B-nek is elemei, az A és a B halmaz **metszetének (közös részének)** nevezzük. Jele: $A \cap B$.	
D	Két halmazt **diszjunktnak** (idegennek) mondunk, ha nincs közös elemük.	
D	Ha A és B halmaz, akkor azoknak a dolgoknak a halmazát, amelyek az A-nak elemei, de a B-nek nem elemei, az A és a B **különbséghalmazának** nevezzük. Jele: $A \setminus B$.	
D	Ha H egy halmaz, és A ennek egy részhalmaza, akkor a $H \setminus A$ halmazt az A halmaz ***H*-ra vonatkozó kiegészítő** vagy **komplementer halmazának** nevezzük.	

II. LOGIKA (Részletesen lásd 10. osztályos tankönyv, 1–4. lecke.)

D	A logikában azokat a kijelentő mondatokat, amelyekről egyértelműen eldönthető, hogy a tartalmuk igaz vagy nem, ***állításoknak*** (kijelentéseknek) nevezzük. Az *igaz*, illetve a *hamis* megjelölés az állítás **logikai értéke**.
D	Egy A állítás **tagadásának** (*negáltjának*) azt a másik állítást nevezzük, amely akkor és csakis akkor igaz, ha az eredeti állítás hamis. Ennek a jele: $\neg A$.
D	Legyen A és B egy-egy állítás. ***A* vagy *B*** (jelekkel: $A \vee B$) azt az állítást jelenti, amely *igaz*, ha A és B közül legalább az egyik igaz, és *hamis*, ha mind A, mind B hamis. Itt az A és B állítást a **VAGY művelettel** (*diszjunkcióval*) kapcsoltuk össze.
D	Legyen A és B egy-egy állítás. ***A* és *B*** (jelekkel: $A \wedge B$) azt az állítást jelenti, amely *igaz*, ha A is és B is igaz, és minden más esetben *hamis*. Itt az A és B állítást az ÉS művelettel (*konjunkcióval*) kapcsoltuk össze.

A tagadás, a konjunkció és a diszjunkció **logikai műveletek**. E műveletek igazságtáblázata:

Tagadás	
A	$\neg A$
igaz	hamis
hamis	igaz

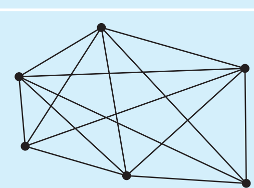
VAGY-*művelet*		
A	B	$A \vee B$
igaz	igaz	igaz
igaz	hamis	igaz
hamis	igaz	igaz
hamis	hamis	hamis

ÉS-*művelet*		
A	B	$A \wedge B$
igaz	igaz	igaz
igaz	hamis	hamis
hamis	igaz	hamis
hamis	hamis	hamis

III. KOMBINATORIKA (Részletesen lásd 11. osztályos tankönyv, 28–34. lecke.)

D	Ha n ($\in \mathbf{N}^+$) különböző elemet valamilyen sorrendbe rakunk, akkor azt mondjuk, hogy megadtuk ezeknek az elemeknek egy **permutációját**.
T	Bármely $n \in \mathbf{N}^+$ esetén n különböző elemnek $n!$ permutációja van. Értelmet adunk az 1! és a 0! jelölésnek is, $1! = 0! = 1$.
D	Ha n ($\in \mathbf{N}^+$) különböző elem közül kiválasztunk k ($\in \mathbf{N}^+$), $k \leq n$ elemet úgy, hogy *mindegyik elem legfeljebb egyszer választható*, akkor ennek a k elemnek egy sorrendjét az adott n elem ***k*-ad osztályú variációjának** nevezzük.
T	Bármely $n, k \in \mathbf{N}^+$ ($k \leq n$) esetén n különböző elem k-ad osztályú variációinak a száma: $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$.
D	Ha n ($\in \mathbf{N}^+$) különböző elem közül kiválasztunk k ($\in \mathbf{N}^+$), $k \leq n$ elemet úgy, hogy *mindegyik elem legfeljebb egyszer választható*, és *nem számít* a kiválasztott elemek sorrendje, akkor megadtuk az n elemnek egy ***k*-ad osztályú kombinációját**.
T	Bármely $n, k \in \mathbf{N}^+$ ($k \leq n$) esetén n különböző elem k-ad osztályú kombinációinak a száma $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$. Ezt a számot $\binom{n}{k}$-val jelöljük.
T	A **binomiális eloszlás** a *visszatevéses mintavételre* vonatkozik, vagyis olyan helyzetre, amikor *ugyanazt a véletlen kísérletet* végezzük el n-szer egymás után. Azt írja le, hogy hányszor következik be egy adott esemény. Annak a valószínűsége, hogy n kísérletből pontosan k-szor történik az adott, p valószínűségű esemény ($k \leq n$; $0 \leq p \leq 1$): $P = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

IV. GRÁFOK (Részletesen lásd 11. osztályos tankönyv, 28. lecke.)

D	Ha véges számú (nem nulla) pont közül egyeseket egymással összekötünk, akkor a kapott ábrát **gráfnak** nevezzük.
D	Egy gráfban a pontokat **csúcsoknak**, az összekötő vonalakat ***éleknek*** nevezzük. Az egyes pontokba futó élek száma a pont **fokszáma**.
D	Ha egy gráfnak n pontja van ($n \in \mathbf{N}^+$), és mindegyik pontjából egy és csakis egy él vezet az összes többi pontba, akkor ezt ***n* pontú teljes gráfnak** nevezzük (1 pont is teljes gráf). 
T	Az n pontú teljes gráf éleinek száma $\frac{n(n-1)}{2}$.
T	Minden gráfban a pontok fokszámának összege az élek számának kétszerese.

44 Halmazokkal kapcsolatos feladatok

FELADAT

1. Jelöld a következő verssorok magánhangzóinak halmazát rendre A-val, B-vel, C-vel, D-vel, illetve E-vel (a hosszú és a rövid magánhangzók között ne tegyél különbséget):

A: *Milyen csonka ma a Hold* – Ady
B: *Ej mi a kő! tyúkanyó,* – Petőfi
C: *Zordon fergetegek rejtik el a napot* – Berzsenyi
D: *Felhőbe hanyatlott a drégeli rom* – Arany
E: *Itt van az ősz, itt van ujra* – Petőfi

a) Írd fel az A, B, C, D és E halmazt az elemei felsorolásával!

b) Vannak-e az A, B, C, D és E között egyenlő halmazok? Ha vannak, melyek ezek?

2. Legyen az A, B, C, D és E halmaz ugyanaz, mint az előző feladatban!

a) Melyik halmaz valódi részhalmaza valamelyik másiknak?

b) Sorold fel az $A \cup C$ és az $A \cap C$ halmaz elemeit!

c) Sorold fel $A \setminus B$ elemeit!

d) Sorold fel $\overline{A}$ elemeit, ha az alaphalmaz a magyar ábécé magánhangzóinak halmaza, és a hosszú és rövid magánhangzók között nem teszünk különbséget!

KIDOLGOZOTT FELADAT

Igaz-e egy tetszőlegesen megválasztott *A, B és C* halmaz esetében, hogy $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$?

Megoldás

Nem igaz, mert ha például $A = C \neq \{\,\}$ és $B = \{\,\}$, akkor $A \setminus (B \setminus C) = A \setminus \{\,\} = A$ és $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus C = \{\,\} \neq A$.

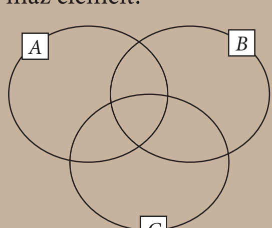
Megjegyzés

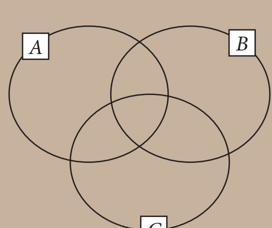
Annak a bizonyítására, hogy egy ilyen típusú („minden” vagy „tetszőleges” esetre kimondott) állítás **hamis**, elegendő egyetlen *ellenpéldát* mutatni. *EllenKIDOLGOZOTT FELADAT* az, amelyben az állítás feltételei teljesülnek, de a belőlük levont következtetés nem egyezik meg az állításban megfogalmazottal.

A példában egy jól megválasztott ellenpéldával igazoltuk, hogy az adott állítás nem igaz egy *tetszőleges* A, B és C halmaz esetében.

FELADAT

3. Jelöld meg a bal oldali ábrán az $A \setminus (B \setminus C)$ halmaz elemeit, a jobb oldali ábrán pedig az $(A \setminus B) \setminus C$ halmaz elemeit!





4. Hány részhalmaza van

a) az egyjegyű pozitív egész számok halmazának;

b) a $\{3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5\}$ halmaznak;

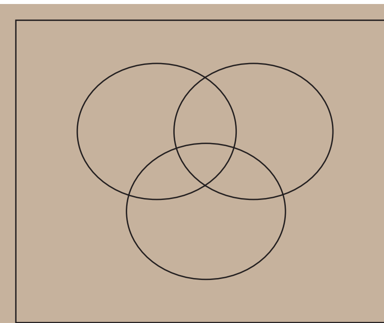
c) az a) és a b) feladatban megadott két halmaz metszetének;

d) az a) és a b) feladatban megadott két halmaz uniójának?

5. Tudjuk, hogy **N**, **Z** és **Q** végtelen halmazok. Döntsd el, hogy az $\mathbf{N} \cap \mathbf{Z}$, $\mathbf{N} \setminus \mathbf{Z}$, $\mathbf{Z} \cup \mathbf{N}$, $\mathbf{Q} \setminus \mathbf{N}$, $\mathbf{Q} \cap \mathbf{N}$ halmazok közül melyik véges és melyik végtelen halmaz!

6. Legyen $H = [-2; 3]$, $K =]3; 5]$ és $L = [3; 4]$.
Add meg a $H \cup K$, $H \cap K$, $K \setminus H$, $L \setminus K$, $K \setminus L$, $H \cap L$ halmazokat, döntsd el, hogy melyik véges és melyik végtelen!

7. Egy gimnáziumi osztály 28 tanulója közül emelt szintű érettségi vizsgát tesz magyarból 6, történelemből 9, matematikából 12 diák. Magyarból is és történelemből is 3-an, matematikából is és történelemből is 4-en vizsgáznak emelt szinten. Olyan diák, aki a magyart és a matematikát is választotta volna, nincs. Az ábra kitöltése segítségével válaszolj: hány olyan tanuló van ebben az osztályban, akik nem tesznek emelt szintű vizsgát



a) sem magyarból, sem matematikából;
b) sem magyarból, sem történelemből;
c) sem történelemből, sem matematikából;
d) sem magyarból, sem történelemből, sem matematikából?

HÁZI FELADAT

1. Határozzuk meg H, K és $K \setminus H$ halmazokat, ha
a) $H \cup K = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $H \cap K = \{1; 5\}$, $H \setminus K = \{\ \}$;
b) $H \cup K = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $H \cap K = \{\ \}$, $H \setminus K = \{1; 2; 5\}$;
c) $H \cup K = [-2; 2]$, $H \cap K =]-1; 1[$, $H \setminus K = [-2; -1]$;
d) $H \cup K = [-3; 1]$, $H \cap K = \{0\}$, $H \setminus K = \{1\}$!

2. Jelöld A-val a kétjegyű pozitív páros számok halmazát, B-vel az 50-nél kisebb, 3-mal osztható pozitív egész számok halmazát!

A halmaz	A	B	$A \cup B$	$A \cap B$	$A \setminus B$	$B \setminus A$
Elemeinek száma						

3. Jelöld egy konferencia magyarul, angolul, illetve franciául beszélő résztvevőinek a halmazát A-val, B-vel, illetve C-vel!
a) Kik tartoznak az $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ halmazba?
b) Hogyan írhatnánk fel egyszerűbben az a) feladatban megadott halmazt?
c) Mit jelent az, hogy $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = \{\ \}$?

4. Legalább hány, illetve legfeljebb hány eleme lehet
a) egy 6 elemű és egy 10 elemű halmaz uniójának;
b) egy 6 elemű és egy 10 elemű halmaz metszetének?
A kérdésekre adott válaszaidat szemléltesd egy-egy Venn-diagrammal!

45 Igaz vagy hamis?

FELADAT

1. Döntsd el az alábbi állítások mindegyikéről, hogy igaz vagy hamis! Fogalmazd meg mindegyik állítás tagadását is, és ezekről is állapítsd meg, hogy igazak vagy hamisak!

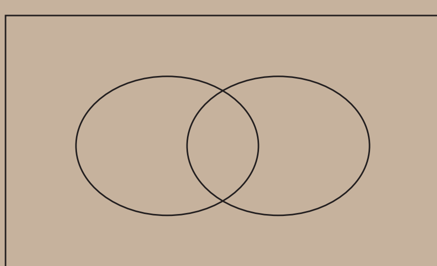
a) Minden nullára végződő természetes szám osztható 5-tel.

b) Minden prímszám páratlan.

c) Van páros prímszám.

d) Van olyan prímszám, amelyik nem osztható 3-mal.

2. Egy 30 fős érettségiző osztályban 16 tanulónak van középfokú nyelvvizsgája angol nyelvből vagy francia nyelvből, közülük 3 tanulónak mindkét nyelvből, 9 tanulónak csak angolból.



a) Hány tanulónak nincs középfokú nyelvvizsgája sem angolból, sem franciából?

b) Hány tanulónak van francia nyelvből középfokú nyelvvizsgája?

c) Hányféleképpen választható ki az osztály tanulói közül három úgy, hogy legalább kettőnek legyen angol vagy francia középfokú nyelvvizsgája?

d) Hány tanulót kell véletlenszerűen kiválasztani ahhoz, hogy közöttük legalább egynek biztosan legyen középfokú angol nyelvvizsgája?

3. Az n egész számra vonatkozik a $-8 \leq n < 10$ állítás. Ugyanez kifejezhető úgy is, hogy két állítást összekapcsolunk egy logikai művelettel. Melyik ez a két állítás, illetve melyik ez a logikai művelet?

4. Legyen A az $25x^2 - 4 = 0$ egyenlet megoldáshalmaza, B pedig a $13 - 4x = 0$ egyenlet megoldáshalmaza.

Az A, B, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ halmazok közül melyik megoldáshalmaza az alább megadott egyenleteknek?

a) $(13 - 4x)(25x^2 - 4) = 0$;

b) $\dfrac{13 - 4x}{25x^2 - 4} = 0$;

c) $(13 - 4x)^2 + (25x^2 - 4)^2 = 0$.

5. Adottak a következő halmazok:

A halmaz	$x - 7 > 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza
B halmaz	$x - 7 < 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza
C halmaz	$2 - x > 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza
D halmaz	$2 - x < 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza

Ábrázold számegyenesen az $\dfrac{x-7}{2-x} < 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát, majd add meg ezt a halmazt az A, B, C, D halmazok és halmazműveletek segítségével is!

6. Döntsd el az alábbi állítások mindegyikéről, hogy igaz-e vagy hamis!

a) Ha két szám egyenlő, akkor a számok négyzete is egyenlő.

b) A kettes számrendszerben felírt 10110 szám a tízes számrendszerben 20.

c) A nyolcoldalú konvex sokszögnek 8 átlója van.

HÁZI FELADAT

1. Döntsd el az alábbi állítások mindegyikéről, hogy igaz vagy hamis! Fogalmazd meg mindegyik állítás megfordítását is, majd ezekről is állapítsd meg, hogy igazak vagy hamisak!

a) Ha egy négyszög téglalap, akkor a négyszög átlói egyenlő hosszúak.

b) Ha egy négyszög deltoid, akkor a négyszög átlói kölcsönösen felezik egymást.

c) Ha egy négyszög átlói kölcsönösen felezik egymást, akkor a négyszög téglalap.

d) Ha egy négyszög átlói kölcsönösen felezik egymást, akkor a négyszög paralelogramma.

2. A következő állítások egy pozitív egész számra vonatkoznak. Mit jelent az $A \vee B$, és mit az $A \wedge B$ állítás?

	A állítás	*B* állítás
a)	egyjegyű szám	kisebb 15-nél
b)	a 12 többszöröse	a 8 többszöröse
c)	kisebb 135-nél	5-re végződik
d)	a négyzete kisebb 15-nél	nagyobb (–3)-nál

3. Folytasd az előző feladatot! Az A, a B, az $A \vee B$ és az $A \wedge B$ közül mely állításoknak felel meg véges számú pozitív egész szám?

4. A megadott lehetőségek közül válaszd ki az alábbi állításokkal egyenértékű állításokat!

a) Nem mindenki mentesül az adófizetés alól.
– Mindenkinek kell adót fizetnie.
– Van, akinek kell adót fizetnie.
– Senkinek sem kell adót fizetnie.

b) Karácsonyra nem kapok iPhone-t, vagy nem kapok biciklit.
– Karácsonyra kaphatok iPhone-t.
– Karácsonyra biztosan nem kapok iPhone-t és biciklit is.
– Ha nem kapok karácsonyra biciklit, biztosan kapok egy iPhone-t.

5. Legyenek az A, B, C és D halmazok a lecke 5. feladata szerint megadva.
Ábrázold számegyenesen az $\frac{x-7}{2-x} > 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát, majd add meg ezt a halmazt az A, B, C, D halmazok és halmazműveletek segítségével is!

RÁADÁS

Korábbi érettségi feladatok:

1. *(Középszintű érettségi, 2016. május)* Egy fiókban néhány sapka van. Tekintsük a következő állítást:
„A fiókban minden sapka fekete.”
Válassza ki az alábbiak közül az összes állítást, amely tagadása a fentinek!
A: A fiókban minden sapka fehér.
B: A fiókban nincs fekete sapka.
C: A fiókban van olyan sapka, amely nem fekete.
D: A fiókban nem minden sapka fekete.

2. *(Középszintű érettségi, 2013. október)* Tamás a saját felmérése alapján a következőt állítja: *Minden háztartásban van televízió.* Az alábbi négy állítás közül válassza ki azt a kettőt, amely Tamás állításának tagadása!

a) Semelyik háztartásban nincs televízió.

b) Van olyan háztartás, ahol van televízió.

c) Van olyan háztartás, ahol nincs televízió.

d) Nem minden háztartásban van televízió.

46 Kombinatorika és gráfelmélet

KIDOLGOZOTT FELADAT

Hány olyan 5 jegyű szám van, amelynek mindegyik számjegye nagyobb, mint a rákövetkező?

Megoldás

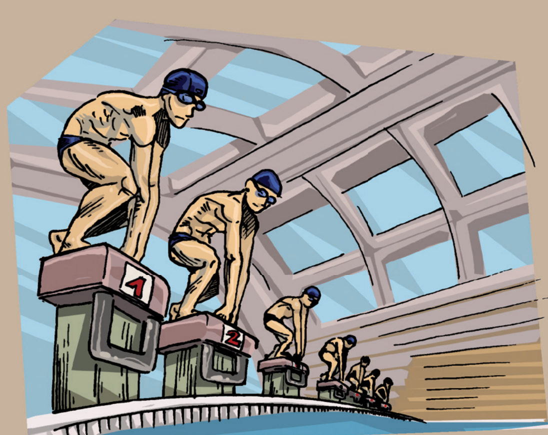
A keresett számok nyilván 5 különböző számjegyet tartalmaznak, a legkisebb számjegy az egyes helyiértéken áll. Ha 5 különböző számjegyet tekintünk, akkor ezekből egyetlen olyan ötjegyű számot tudunk képezni, amely a követelményeknek megfelel (például a 4, 8, 0, 7, 3 számjegyekből a 87 430 számot). Pontosan annyi megfelelő ötjegyű szám van tehát, ahányféleképpen a 10 számjegy közül 5 különbözőt ki tudunk választani. Ez pedig $\binom{10}{5} = 252$ lehetőséget jelent.

Emlékezz!

Az $\binom{n}{k}$ kifejezés a zsebszámológépek nCr feliratú gombjával közvetlenül kiszámolható.

FELADAT

1. Egy úszóverseny döntőjében 8-an vesznek részt. Hányféle sorrend lehetséges, ha azonos idők nem fordulnak elő?



2. Sorba rakunk 4 piros és 2 kék sapkát, az azonos színű sapkák között nem teszünk különbséget.

a) Szemléltesd fagráffal azokat az eseteket, amikor az első sapka kék! Hány ilyen sorrendet találtál?

b) Szemléltesd fagráffal azokat az eseteket, amikor az első sapka piros! Hány ilyen sorrendet találtál?

c) Hányféleképpen rakhatjuk sorba ezt a 6 sapkát?

3. Négy testvér külföldre utazott, ott megismerkedtek egy korábban számukra ismeretlen hattagú család tagjaival.

a) Hány kétoldalú ismeretség volt e tíz személy között az utazás előtt, illetve az utazás után?

b) Fogalmazd meg gráfokkal az előző kérdést!

4. Hány olyan 5 jegyű szám van, amelynek

a) egyik jegye sem 0;

b) mindegyik jegye páratlan;

c) mindegyik jegye páros;

d) mindegyik jegye különböző?

5. Hány olyan 5 jegyű szám van, amelynek mindegyik számjegye kisebb, mint a rákövetkező?

6. Egy ládában 150 alkatrész van, közülük 10 selejtes. Kiveszünk egyszerre 9 alkatrészt. Hányféleképpen fordulhat elő, hogy közöttük

a) nincs selejtes;

b) 7 jó és 2 selejtes van;

c) ugyanannyi a jó, mint a selejtes;

d) csupa selejtes van?

7. Az 5-ös lottó egyik szelvényén a 10, 20, 30, 40, 90 számokat jelöljük meg. Hányféle olyan húzás lehet, amely esetén

a) pontosan 3 találatunk van;

b) legalább 3 találatunk van?

HÁZI FELADAT

1. Egy ház lakói közül mindenki az év más-más napján ünnepli a születésnapját.
Hányan lakhatnak ebben a házban, ha nincs két olyan lakó, aki egymás melletti napokon ünnepel?

2. Feldobunk egyszerre egy fekete és egy fehér szabályos dobókockát. Hányféleképpen fordulhat elő, hogy a dobott pontok összege

a) 10; **b)** legalább 10; **c)** legfeljebb 10?

3. Az Arany család 6 tagja egymás mellé szóló színházjegyeket kapott. Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha Csilla a dédmama mellett szeretne ülni?

4. Van-e olyan 4 pontú *egyszerű* gráf, amelyben a pontok fokszáma

a) 0, 0, 0, 0; **c)** 1, 2, 2, 3;
b) 0, 0, 1, 2; **d)** 2, 3, 4, 5?

Ha van ilyen, rajzold le! (Az *egyszerű gráfban* nincs *többszörös* él, és nincs *hurokél* sem.)

5. Egy 32 lapos magyarkártya-csomagból véletlenszerűen kiválasztunk 6 lapot. Hányféleképpen fordulhat elő, hogy a kiválasztott lapok között

a) pontosan 3 makk és pontosan 2 hetes van;
b) pontosan 3 makk és pontosan 4 hetes van;
c) nincs sem makk, sem hetes, sem nyolcas?

RÁADÁS

Korábbi érettségi feladatok:

1. *(Középszintű érettségi, 2007. május)* A városi középiskolás egyéni teniszbajnokság egyik csoportjába hatan kerültek: András, Béla, Csaba, Dani, Ede és Feri. A versenykiírás szerint bármely két fiúnak pontosan egyszer kell játszania egymással. Eddig András már játszott Bélával, Danival és Ferivel. Béla játszott már Edével is. Csaba csak Edével játszott, Dani pedig Andráson kívül csak Ferivel. Ede és Feri egyaránt két mérkőzésen van túl.

a) Szemléltesse gráffal a lejátszott mérkőzéseket!
b) Hány mérkőzés van még hátra?
c) Hány olyan sorrend alakulhat ki, ahol a hat versenyző közül Dani az első két hely valamelyikén végez?

2. *(Középszintű érettségi, 2013. május)* Egy futóverseny döntőjébe hat versenyző jutott, jelöljük őket *A*, *B*, *C*, *D*, *E* és *F* betűvel. A cél előtt pár méterrel már látható, hogy *C* biztosan utolsó lesz, továbbá az is biztos, hogy *B* és *D* osztozik majd az első két helyen. Hányféleképpen alakulhat a hat versenyző sorrendje a célban, ha nincs holtverseny? Válaszát indokolja!

3. *(Középszintű érettségi, 2016. május)* Zsófi gyertyákat szeretne önteni, hogy megajándékozhassa a barátait. Öntőformának egy négyzet alapú szabályos gúlát választ.
Az elkészült gúla alakú gyertyák lapjait szeretné kiszínezni. Mindegyik lapot (az alaplapot és az oldallapokat is) egy-egy színnel, kékkel vagy zölddel fogja színezni.
Hányféle különböző gyertyát tud Zsófi ilyen módon elkészíteni?
(Két gyertyát különbözőnek tekintünk, ha forgatással nem vihetők egymásba.)

47 Kísérletezzünk, kombináljunk!

FELADAT

1. Feldobunk egyszerre egy fekete és egy fehér szabályos dobókockát.

a) Hányféle eredményt kaphatunk?

b) Hányféleképpen kaphatunk a két kockán különböző pontszámokat?

c) Igaz-e, hogy az esetek felében a fehér kockán nagyobb szám lesz, mint a feketén? Miért?

2. Tíz kempingező beosztotta, hogy egyikük mindennap vásárol, másikuk főz, harmadikuk mosogat. Hányféle lehet egy napon a beosztás?

3. Egy kerékpáros lámpában 5 LED (LED = világításra képes dióda) van. A LED-ek egymástól függetlenül működhetnek, legalább egy LED mindig világít.

a) Hány különböző módon világíthat a lámpa, ha két világítást akkor tekintünk különbözőnek, ha nem ugyanazok a LED-ek világítanak?

b) Hány lehetőség van akkor, ha mindegyik LED fehéren vagy zölden világíthat?

4. Hányféleképpen választható ki 34 diák közül 30, ha a kiválasztottak közül ketten 50 000 Ft, a többiek 15 000 Ft jutalmat kapnak?

5. Négy város (*A*, *B*, *C* és *D*) között a közösségi közlekedési lehetőségeket a következő táblázat foglalja össze:

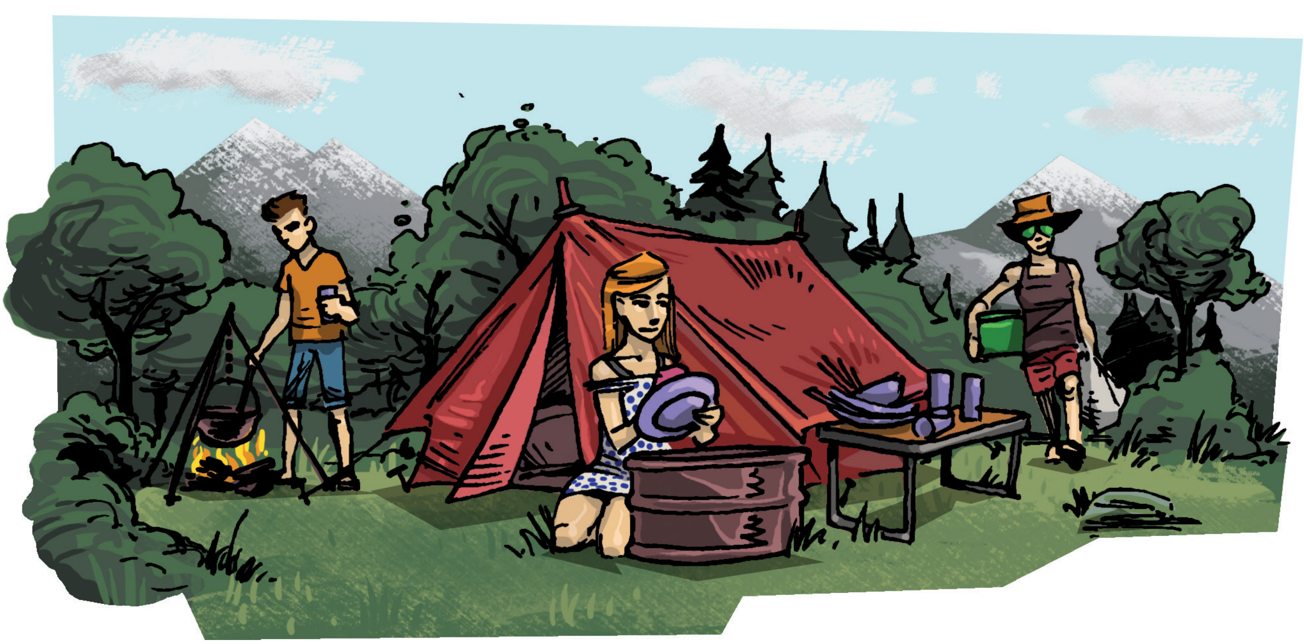
	D	C	B
A	busz	–	busz
B	busz, vonat	busz	
C	busz, vonat, személyhajó		busz

(A táblázatban feltüntetett közlekedési eszközök kétirányúak, és nem érintik a többi várost.)
Készíts gráfot a feladatról!
Hányféle különböző módon lehet

a) *A*-ból *D*-be;

b) *C*-ből *A*-ba

eljutni, ha az utazás során a már érintett városba nem megyünk vissza?



HÁZI FELADAT

1. Egy pénzdarabot 12-szer feldobunk, a „fej" dobását F-fel, az „írás" dobását I-vel jelöljük. Egymás után felírjuk a dobások eredményét.

a) Hányféle betűsort kaphatunk?
b) Hány esetben áll csupa fejből ez a sorozat?
c) Hány olyan eset van, amikor az első és az utolsó dobás is fej?

2. Egy ládában 150 alkatrész van, közülük 10 selejtes.

a) Kiveszünk egy alkatrészt, felírjuk, hogy jó vagy selejtes, majd visszatesszük. Ezt az eljárást 10-szer megismételjük. Hányféleképpen fordulhat elő, hogy pontosan 8 jó és 2 selejtes alkatrészt választunk?
b) Kiveszünk egyszerre 10 alkatrészt. Hányféleképpen fordulhat elő, hogy pontosan 8 jó és 2 selejtes alkatrészt választottunk?

3. Tudjuk, hogy az élek mentén a fagráf bármely pontjából el lehet jutni bármelyik másik pontjába, de csak egyféleképpen.
Rajzold le az összes lehetséges („lényegesen különböző")

a) 3 pontú; **c)** 5 pontú;
b) 4 pontú; **d)** 6 pontú

fagráfot, és sorold fel mindegyik esetben a csúcsok fokszámát is!

4. Hány olyan 3 jegyű szám van, amelyben legfeljebb a 0, 2, 4, 5 számjegyek szerepelhetnek?

5. Egy dobókockát egymás után háromszor feldobunk. Ha a dobások sorrendjét is figyelembe veszszük, hányféleképpen fordulhat elő, hogy

a) mindegyik esetben ugyanazt a számot dobjuk;
b) három különböző számot dobunk;
c) a három szám között pontosan kettő ugyanaz;
d) a dobott pontok összege 16?

RÁADÁS

Korábbi érettségi feladatok:

1. *(Középszintű érettségi, 2011. október)*

a) Hány olyan négy különböző számjegyből álló négyjegyű számot tudunk készíteni, amelynek mindegyik számjegye eleme az {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7} halmaznak?
b) Hány 4-gyel osztható hétjegyű szám alkotható az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből?
c) Hány olyan hatjegyű, hárommal osztható szám írható fel, amely csak az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyeket tartalmazza, és e számjegyek mindegyike legalább egyszer előfordul benne?

2. *(Középszintű érettségi, 2006. február)* Egy szellemi vetélkedő döntőjébe 20 versenyzőt hívnak be. A zsűri az első három helyezettet és két további különdíjast fog rangsorolni. A rangsorolt versenyzők oklevelet és jutalmat kapnak.

a) Az öt rangsorolt versenyző mindegyike ugyanarra a színházi előadásra kap egy-egy jutalomjegyet. Hányféle kimenetele lehet ekkor a versenyen a jutalmazásnak?
b) A dobogósok három különböző értékű könyvutalványt, a különdíjasok egyike egy színházjegyet, a másik egy hangversenyjegyet kap. Hányféle módon alakulhat ekkor a jutalmazás?
c) Ha már eldőlt, kik a rangsorolt versenyzők, hányféle módon oszthatnak ki nekik jutalmul öt különböző verseskötetet?
d) Kis Anna a döntő egyik résztvevője. Ha feltesszük, hogy a résztvevők egyenlő eséllyel versenyeznek, mekkora a valószínűsége, hogy Kis Anna eléri a három dobogós hely egyikét, illetve hogy az öt rangsorolt személy egyike lesz?

Statisztika, valószínűségszámítás

A XXI. század emberének életét behálózzák az adatok és az információk. Ahhoz, hogy a modern társadalom tagjai a mindennapokban vagy a foglalkozásukban eligazodjanak, ismerniük kell a **statisztika** eszközeit, meg kell érteniük a szakemberek adatgyűjtő, rendszerező, elemző munkájának eredményeit, hogy ezekből a maguk számára használható következtetéseket vonhassanak le.

A társadalomra, a gazdaságra, a politikára vagy más témákra vonatkozó adatok egy részét az állampolgárok, gazdasági és egyéb szervezetek szolgáltatják az államnak, más részük gyűjtése nyilatkozatok, felmérések alapján történik, általában nem is a teljes körre, csak bizonyos *mintára* vonatkozóan. Ahhoz, hogy ez utóbbiakból is viszonylag helyes következtetéseket lehessen levonni, „jó” módszereket kell kidolgozni az adatok gyűjtésére, azok értékelésére és arra, **hogyan terjesszék ki a mintából szerzett tapasztalatokat a szóban forgó teljes halmazra**. Újabb tudományos problémákat vetett fel az adatok sokaságából levont következtetések *valóságértéke*. Tudni kell, mennyire „pontosak” az adatok, számolni kell azzal, hogy mennyire valószínűek a belőlük levont következtetések.

A fentiek miatt vált századunkban a **valószínűségszámítás** a mindennapok tudományává. Ez a matematikai fejezet alig négy-ötszáz esztendős. Kezdetben egyes szerencsejátékok nyerési esélyeit vizsgálta, nem kevés sikerrel. Éppen az itt felfedezett stratégiák révén jutott el a világ számos gazdaságilag, társadalmilag fontos felfedezéshez.

FOGALMAK, TÉTELEK

I. STATISZTIKA
(Részletesen lásd 9. osztályos tankönyv, 40–43. lecke, illetve 12. osztályos tankönyv, 36–45. lecke.)

D	Ha egy véges adatsokaságot alkotó számok a_1; a_2; … a_n, akkor ezek átlaga $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$. Véges sok szám átlaga (számtani közepe) az a szám, amelyet ha mindegyik szám helyére beírunk, ezek összege nem változik meg.
D	Ha egy véges számsokaságban van *egy* olyan szám, amely a legtöbbször fordul elő, akkor ezt a számot az adatsokaság **móduszának** nevezzük. Ha több ilyen szám van, akkor **móduszok halmazáról** beszélünk.
D	Ha egy véges számsokaságnak páratlan számú eleme van, és az adatokat növekedő sorrendben írjuk fel, akkor a középső számot az adatsokaság **mediánjának** nevezzük. Ha egy véges számsokaságnak páros számú eleme van, és az adatokat növekedő sorrendben írjuk fel, akkor a két középső számnak az átlagát a adatsokaság **mediánjának** nevezzük. (A növekedő sorrend azt jelenti, hogy egyik szám sem kisebb az előtte lévőnél.)
D	Egy véges adatsokaság legnagyobb és legkisebb elemének különbségét az adatsokaság **terjedelmének** nevezzük.
D	Ha egy véges adatsokaságot alkotó számok a_1; a_2; … a_n, és ezek átlaga A, akkor az adatsokaság átlagtól való **átlagos abszolút eltérése** $\frac{\lvert a_1 - A\rvert + \lvert a_2 - A\rvert + \ldots + \lvert a_n - A\rvert}{n}$.
D	Ha egy véges adatsokaságot alkotó számok a_1, a_2, … a_n, és ezeknek az átlaga A, akkor az adatsokaság **szórása (szóródása)** $\sqrt{\frac{(a_1 - A)^2 + (a_2 - A)^2 + \ldots + (a_n - A)^2}{n}}$.

II. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS (Részletesen lásd 11. osztályos tankönyv, 35–40. lecke.)

D	Ha egy kísérlet eredményét a tekintetbe vett körülmények nem határozzák meg egyértelműen, akkor ezt a kísérletet **véletlen kísérletnek**, az eredményét **véletlen eseménynek** mondjuk.
D	Ha az n számú kísérletből álló kísérletsorozatban egy esemény k-szor következett be, akkor azt mondjuk, hogy ennek az eseménynek a **gyakorisága** k, a **relatív gyakorisága** $\frac{k}{n}$ (k és n természetes szám, $n \geq k$).
D	Azt az eseményt, amely egy kísérletsorozat folyamán minden egyes kísérletnél megvalósul, **biztos eseménynek** nevezzük. A biztos esemény valószínűsége 1.
D	Azt az eseményt, amely egy kísérletsorozat folyamán egyik kísérletnél sem valósulhat meg, **lehetetlen eseménynek** nevezzük. A lehetetlen esemény valószínűsége 0.
D	Két eseményt **egymást kizárónak** mondunk, ha egyetlen kísérletnél sem következhet be mindkettő.
D	Ha két esemény olyan, hogy egy kísérletsorozatban minden egyes kísérletnél az egyik és csak az egyik valósul meg, akkor ezeket az adott kísérletre vonatkozóan egymás **kiegészítő (komplementer) eseményének** nevezzük.
D	Legyen A és B valamely véletlen kísérletsorozatra vonatkozó egy-egy esemény. Azt az eseményt nevezzük az A és a B – **összegének**, amely akkor és csak akkor valósul meg, ha A vagy B megvalósul (jele: $A + B$); – **szorzatának**, amely akkor és csak akkor valósul meg, ha A is és B is megvalósul (jele: $A \cdot B$).
D	Ha egy kísérletnek véges számú kimenetele lehet, akkor ezeket az adott kísérletre vonatkozóan **elemi eseményeknek** nevezzük. Egy véletlen kísérlet elemi eseményei egymást páronként kizárják, összegük a biztos esemény.
D	Egy véletlen kísérlet során mindegyik kimenetelhez (elemi eseményhez) egy-egy nemnegatív számot rendeltünk hozzá, és azt mondtuk, hogy ez a szám a lehetséges kimenetel **esélye**, más szóval **valószínűsége**.
T	Ha egy véletlen kísérletnél *véges számú, egyenlően valószínű* elemi esemény van, akkor a **klasszikus valószínűségszámítási modell** szerint úgy kapjuk meg egy esemény valószínűségét, hogy a *kedvező* elemi események számát elosztjuk az **összes** elemi esemény számával: $\frac{\text{kedvező elemi események száma}}{\text{összes esemény száma}}$.

48 Adatok, táblázatok

FELADAT

1. Egy középiskola évfolyamonként három osztályt indít: egy speciális nyelvi, egy speciális matematika és egy speciális informatikai osztályt. Az egyes évfolyamokon az egyes osztályokba járó tanulók számát a táblázat szemlélteti:

	9. évfolyam	10. évfolyam	11. évfolyam	12. évfolyam	
Nyelvi osztály	36	33	30	28	
Matematika osztály	34	33	29	31	
Informatikai osztály	35	34	34	30	

Mennyi a valószínűsége, hogy a folyosón szembejövő első diák:

a) a 10. évfolyam nyelvi osztályába jár;

b) 11.-es;

c) nem matematika tagozatos;

d) 12.-es vagy informatikai osztályba jár?

2. Egy népszavazáson arról dönthettek a szavazók, hogy városukban park, bevásárlóközpont vagy hangversenyterem épüljön; a három lehetőség közül mindenki egyet választhatott. A lakosság 54,6%-a szavazott, a szavazata mindenkinek érvényes volt. A szavazás eredményének néhány részletét életkori csoportok szerint mutatjuk be:

Korcsoport	A szavazók száma (ezer fő)	Parkra szavazott	Bevásárlóközpontra szavazott	Hangversenyteremre szavazott
18–27	21	27%	57%	
28–37	32	48%		15%
38–47	28	15%	53%	
48–57	35		25%	25%
58–67	16	24%	50%	
68 évtől	45		30%	26%

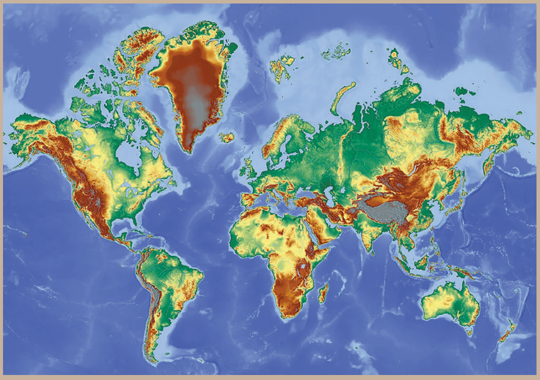
a) Hány lakosa van ennek a városnak?

b) Melyik terv nyerte meg a népszavazást?

c) Hányan szavaztak az egyes tervekre az 57 évnél idősebbek közül?

3. A következő táblázat egy multinacionális cég bevételeit mutatja földrészek szerinti bontásban, millió dollárban, két egymás utáni évben.

Év	Afrika	Amerika	Ázsia	Európa
1999	8,4	12,2	15,6	23,8
2000	5,5	6,7	13,2	19,6



a) Rajzolj mindkét évről egy-egy kördiagramot (a középponti szögek feltüntetésével)!

b) Értékeld a cég két évét, a változásokat!

4. Egy nagyvállalat vezetősége életkori csoportok szerint szeretné rendszerezni a felsőfokú végzettségű dolgozóinak a számát és az arányait.

Életkor	Létszám	A diplomás dolgozók	
		relatív gyakorisága	gyakorisága
20 év alatt	420	0	
20–29	3645	0,75	
30–39	5280	0,53	
40–49	7013	0,32	
50–59	4339	0,42	
60 évtől	2106	0,95	

a) Hányan dolgoznak ennél a vállalatnál?
b) Töltsd ki az üresen maradt rovatokat!
c) Mennyi a dolgozók között a diplomások relatív gyakorisága?
d) Mennyi a diplomások relatív gyakorisága a legalább 50 évesek között?
e) Mennyi a diplomások relatív gyakorisága a 30 év alattiak között?
f) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott dolgozó 30 és 49 év közötti diplomás?

HÁZI FELADAT

1. Egy középiskola 582 diákja közül 120-an kollégisták, 373-an helyben laknak, a többiek bejárók.

	Helyben lakók	Kollégisták	Bejárók
Létszám	373	120	
Félévi átlageredmény	3,11	4,12	3,78

a) Mennyi volt a tanulók félévi átlageredménye?
b) Mennyi a három csoportot tekintve az átlagtól mért átlagos abszolút eltérés?
c) Mennyit kellene év végéig javítaniuk a helyben lakóknak, hogy a másik két csoport változatlan eredménye mellett az iskola átlaga elérje a 3,5-et?

2. Egy élelmiszer-áruház reprezentatív felmérés keretében arról kérdezte meg vásárlóit, hogy van-e törzsvásárlói kártyájuk, illetve hogy igénybe veszik-e az áruház által felkínált kuponokat. A válaszadók 60%-ának van törzsvásárlói kártyája, 25%-uk használja a kuponokat. A felmérésben részt vevők 12%-a válaszolt igennel mindkét kérdésre.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott vásárló használja a fenti két kedvezmény valamelyikét?
b) Az áruház becslése szerint körülbelül 10-12 ezer rendszeres vásárlójuk lehet. Közülük hányan nem élnek a fenti lehetőségek egyikével sem?

49 Valószínűségek

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy középiskolában két végzős (12-es) osztály van. A 12. A osztályba 11 lány és 13 fiú, a 12. B osztályába 15 lány és 10 fiú tanuló jár.

a) A 12. A osztály és a 12. B osztály is véletlenszerűen kijelöl egy-egy diákot arra, hogy a ballagási ünnepségen az osztályuk nevében elmondja a búcsúzó beszédet. Mekkora annak a valószínűsége, hogy mindkét tanuló lány?

b) Egy újságíró interjút készít az érettségiről. Véletlenszerűen kiválaszt két végzős diákot. Mekkora a valószínűsége, hogy mindkét tanuló lány?

Megoldás

a) Az A osztály létszáma 24 fő, a B osztályé pedig 25 fő. A beszéd megtartására összesen $24 \cdot 25 = 600$ különböző módon választhatnak a két osztályból egy-egy diákot. Az A osztályból 11-féleképpen, a B-ből 15-féleképpen választhatnak lányt, vagyis a két lány választására $11 \cdot 15 = 165$ különböző lehetőségük van.

A kérdezett valószínűség tehát $\frac{165}{600} = \frac{11}{40} = 0{,}275$.

b) Az újságíró a 49 tanuló közül választ ki kettőt, tehát az egyenlően valószínű lehetőségek száma: $\binom{49}{2} = 1176$.

A két osztályban összesen 26 lány van, közülük bármelyik kettő egyenlő valószínűséggel választható, tehát a kedvező esetek száma $\binom{26}{2} = 325$, a kérdezett valószínűség pedig $\frac{325}{1176} \approx 0{,}276$.

FELADAT

1. Folytasd a Kidolgozott feladatot! Mekkora annak a valószínűsége, hogy a ballagási búcsúzó beszédre kiválasztott tanulók közül

a) mindkét tanuló fiú;

b) a 12. A osztály fiút jelöl, a 12. B lányt;

c) egyikük lány, másikuk fiú?

2. Folytasd a Kidolgozott feladatot! Mekkora annak a valószínűsége, hogy az újságíró által véletlenszerűen kiválasztott két diák közül

a) mindkét tanuló B osztályos;

b) mindkét tanuló ugyanabba az osztályba jár;

c) a két tanuló különböző nemű, a fiú az A osztályba jár, a lány pedig a B osztályba;

d) a két tanuló különböző nemű;

e) a két tanuló azonos nemű?

3. Papírlapokra írjuk egyenként az összes olyan 3 jegyű számot, amelyben a 0, 2, 4, 5 számjegyek szerepelhetnek, de mindegyik legfeljebb egyszer.

a) Hány papírlapra van szükségünk?

Kiveszünk találomra egyet a lapok közül. Mennyi a valószínűsége, hogy a lapra írt szám

b) első jegye 5;

c) 5-tel osztható;

d) 4-gyel osztható;

e) 3-mal osztható?

4. Oldd meg a 3. feladatot azzal a változtatással, hogy az összes olyan háromjegyű számot írjuk fel a lapokra, amelynek minden számjegye eleme a {0; 2; 4; 5} halmaznak!

5. Feldobunk egyszerre egy piros és egy fehér szabályos dobókockát.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

a) Hányféleképpen kaphatunk a két kockán különböző pontszámokat?

b) Mekkora a valószínűsége, hogy a fehér kockán nagyobb szám lesz, mint a piroson?

6. Egy dobókockát egymás után háromszor feldobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy
a) mindegyik esetben ugyanazt a számot dobjuk;
b) három különböző számot dobunk;
c) a három szám között pontosan kettő ugyanaz;
d) a dobott pontok összege 16?

HÁZI FELADAT

1. Találomra kiválasztunk egy kétjegyű számot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ennek mindkét számjegye kisebb 4-nél?

2. Találomra kiválasztunk egy négyjegyű számot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ennek
a) egyik jegye sem 5;
b) legalább egy jegye 5;
c) pontosan egy jegye 5?

3. Egy pénzdarabot 12-szer feldobunk, a „fej” dobását F-fel, az „írás” dobását I-vel jelöljük. Egymás után felírjuk a dobások eredményét.

a) Hányféle betűsort kaphatunk?
b) Mekkora a valószínűsége, hogy csak fejekből áll majd a sorozat?
c) Mekkora a valószínűsége, hogy az első és az utolsó dobás is fej?
d) Mekkora a valószínűsége, hogy pontosan a dobások fele lesz fej, a másik fele pedig írás?

4. Egy dobozban 2 piros és 5 fehér golyó van. Véletlenszerűen kihúzunk három golyót. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a három kiválasztott golyó között
a) nincs fehér;
b) nincs piros;
c) egy piros van;
d) egy fehér van?

RÁADÁS

Korábbi érettségi feladat:

1. *(Középszintű érettségi, 2010. október)* Egy kockajátékban egy menet abból áll, hogy szabályos dobókockával kétszer dobunk egymás után. Egy dobás 1 pontot ér, ha négyest vagy ötöst dobunk, egyébként a dobásért nem jár pont. A menetet úgy pontozzák, hogy a két dobásért járó pontszámot összeadják.
a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy menetben 1 pontot szerzünk, és azt az első dobásért kapjuk?
b) Minek nagyobb a valószínűsége:
– annak, hogy egy menetben szerzünk pontot, vagy
– annak, hogy egy menetben nem szerzünk pontot?

2. *(Középszintű érettségi, 2016. május)* Zsófi gyertyákat szeretne önteni, hogy megajándékozhassa a barátait. Öntőformának egy négyzet alapú szabályos gúlát választ. A gyertyák öntéséhez három különböző fajta „varázskanócot” használ. Mindegyik fajta „varázskanóc” fehér színű, de meggyújtáskor (a benne lévő anyagtól függően) az egyik fajta piros, a másik lila, a harmadik narancssárga lánggal ég.
Zsófi hétfőn egy dobozba tesz 6 darab gyertyát, mindhárom fajtából kettőt-kettőt. Keddtől kezdve mindennap véletlenszerűen kivesz egy gyertyát a dobozból, és meggyújtja. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy Zsófi az első három nap három különböző színű lánggal égő gyertyát gyújt meg!

50 Mintavétel

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy hosszú idő óta forgalmazott gyógyszer esetében nagyon sok megfigyelés alapján úgy tapasztalták, hogy mindössze 3% annak valószínűsége, hogy a gyógyszer szedése közben valamilyen mellékhatás lépjen fel. Ha a gyógyszerrel kezelt betegek közül 100 alkalommal megvizsgálnak egy-egy véletlenszerűen kiválasztott beteget, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy

a) egyik esetben sem;

b) éppen három esetben;

c) háromnál kevesebb esetben

voltak tapasztalhatók a mellékhatások?

Megoldás

11. osztályban tanultunk arról, hogy ha egy véletlen kísérletet többször elvégzünk egymás után, akkor hogyan számítható ki annak a valószínűsége, hogy megadott számú esetben következik be egy adott esemény (*binomiális* eloszlás).

a) 0,97 annak a valószínűsége, hogy egy kiválasztott betegnél nem tapasztalható mellékhatás. Ha a kiválasztást 100 alkalommal ismételjük, akkor a kérdezett valószínűség $0{,}97^{100} \approx 0{,}048$, azaz kb. 5%.

b) A binomiális eloszlásra adott képlet szerint a kérdezett valószínűség: $\binom{100}{3} \cdot 0{,}03^3 \cdot 0{,}97^{97} \approx 0{,}227$, vagyis kb. 23%.

c) $\binom{100}{2} \cdot 0{,}03^2 \cdot 0{,}97^{98} + \binom{100}{1} \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}97^{99} + 0{,}97^{100} \approx 0{,}420$, azaz kb. 42%.

FELADAT

1. Egy gépsoron integrált áramköröket gyártanak. A tapasztalat szerint a gépsoron gyártott áramkörök esetén 0,005 annak a valószínűsége, hogy egy legyártott áramkör hibás. A minőség-ellenőrzés során a nagyon sok alkatrész közül 100 alkalommal választanak ki egy-egy darabot (és a megvizsgált darabot visszateszik).

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a 100 alkalom közül egyszer sem találnak selejteset?

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a 100 alkalom közül legalább egy selejtes darabot találnak?

c) Hány alkalommal kellene megismételni a mintavételt, ha azt szeretnénk, hogy a b)-beli valószínűség 0,5-nél nagyobb legyen?

2. Egy totószelvény kitöltésekor 13+1 mérkőzés esetén kell 3 lehetőség közül tippelni: *A* csapat nyer, *B* csapat nyer, illetve döntetlen lesz az eredmény. Ha véletlenszerűen töltünk ki egy totószelvényt, akkor mennyi a valószínűsége, hogy

a) telitalálatunk lesz;

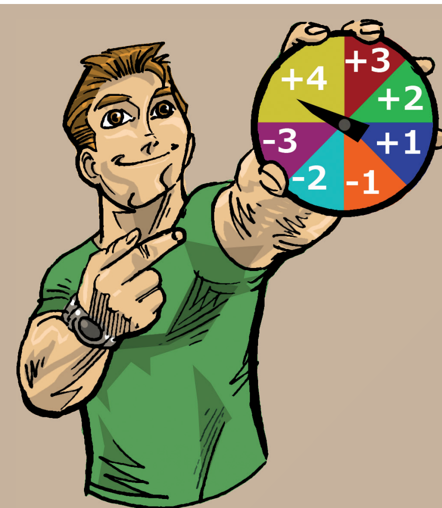
b) pontosan 10 találatunk lesz;

c) legalább 12 találatunk lesz;

d) legfeljebb 10 találatunk lesz?

3. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első magyar autó rendszámában, amivel találkozunk, legalább az egyik helyen hetes áll? (A magyar rendszámokban háromjegyű szám szerepel, és feltételezzük, hogy minden számjegy ugyanakkora eséllyel fordul elő mindegyik helyen.)

4. Egy társasjátékban szerencsekerék dönti el, ki menynyit haladhat előre, illetve hátra. A szerencsekereket kell megpörgetni, s az mutatja meg, hogy előre léphetünk egyet, kettőt, hármat vagy négyet, vagy vissza kell lépnünk egyet, kettőt vagy hármat. A szerencsekerék beosztását a mellékelt ábra mutatja. A (+4)-es lépést jelentő körcikk 90°-os, a többi körcikk 45°-os. A célig még 10 mezőt kell haladnunk előre (a tizedikkel már célba érünk). Mekkora a valószínűsége, hogy a harmadik forgatás után beérünk a célba? (A célba nem kell pontosan belépni, túl is haladhatunk rajta.)



HÁZI FELADAT

1. Szabályos dobókockával négyszer dobunk egymás után.
Mennyi annak a valószínűsége, hogy
a) mind a négy dobás ötös?
b) mindegyik dobás páratlan?
c) legalább 2 ötöst dobunk?
d) a dobott számok összege legfeljebb 6?

2. Egy szabályos tetraéder alakú „dobókocka” lapjait pirosra, kékre, fehérre és zöldre színezzük.
a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a tetraédert 20-szor feldobva egyszer sem esik a piros lapjára?
b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a tetraédert 20-szor feldobva pontosan 5-ször esik a piros lapjára?

3. Egy teszt 20 kérdésből áll. Minden kérdésre 4 felelet közül lehet egyet bekarikázni, vagy üresen is lehet hagyni a kérdést. A helyes válaszokért 2 pont jár, az üresen hagyott kérdésekre nem jár pont, a téves válaszokért azonban -3 pont (azaz pontlevonás) jár. Ha például 14 kérdésre helyes választ adunk, 6-ra azonban hibásat, akkor $14 \cdot 2 - 6 \cdot 3 = 10$ pontot kapunk.
a) Ha minden kérdésre bekarikázunk egy betűt, de úgy, hogy véletlenszerűen választunk a 4 lehetséges válasz közül, akkor mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 14 kérdésre válaszolunk helyesen?
b) Hogyan lehet másféle elosztásban 10 pontot elérni ezen a teszten? Keress több lehetőséget!

RÁADÁS

1. Számítógéppel készíts eloszlástáblázatot a 2. házi feladathoz! A táblázat első sorában álljanak a természetes számok 0-tól 20-ig, a második sorba pedig mindegyik szám alá írd oda annak a valószínűségét, hogy pontosan annyiszor esik a piros lapjára a tetraéder, amennyit az első sorban lévő szám mutat!

Korábbi érettségi feladat:

2. *(Középszintű érettségi, 2009. május)* A marcipángömböket gyártó gép működése nem volt hibátlan. A mintavétellel végzett minőség-ellenőrzés kiderítette, hogy a legyártott gömbök 10%-ában a marcipángömb mérete nem felel meg az előírtnak. A már legyártott nagy mennyiségű gömb közül 10-et kiválasztva mekkora annak a valószínűsége, hogy a kiválasztottak között pontosan 4-nek a mérete nem felel meg az előírásnak?

51 Kockázati tényezők

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy egészségügyi felmérés szerint a dohányzás a tüdőrákos megbetegedés egyik kockázati tényezője (*rizikófaktora*). Társadalmi méretekben jellemző, hogy az aktív dohányosok 10%-a tüdőrákos, míg a nemdohányosoknak mindösszesze 0,9%-a.

Egy 100 000 lakosú településen a lakosok 30%-a rendszeres dohányos. Ha a bevezetőben említett statisztikai adatok ezen a településen is érvényesek, akkor

a) hány tüdőrákban megbetegedett dohányos van ezen a településen;

b) hány tüdőrákban megbetegedett nemdohányos van ezen a településen;

c) egy tüdőrákban megbetegedett embert találomra kiválasztva mekkora annak a valószínűsége, hogy az aktív dohányos;

d) egy nem tüdőrákos embert kiválasztva mekkora a valószínűsége, hogy nemdohányos?

Megoldás

a) A dohányosok száma 30 000, ennek 10%-a 3000.

b) A nemdohányosok száma 70 000, ennek a 0,9%-a 630.

c) Az a) és a b) pontban kapott eredményünk szerint a városban 3630 tüdőrákos van, közülük 3000 dohányos. Tehát a tüdőrákban megbetegedett emberek közül egyet kiválasztva $\frac{3000}{3630} \approx 0{,}83$, azaz 83% annak az esélye, hogy az illető dohányos.

d) A nem tüdőrákos emberek száma a településen $100\,000 - 3630 = 96\,370$, közöttük $70\,000 - 630 = 69\,370$ a nemdohányosok száma. Tehát a nem tüdőrákos emberek közül egyet véletlenszerűen kiválasztva $\frac{69\,370}{96\,370} \approx 0{,}72$, azaz 72% eséllyel nemdohányost választunk (és csak 28% eséllyel dohányost).

FELADAT

1. Egy szakgimnázium tanulóira vonatkozik a következő táblázat.

	Lányok	Fiúk	Összes
A tanulók száma	165		
A tanulók %-os aránya		75	
A kosárlabdázók száma			270
A kosárlabdázók %-os aránya a lányok, illetve a fiúk között	≈ 18		

a) Töltsd ki a táblázatot!

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott kosárlabdás

A) lány; B) fiú?

2. Folytasd az előző feladatot! Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott diák

a) kosárlabdás;

b) nem kosárlabdázó lány;

c) kosárlabdázó lány vagy nem kosárlabdázó fiú;

d) kosárlabdázó fiú vagy nem kosárlabdázó lány?

HÁZI FELADAT

1. Egy ház 67 lakója közül 15 gyerek, a felnőttek 57,7%-a nő, a gyerekek 40%-a fiú. Mennyi a valószínűsége, hogy ha a lakók névsorából véletlenszerűen kiválasztunk egy nevet, akkor

a) gyereket;
b) felnőtt nőt;
c) felnőttet vagy fiút;
d) lányt

választottunk?

2. Egy biztosító a náluk biztosított 5000 személygépkocsiról baleseti statisztikát készített. Megállapították, hogy a vizsgált ügyfelek 72%-a napi rendszerességgel vezet gépkocsit. Az elmúlt 12 hónapban az 5000 ügyfél közül 6% volt érintett különféle gépjárműbalesetekben. A statisztikából azonban az is kiderült, hogy a nem rendszeresen vezetők között ez az arány 9%.

a) A nem rendszeres vezetők közül hánynak volt balesete?
b) Hány rendszeresen vezető ügyfél volt érintett autóbalesetben az elmúlt évben?
c) Mekkora a valószínűsége, hogy a balesetben érintett ügyfelek közül egyet tetszőlegesen kiválasztva éppen egy rendszeres vezetőt választunk?

3. Ismert tény, hogy az úgynevezett *partidrogok* (tudatmódosító szerek, például speed, exstasy) hatására a balesetveszély fokozódik.
Tegyük fel, hogy egy szombat éjszakán az országban 250 ezer fiatal vesz részt valamilyen partin, és ezeknek a fiataloknak a 15%-a fogyaszt valamilyen partidrogot. A partiról távozó fiatalok körében 0,0008 valószínűséggel következik be valamilyen közúti baleset, a tudatmódosító szert szedők között ez a valószínűség 0,0034. Számítsd ki, hogy egy ilyen éjszakát követő hajnalon

a) hány baleset következik be a statisztikai adatok szerint a partiról távozó fiatalok körében;
b) hány tudatmódosító szer hatása alatt álló fiatallal történik közúti baleset;
c) mekkora a valószínűsége annak, hogy egy közúti balesetet szenvedett fiatal tudatmódosító szert szedett!

RÁADÁS

Korábbi érettségi feladat

(Középszintű érettségi, 2015. május) A biológiaérettségi egyik tesztkérdésénél a megadott öt válaszlehetőség közül a két jót kell megjelölni.

a) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az öt lehetőség közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva a két jó választ találjuk el!

Nóri, Judit és Gergő egy 58 kérdésből álló biológiateszttel mérik fel tudásukat az érettségi előtt. A kitöltés után, a helyes válaszokat megnézve az derült ki, hogy Nóri 32, Judit 38 kérdést válaszolt meg helyesen, és 21 olyan kérdés volt, amelyre mindketten jó választ adtak. Megállapították azt is, hogy 11 kérdésre mindhárman helyesen válaszoltak, és Gergő helyesen megoldott feladatai közül 17-et Nóri is, 19-et Judit is jól oldott meg. Volt viszont 4 olyan kérdés, amelyet egyikük sem tudott jól megválaszolni.

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy kérdést véletlenszerűen kiválasztva arra Gergő helyes választ adott! Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg!

Nóri a biológia és kémia szóbeli érettségire készül. Biológiából 28, kémiából 30 tételt kell megtanulnia. Az első napra mindkét tárgyból 3-3 tételt szeretne kiválasztani, majd a kiválasztott tételeket sorba állítani úgy, hogy a két tantárgy tételei felváltva kövessék egymást.

c) Számítsa ki, hányféleképpen állíthatja össze Nóri az első napra szóló tanulási programját!

Számtan, algebra

A számtan – mint neve is mutatja – a számok, a számolás tudománya, egyértelműen a matematika legrégebbi és legszerteágazóbb területe. Az ujjakon végzett egyszerű számolástól napjaink szuperszámítógépeiig tartó fejlődést lehetetlen lenne néhány sorban összefoglalni, hiszen egy-egy mérföldköve, mint például a tízes számrendszer térhódítása vagy a másodfokú egyenlet megoldása is oldalakat igényelne.

FOGALMAK, TÉTELEK

I. VALÓS SZÁMOK
(Részletesen lásd 9. osztályos tankönyv 11–28. lecke, 10. osztályos tankönyv 6–10. lecke, 11. osztályos tankönyv 42–59. lecke.)

D T	Azokat a számokat, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként, **racionális** számoknak nevezzük. A racionális számok tizedes tört alakja véges vagy végtelen szakaszos. A racionális számok halmazának jele: **Q**.
D T	A nem racionális számokat (két egész szám hányadosaként nem írhatók fel) **irracionális** számoknak nevezzük. Az irracionális számok tizedes tört alakja végtelen, nem szakaszos. Az irracionális számok halmazának jele: **Q***.
D	A racionális és irracionális számokat közös néven **valós** számoknak nevezzük. A valós számok halmazának jele: **R**.
D	Egy a pozitív egész számot akkor nevezzük egy b pozitív egész szám **osztójának**, ha van olyan c pozitív egész szám, hogy $ac = b$. Ha a osztója b-nek, akkor a b-t az a szám **többszörösének** mondjuk.
D	Ha egy pozitív egész számnak pontosan két pozitív osztója van (az 1 és önmaga), akkor ezt **prímszámnak** nevezzük. Ha egy 1-nél nagyobb egész szám nem prímszám, akkor ezt **összetett számnak** nevezzük.
T	Bármely két valós szám *összege, különbsége, szorzata* és *hányadosa* (kivéve a 0-val való osztást) szintén valós szám. A 0-val való osztásnak nem adunk értelmet.
T	Valós számok összeadásának és szorzásának tulajdonságai: $a + b = b + a$; $a \cdot b = b \cdot a$ (kommutativitás, felcserélhetőség) $(a + b) + c = a + (b + c)$; $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (asszociativitás, csoportosíthatóság) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (disztributivitás, széttagolhatóság)
D	Valós szám egész kitevőjű hatványai: Ha $a \neq 0$ valós szám, n pedig pozitív egész szám, akkor $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n darab tényező); $a^0 = 1$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Ha az n pozitív egész szám, akkor $0^n = 0$. A 0-nak nem értelmezzük sem a nulladik hatványát, sem negatív kitevőjű hatványát.
T	**A hatványozás azonosságai:** Minden olyan a, b, m és n esetében, amelyekre értelmük van a következő kifejezéseknek, igaz, hogy $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $a^m : a^n = a^{m-n}$; $(a^m)^n = a^{mn}$ $(ab)^n = a^n \cdot b^n$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.
D	Ha a nemnegatív szám, akkor azt a nemnegatív számot, amelynek a négyzete az a-val egyenlő, **az *a* szám négyzetgyökének** nevezzük. Jele: $\sqrt{a}$.
T	**A négyzetgyökvonás azonosságai:** Minden olyan a és b esetében, amelyekre értelmük van a következő kifejezéseknek, igaz, hogy $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$; $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$; $(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$. Pozitív valós a szám esetén: $(\sqrt{a})^2 = a$, és minden valós a szám esetén $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$.

D	Ha a pozitív szám, n pedig 1-nél nagyobb egész szám, akkor azt a pozitív számot, amelynek az n-edik hatványa az a-val egyenlő, az a szám **n-edik gyökének** nevezzük. Jele: $\sqrt[n]{a}$. Ugyanezt a számot így is szoktuk jelölni: $a^{\frac{1}{n}}$. Ha a valós szám, n pedig 1-nél nagyobb páratlan egész szám, akkor azt a valós számot, amelynek az n-edik hatványa az a-val egyenlő, az a szám n-edik gyökének nevezzük.
D	Ha a pozitív szám, n 1-nél nagyobb egész szám, és m egész szám, akkor azt a pozitív számot, amelynek az n-edik hatványa (a^m)-nel egyenlő, **az a szám $\frac{m}{n}$-edik hatványának** nevezzük. Kétféleképpen is jelölhetjük: $a^{\frac{m}{n}}$, illetve $\sqrt[n]{a^m}$.
D	Az $a_1; a_2; \ldots; a_n$ valós számok számtani közepe: $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$. Véges sok szám **számtani közepe** (átlaga) az a szám, amelyet ha mindegyik szám helyére beírunk, ezeknek az összege nem változik meg.
D	N darab pozitív szám mértani közepe a számok szorzatának n-edik gyöke: $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}$. Két pozitív szám **mértani közepe** az a szám, amelyet a számok helyére beírva a szorzatuk nem változik meg. Az a, b pozitív számok mértani közepe: $\sqrt{ab}$.
T	Két pozitív szám számtani közepe nem kisebb a mértani közepüknél. Egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha a két szám egyenlő. Azaz $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.
D	Ha a **és** b pozitív valós szám és $a \neq 1$, akkor azt a kitevőt, amelyre az a-t emelve b-t kapunk, **a b szám a alapú logaritmusának** nevezzük. Jele: $\log_a b$. Másként: $a^{\log_a b} = b$.
T	**A logaritmus azonosságai:** Minden olyan a, m, n és k esetében, amelyekre értelmük van a következő kifejezéseknek, igaz, hogy $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$; $\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$; $\log_a m^k = k \log_a m$.

II. ALGEBRA
(Részletesen lásd 9. osztályos tankönyv 59–76. lecke, 10. osztályos tankönyv 34–44. és 79–86. lecke.)

D	**Nevezetes algebrai azonosságok:** Akármelyik valós számot jelöli is az a és a b betű, igaz, hogy $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$. $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$;
D	Egy egyismeretlenes egyenlet vagy egyenlőtlenség **értelmezési tartománya** az összes olyan valós számnak a halmaza, amelyeken az egyenletben szereplő valamennyi kifejezésnek értelme van.
D	Egy egyismeretlenes egyenlethez vagy egyenlőtlenséghez gyakran megadunk egy **alaphalmazt**. Ez a valós számok halmazának az a részhalmaza, amelynek az elemei között a megoldásokat keressük.
D T	A másodfokú egyenlet általános alakja $ax^2 + bx + c = 0$, ahol a, b, c valós számok és $a \neq 0$. Az $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ másodfokú egyenlet **diszkriminánsának** a $D = b^2 - 4ac$ számot nevezzük. Ha a diszkrimináns pozitív, akkor az egyenletnek az **R** halmazon két különböző gyöke van, amelyeket az $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ún. **megoldóképlettel** is megkaphatjuk. Ha a diszkrimináns nulla $(D = 0)$, akkor az egyenletnek egy gyöke van, az $x = \frac{-b}{2a}$ szám. Ha a diszkrimináns negatív $(D < 0)$, akkor az egyenletnek nincs valós gyöke.
D	Ha az $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ másodfokú egyenletnek az **R** halmazon két gyöke van: x_1 és x_2, akkor $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Most a másodfokú polinomot **gyöktényezős alakban** írtuk fel. Ha az egyenlet egyetlen valós gyöke az x_1, akkor $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

52 Természetes számok

BEVEZETŐ

A korai számítógépekbe az adatokat lyukkártyák segítségével vitték be, és a gép az eredményeket is ilyen lyukkártyák segítségével közölte. A lyukkártyák egyik típusa a kettes számrendszert használta. Figyeljük meg, hogy milyen rendszer szerint értelmezi a gép a lyukkártyákat!

128	64	32		8	4	2	1	**16**
128	64		16	8		2	1	**36**
128	64			8	4	2	1	**48**
	64	32	16		4			**139**

A táblázat celláiban (az utolsó oszlopot kivéve) a 2 hatványai szerepelnek. Az egyes sorok eredményét úgy kapjuk meg, hogy összeadjuk a „kilyukasztott” helyeken lévő számokat. Például a második sor azt mutatja, hogy a keresett szám a $32 + 4 = 36$. Hasonlóan a harmadik sorban a $16 + 32 = 48$, a negyedikben pedig a $128 + 8 + 2 + 1 = 139$ eredmény adódik.

A lyukasztás ismeretében könnyen felírhatjuk az utolsó oszlopban lévő (pirossal írt) számokat a kettes számrendszerben: a „lyuk” helyére az 1 számjegyet, a többi helyre a 0 számjegyet írjuk. Természetesen a szám elejére kerülő 0-kat elhagyjuk.

$16 = 1\,0000_2$;

$36 = 32 + 4 = 10\,0100_2$;

$139 = 128 + 8 + 2 + 1 = 1000\,1011_2$.

FELADAT

1. Oldd meg a feladatokat a bevezető feladat módszerével!

a) Melyik tízes számrendszerbeli számokat adja ki a gép?

128		32	16	8	4		1	
128	64	32				2	1	
	64		16		4	2		

b) Jelöld meg a lyukkártyán a táblázat utolsó oszlopában szereplő, (pirossal írt) tízes számrendszerben megadott számokat!

128	64	32	16	8	4	2	1	**80**
128	64	32	16	8	4	2	1	**78**
128	64	32	16	8	4	2	1	**193**

KIDOLGOZOTT FELADAT

Írjuk át 6-os számrendszerbe a 3014_5 számot!

Megoldás

Először átírjuk az adott számot 10-es számrendszerbe:

$$3014_5 = 3 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 4 =$$
$$= 3 \cdot 125 + 0 \cdot 25 + 1 \cdot 5 + 4 = 384.$$

Ezután a 10-es számrendszerből térünk át a 6-osra.

A 6 legkisebb hatványai: 1, 6, 36, 216, 1296. Közülük a 216 még kisebb a 384-nél, de az 1296 már nagyobb nála.

$384 = 1 \cdot 216 + 168$; $168 = 4 \cdot 36 + 24$; $24 = 4 \cdot 6$.

Tehát $3014_5 = 384 = 1 \cdot 216 + 4 \cdot 36 + 4 \cdot 6 + 0 \cdot 1$, vagyis $384 = 1440_6$.

FELADAT

2. Melyik számrendszert jelöli az n, ha $10\,500_n = 2646$?

3. Melyik az a legnagyobb természetes szám, amellyel az $\frac{1260}{29\,400}$ tört egyszerűsíthető? Melyik a tört tovább már nem egyszerűsíthető alakja?

4. Hány 0-ra végződik a 10!, a 20! és a 99! ?

5. A Wikipédiából: „A **Rhind-papirusz** egy óegyiptomi, számtannal és mértannal foglalkozó papirusztekercs, amelyet Jahmesz (Ahmesz) írnok készített Kr. e. 1750 táján. Nevét felfedezőjéről, Henry Rhind skót régiségkereskedőről kapta. Írójáról szokás még **Ahmesz-papirusz**nak is nevezni. Ez a mű az elsőként megismert, ókori egyiptomi matematikával foglalkozó írás."
A Rhind-papirusz jelenleg is megtekinthető Londonban, a British Múzeumban.
Igazold (számológép használata nélkül) a Rhind-papirusz következő állítását:
$$\frac{2}{73} = \frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{365}!$$

HÁZI FELADAT

1. Add meg 10-es számrendszerben a következő számokat!
a) $1234_6 - 1234_5$; **b)** $111\,010\,001\,011_2 - 101\,111\,001\,001_2 + 10\,001\,001\,110_2$

2. Írd egyszerűbb alakba a következő törteket!
a) $\dfrac{3^5 \cdot 5^{-7} \cdot 11^8 \cdot 13^{-2}}{3^8 \cdot 5^{-5} \cdot 13^3}$; **b)** $\dfrac{15^3 \cdot 36^{-2} \cdot 50^4}{30^5 \cdot 48^{-2}}$

3. Melyik szám A és B legkisebb közös többszöröse, ha $A = (198; 220)$ és $B = [15; 40]$?

4. **a)** Milyen számjegy állhat az X helyén, ha a négyjegyű $\overline{547X}$ szám 15-tel osztható?
b) Milyen számjegy állhat az A és a B helyén, ha a négyjegyű $\overline{8A2B}$ szám osztható 12-vel?

RÁADÁS

A természetes számok halmazában hivatásos és „műkedvelő" matematikusok egyaránt számtalan izgalmas kérdést vetettek fel. A problémák között vannak igen híresek, mint például a Fermat-tétel (Pierre de Fermat, 1601–1665, francia jogász és műkedvelő matematikus). Ez azt mondja ki, hogy ha $n > 2$ egész szám, akkor nincsenek olyan nullától különböző x, y, z egészek, amelyekre $x^n + y^n = z^n$ teljesül. Az $n = 2$ esetnek végtelen sok különböző megoldása van (pitagoraszi számhármasok). Például $3^2 + 4^2 = 5^2$ vagy $20^2 + 21^2 = 29^2$.
A Fermat-tételben megfogalmazott állítást több mint 300 évig nem tudták bizonyítani, így egészen 1994-ig Fermat-sejtés néven volt ismert. A ma ismert bizonyítás *Andrew Wiles* princetoni professzor érdeme, hétévnyi titokban végzett munkával sikerült belátnia az állítást.
Érdekes kérdést vizsgált *Mersenne (Marin Mersenne*, 1588–1648) francia szerzetes, matematikus és fizikus. A prímszámok között több olyan is van, amely a 2-nek egy pozitív egész kitevőjű hatványánál pontosan 1-gyel kisebb. Például $3 = 2^2 - 1$, $7 = 2^3 - 1$, $31 = 2^5 - 1$, $8191 = 2^{13} - 1$. Ezeket a prímeket Mersenne-prímeknek nevezzük.
Máig eldöntetlen kérdés, hogy végtelen sok Mersenne-prím létezik-e.
A számítógépes titkosításban nagy szerepük van a prímszámoknak, így napjainkban is fontos hírként számolnak be arról, ha egy újabb, az eddig ismerteknél is nagyobb $2^n - 1$ alakú számról sikerül belátni, hogy Mersenne-prím. Egy ilyen nagyon nagy prím: $2^{57\,885\,161} - 1$. (Számítsd ki, hogy hány számjegye van ennek az egész számnak!)

53 Hatvány, gyök, logaritmus

BEVEZETŐ

Egy vállalkozó újszülött kislánya számára 18 évre elhelyez a bankban egy nagyobb összeget. Úgy tervezi, hogy leánya a nagykorúsága elérésekor 1 millió forinttal indulhasson az életbe. Mekkora legyen a lekötött összeg, hogy az 5,5%-os kamat mellett 18 év alatt 1 millióra növekedjék?
A kamatos kamat képlete szerint n év és p%-os kamat mellett x forint $x \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ forintra nő. Tehát a jelen esetben $1\,000\,000 = x \cdot 1{,}055^{18}$, vagyis a lekötendő összeg: $x = \frac{1\,000\,000}{1{,}055^{18}} \approx 381\,466$ forint.
A vállalkozó ezért úgy döntött, hogy 382 000 forintot köt le.

FELADAT

1. A bevezető feladatban szereplő vállalkozó valószínűleg csalódik, ha 18 évig vár a 380 000 forintos lekötött tőkéje folyamatos, évi 5,5%-os növekedésére. Számítsd ki, hány forintot kap 18 éves korában ez a leány, ha a kamatláb csak 3 évig 5,5%-os, ezután 6 évig 4,3%-os, majd 7 évig 3,1%-os, a maradék időben pedig 2%-os lesz!

2. Hány év alatt kétszereződik meg a bankban lekötött pénzünk évi 3,4%-os állandó kamatláb esetén?

KIDOLGOZOTT FELADAT

Írjuk fel (számológép használata nélkül) egyszerűbb alakban a

a) $14 \cdot 7^{\log_7 2 - 1}$; **b)** $\log_3(\log_{18} 2 + 2 \cdot \log_{18} 3)$ számot!

Megoldás

a) A hatványozás azonossága miatt
$14 \cdot 7^{\log_7 2 - 1} = 14 \cdot 7^{\log_7 2} \cdot 7^{-1}$.
A logaritmus definíciója miatt $7^{\log_7 2} = 2$, továbbá $7^{-1} = \frac{1}{7}$, ezért $14 \cdot 7^{\log_7 2 - 1} = 14 \cdot 2 \cdot \frac{1}{7} = 4$.

b) Alkalmazzuk a logaritmus azonosságait!
$\log_{18} 2 + 2 \cdot \log_{18} 3 = \log_{18} 2 + \log_{18} 3^2 =$
$= \log_{18} 2 + \log_{18} 9 = \log_{18} 18$
A logaritmus definíciója szerint $\log_{18} 18 = 1$;
A kifejezés értéke tehát: $\log_3 1 = 0$.

FELADAT

3. Hány ötjegyű szám képezhető a következő egyenletek megoldásából, ha a megoldások minden számjegyét pontosan egyszer használhatjuk fel? ($x \in \mathbf{R}^+$; $x \neq 1$)

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0{,}125$; $\quad \log_6 1 = x$; $\quad \log_2 x = 3$;

$(\sqrt{3})^x = 27$; $\quad \log_x \sqrt{5} = 0{,}5$

4. Számológép használata nélkül válaszolj! Melyik szám a nagyobb:

a) 11^{22} vagy 22^{11}; **b)** $100^{2\lg 2}$ vagy $\sqrt{10^{2+0{,}5\lg 16}}$?

5. A következő számok egy-egy sorozat egymás utáni tagjai. Döntsd el, melyik közülük számtani sorozat, melyik mértani sorozat!

a) $\log_2 1$; $\log_2 2$; $\log_2 4$

b) $\log_{0,5} 1$; $\log_{0,5} 2$; $\log_{0,5} 4$

c) $\log_2 0{,}5$; $\log_2 2$; $\log_{0,5} 2$

d) $\log_2 0{,}5$; $\log_2 1$; $\log_2 2$

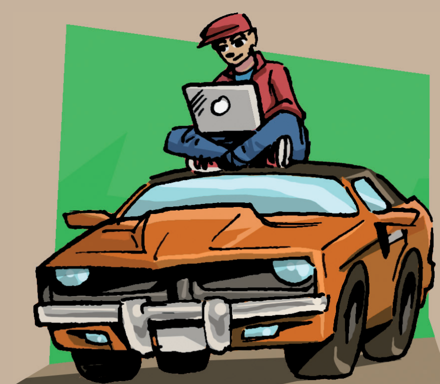
e) $\log_{16} 16$; $\log_4 16$; $\log_2 16$

6. **a)** Egy 5 millió forintért vásárolt gépkocsi minden évben elveszti az előző évi értékének 16%-át. Mennyi lesz a gépkocsi értéke 4 év múlva?

b) Egy 5 éve vásárolt laptop 60 ezer forintot ér. Mennyi volt az eredeti ára, ha minden évben az előző évi értékének 25%-át veszítette el?

c) Egy tőzsdei értékpapírt a kibocsátásakor 200 ezer forintért lehetett megvenni. A papír névértéke minden évben ugyanannyi százalékkal nőtt, így 5 év elteltével 322,1 ezer forintot adnak érte. Hány százalékos volt az éves növekedés?

d) Egy baktériumtenyészet pusztulásnak indult, minden órában a még életben lévő baktériumok 25%-a pusztul el. Mennyi idő alatt csökken a tenyészetben az élő baktériumok száma az eredeti számuk 1%-ára?



HÁZI FELADAT

1. Melyik szám a nagyobb:

a) $\sqrt{50} - \sqrt{12}$ vagy $(20 - \sqrt{96}) : \sqrt{8}$;

b) $(3 - \lg 0{,}1)^{12}$ vagy 25^6?

2. Írd fel egyszerűbb alakban a számokat!

a) $\sqrt{10^{4-\lg 25}}$; **c)** $\lg 5 \cdot \lg 2 \cdot \lg 1$;

b) $\log_3 9 \cdot \log_9 3$; **d)** $\lg 5 + \lg 2 + \lg 1$.

3. Egy 7,2 millió forintért vásárolt gépkocsi négyévi használat után 3,2 millió forint ér.

a) Hány százalékos volt az évi értékcsökkenés, ha feltételezzük, hogy a gépkocsi értéke minden évben az előző évi értéknek ugyanannyi százalékával csökkent?

b) A gépkocsi értéke a negyedik év után évente 12%-kal csökken. Hány éves a gépkocsi akkor, amikor az értéke 1 millió forintnál is kevesebb lesz?

4. Informatikai eszközök tervezésekor fontos szempont, hogy egy bizonyos feladat elvégzése mennyi időt vesz igénybe. Ez részben az eszköz fizikai tulajdonságaitól, részben a feladat bonyolultságától függ. Például „az egérrel rámutatni egy kívánt ikonra" egy olyan mozdulatsor, amelynek a „bonyolultsági indexét" (*ID*) az $ID = \log_2 \frac{2x}{d}$ összefüggéssel számítják ki. A képletben x a kiindulópont és a célpont távolsága a monitoron, d pedig a célpont átmérője azonos mértékegységben kifejezve.

a) Mekkora *ID*-érték tartozik egy olyan mozdulathoz, amely során egy 0,5 cm átmérőjű ikonra 8 cm távolságról indulva kell rámutatni?

b) Hányszorosára nő ez az érték (azaz hányszor annyi idő kell a feladat elvégzéséhez), ha ugyanezt az ikont 4-szer távolabbról próbáljuk eltalálni?

54 Szorzattá alakítás, polinom, értelmezési tartomány

FELADAT

1. Írd fel polinom alakban a következő kifejezéseket!

a) $(2x+1)^2$; **b)** $(2x-1)^2$; **c)** $(2x+1)(2x-1)$; **d)** $(2x+1)^2-(2x-1)^2$.

2. Alakítsd szorzattá a következő polinomokat!

a) $2x^2+12x+18$; **b)** $3x^2-27$; **c)** $1-4x+4x^2$; **d)** $12x^2-3$.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Mi az értelmezési tartománya a következő törtnek? Ha lehet, egyszerűsítsd!

$$\frac{2x^2-2x-4}{3x^2-6x}$$

Megoldás

Alakítsuk szorzattá a számlálót és a nevezőt! Ehhez először oldjuk meg a következő egyenletet: $2x^2-2x-4=0$.

A megoldóképlet alapján: $x_1=-1$ és $x_2=2$. Ennek segítségével: $2x^2-2x-4=2(x-2)(x+1)$.

A nevezőben: $3x^2-6x=3x(x-2)$.

Mivel egy tört nevezője nem lehet 0, ezért $x\neq 0$ és $x\neq 2$.

Tehát az értelmezési tartomány: $\mathbf{R}\setminus\{0; 2\}$.

$$\frac{2x^2-2x-2}{3x^2-6x}=\frac{2(x-2)(x+1)}{3x(x-2)}.$$

Látjuk, hogy a számláló és a nevező is osztható $(x-2)$-vel, ezért a tört egyszerűsített alakja: $\frac{2(x+1)}{3x}$.

FELADAT

3. Alakítsd szorzattá a következő polinomokat!

a) x^2+x-2;

b) $x^2-8x+15$;

c) $5x^2+15x-20$.

4. Lehet-e egyszerűsíteni a következő algebrai törteket? Amelyiket lehet, azt egyszerűsítsd! Vizsgáld a következő kifejezések értelmezési tartományát is!

a) $\frac{2x}{x^2+x}$; **b)** $\frac{2+x}{x^2+x}$; **c)** $\frac{x+2}{x^2+2x}$; **d)** $\frac{8-4x}{x^2-4x+4}$.

KIDOLGOZOTT FELADAT

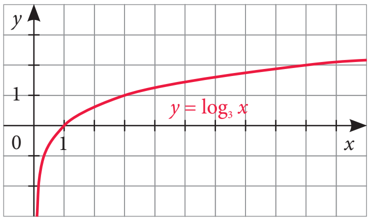
2. Mi az értelmezési tartománya a következő kifejezésnek?

a) $\sqrt{x-4}$; **b)** $\log_3(4x-3)$; **c)** $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

Megoldás

a) Mivel a gyök alatti kifejezés nem lehet negatív, ezért: $x-4\geq 0$, ebből $x\geq 4$. Tehát az értelmezési tartomány a 4 vagy annál nagyobb számok halmaza, másként jelölve: $[4; \infty[$.

b) Mivel a logaritmus csak pozitív számokra van értelmezve, ezért $4x - 3 > 0$, ebből $x > 0{,}75$. Az értelmezési tartomány: $]0{,}75;\ \infty[$.

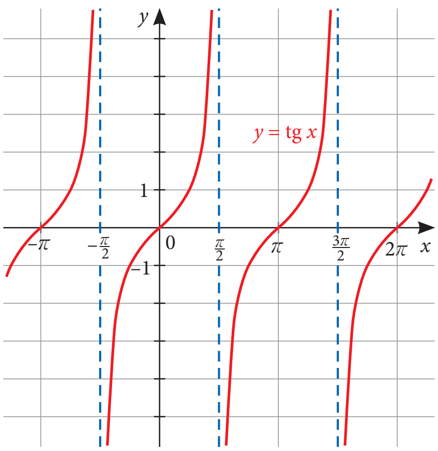


c) A tangensfüggvény ott nem értelmezhető, ahol a koszinuszfüggvény értéke 0.

$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0$ miatt: $x + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

Ebből $x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi$.

Tehát $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$.



FELADAT

5. Mi az $\frac{x+4}{x+1} = 5 - \frac{2-x}{x(x+1)}$ egyenlet értelmezési tartománya?

6. Mi a következő kifejezések értelmezési tartománya?

a) $\sqrt{\frac{2}{3x}}$;
b) $\frac{x+1}{\sqrt{3x+4}}$;
c) $\log_5(7-x)$;
d) $\log_5(7-x)^2$;
e) $\sqrt{3^x - 9}$;
f) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$.

HÁZI FELADAT

1. Alakítsd szorzattá a következő polinomokat!

a) $x^2 - 6x + 9$;
b) $x^3 - 6x^2 + 9x$;
c) $3x^3 - 27x$;
d) $3x^3 + 27x$;
e) $50 - 20x + 2x^2$;
f) $x^2 - 7x + 12$;
g) $-2x^2 + 5x + 7$;
h) $-32 - 4x + x^2$.

2. Egyszerűsítsd a következő törteket a változó megengedett értékei mellett!

a) $\frac{x^2 - 6x + 9}{3x^2 - 27}$;
b) $\frac{3x^3 - 27x}{x^3 + 6x^2 + 9x}$.

3. Mi a $\frac{3x^3 - 27x}{x^3 + 6x^2 + 9x} = 1$ egyenlet értelmezési tartománya?

4. Állapítsd meg a következő kifejezések értelmezési tartományát!

a) $\lg(3^x - 9)$;
b) $\sqrt{x-5} + \sqrt{5-x}$;
c) $\sin x - \operatorname{tg}(2x)$;
d) $\frac{\sqrt{2(x+1)}}{3x+2}$.

55 Oldjuk meg!

KIDOLGOZOTT FELADAT

Oldjuk meg a $\dfrac{12x^2-3}{4x^2-4x+1}=7$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás

Először megállapítjuk, mi az adott egyenlet *értelmezési tartománya*. Ehhez azt kell megvizsgálnunk, hogy az x-nek mely értékei esetén 0 a nevező. A nevezőben álló másodfokú polinom: $4x^2-4x+1=(2x-1)^2$. Ez akkor és csakis akkor egyenlő 0-val, ha $2x-1=0$, vagyis $x=0{,}5$.

Tehát az adott *egyenlet értelmezési tartománya* az $\mathbf{R}\setminus\{0{,}5\}$ halmaz.

Első módszer

Az egyenlet megoldását úgy kezdjük, hogy egyszerűsítjük a bal oldalán álló algebrai törtet. Ehhez a számlálót is és a nevezőt is szorzattá alakítjuk:

$$\frac{12x^2-3}{4x^2-4x+1}=\frac{3\cdot(4x^2-1)}{(2x-1)^2}=\frac{3\cdot(2x+1)\cdot(2x-1)}{(2x-1)^2}=\frac{3\cdot(2x+1)}{2x-1}=\frac{6x+3}{2x-1}.$$

Most már az eredeti helyett csak a jóval egyszerűbb $\dfrac{6x+3}{2x-1}=7$ egyenletet kell megoldanunk, figyelembe véve az eredeti értelmezési tartományt. A mérlegelv alkalmazásával folytatjuk a megoldást:

$$\frac{6x+3}{2x-1}=7 \qquad /\cdot(2x-1)$$

$6x+3=7\cdot(2x-1);\qquad 6x+3=14x-7;\qquad 8x=10;\qquad x=1{,}25.$

Az 1,25 eleme az értelmezési tartománynak.

Mivel az $\mathbf{R}\setminus\{0{,}5\}$ halmazon az átalakításaink *ekvivalensek* voltak, ezért az 1,25 megoldása az eredeti egyenletnek.

Második módszer

A megoldást most is az értelmezési tartomány megállapításával kezdjük, mint az első esetben.

A *mérlegelvvel* oldjuk meg az adott egyenletet:

$$\frac{12x^2-3}{4x^2-4x+1}=7 \qquad /\cdot(4x^2-4x+1)$$

$12x^2-3=7\cdot(4x^2-4x+1);$

$12x^2-3=28x^2-28x+7$

$16x^2-28x+10=0 \qquad /:2$

$8x^2-14x+5=0$

Megoldóképlettel:

$$x_{1,2}=\frac{14\pm\sqrt{14^2-4\cdot8\cdot5}}{16}=\frac{14\pm\sqrt{36}}{16}=\frac{14\pm6}{16}=\frac{7\pm3}{8};$$

$$x_1=\frac{7+3}{8}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}=1{,}25 \quad \text{és} \quad x_2=\frac{7-3}{8}=\frac{4}{8}=0{,}5.$$

Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy az 1,25 gyöke az adott egyenletnek: $\dfrac{12\cdot1{,}25^2-3}{4\cdot1{,}25^2-4\cdot1{,}25+1}=\dfrac{15{,}75}{2{,}25}=7.$

A 0,5 nem eleme az értelmezési tartománynak. Azt mondjuk, hogy a 0,5 *hamis gyök*, mert nem gyöke az eredeti egyenletnek, csak a megoldás során fellépő újabb egyenleteknek. (Behelyettesítéssel is megállapíthatnánk, hogy a 0,5 nem megoldás: ekkor a tört nevezőjének értéke 0 lenne.)

Az egyenlet megoldása: $x=1{,}25$.

FELADAT

1. Oldd meg a valós számok halmazán a

$$\frac{(3x-2)^2}{18x^2-8}=-1 \text{ egyenletet!}$$

2. Oldd meg a valós számok halmazán az egyenleteket!

a) $\frac{2x-5}{4}-\frac{1-2x}{6}+2=0$;

b) $(3x+2)^2-(5-4x)^2=10x-21$.

3. Mi az $\frac{x+4}{x+1}=5-\frac{2-x}{x(x+1)}$ egyenlet megoldáshalmaza?

4. Oldd meg az egyenleteket az egész számok halmazán!

a) $2(x-3)+4(x+1)=5(x-1)+x+3$;

b) $2(5x-8)-3(4x-5)=4(3x-4)+11$;

c) $\left(\frac{2y-15}{2}\right)^2-\left(\frac{2y-3}{2}\right)^2=18$;

d) $x\left(\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x-4}\right)=\frac{50}{9}$;

e) $\frac{x+2}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}=\frac{5}{2}$.

5. Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $(x-3)\cdot(2x-5)\cdot(x^2+1)=0$

b) $x\cdot\sin x\cdot\cos x=0$

HÁZI FELADAT

1. Oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $x^2-6x+9=0$; **c)** $3x^3-27x=0$;

b) $x^3-6x^2+9x=0$; **d)** $3x^3+27x=0$.

2. Oldd meg a következő egyenleteket a racionális számok halmazán!

a) $\frac{x^2-6x+9}{3x^2-27}=1$;

b) $\frac{-5x^3+20x^2-20x}{x^3-4x}=-\frac{5}{3}$.

3. Oldd meg az adott egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\frac{3x^3-27x}{x^3+6x^2+9x}=1$;

b) $\frac{x^2-x-2}{5x-10}=3$.

4. Oldd meg az egyenleteket a természetes számok halmazán!

a) $(x-7)(x+3)+(x-1)(x+5)=102$;

b) $(3x-4)^2-(6x-7)^2=0$;

c) $\frac{x^2+6x-7}{3x^2-x-2}=5$;

d) $\frac{x+3}{x+4}-\frac{x}{3-x}=\frac{7}{(x+4)(x-3)}$;

e) $\frac{x+4}{3}=\frac{2x+1}{x}$;

f) $\frac{x^2-1}{1+x}+\frac{1-x}{2}=7$;

g) $\frac{x^2-15x}{3}=108-5x$;

h) $\frac{2}{x-3}-\frac{x}{1-x}=0$.

Pénztárgép az 1920-as évekből

56 Egyenlőtlenségek

KIDOLGOZOTT FELADAT

Oldjuk meg a valós számok halmazán a

a) $2x^2 - 6x - 8 > 0$; **b)** $\left(\frac{1}{8}\right)^x > 32$

egyenlőtlenséget!

Megoldás

a) Oldjuk meg a $2x^2 - 6x - 8 = 0$ egyenletet, majd ennek segítségével az eredeti feladatot is!

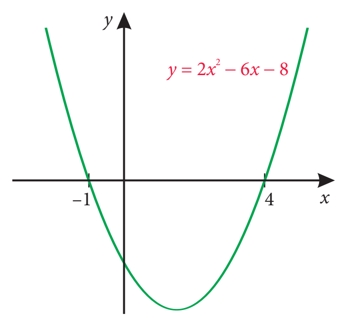
A megoldóképlet szerint az egyenlet valós megoldásai:

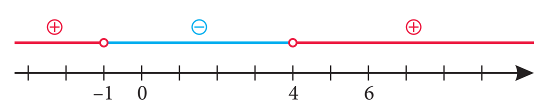
$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-8)}}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{100}}{4} = \frac{6 \pm 10}{4}.$$

Az egyenlet megoldásai a 4 és a (–1).

Eredményünkből az is kiolvasható, hogy az $x \mapsto 2x^2 - 6x - 8$ másodfokú függvény zérushelyei a 4 és a (-1).

Ennek a másodfokú függvénynek a grafikonja tehát egy olyan „felfelé nyíló” parabola, amely az abszcisszatengelyt a (-1)-nél és a 4-nél metszi. A függvény grafikonját **vázolva** láthatjuk, hogy $2x^2 - 6x - 8 > 0$ pontosan akkor teljesül, ha az x olyan valós szám, amely nem eleme a $[-1; 4]$ intervallumnak. Tehát a keresett megoldáshalmaz: $\mathbf{R} \setminus [-1; 4]$. Másként: $x \in \,]-\infty; -1[\, \cup \,]4; +\infty[$.





b) Írjuk fel az egyenlőtlenség két oldalán álló kifejezéseket 2 hatványaként!

$\frac{1}{8} = 2^{-3}$; ezért $\left(\frac{1}{8}\right)^x = (2^{-3})^x = 2^{-3x}$;

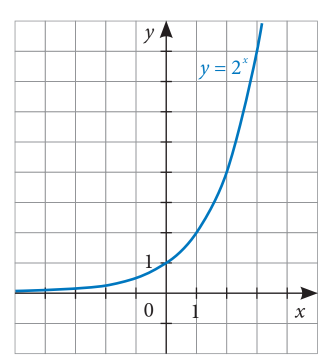
$32 = 2^5$.

Az egyenlőtlenség tehát ilyen alakra hozható: $2^{-3x} > 2^5$.

Az exponenciális függvény ($x \mapsto a^x$; $a \in \mathbf{R}^+$; $a \neq 1$) szigorúan monoton növekedő, ha az alap (a) nagyobb, mint 1, ezért 2^{-3x} akkor lesz nagyobb, mint 2^5, ha $-3x > 5$.

Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza nem változik, ha mindkét oldalt ugyanazzal a negatív számmal szorozzuk vagy osztjuk, és ezzel egy időben a relációs jelet megfordítjuk.

Ezt kapjuk: $x < -\frac{5}{3}$.



FELADAT

1. Oldd meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenségeket!

a) $\frac{4x+9}{2-x} < 0$; **b)** $\frac{x^2-16}{x-4} > 0$.

2. Egy konvex sokszög átlóinak száma több, mint a oldalai számának az ötszöröse.
Hány oldalú ez a sokszög?

3. Mi a következő kifejezések értelmezési tartománya?

a) $\sqrt{2x^2-7x}$; **c)** $\frac{1}{2x^2-7x}$;

b) $\sqrt{7x-2x^2}$; **d)** $\frac{1}{\sqrt{2x^2-7x}}$.

4. Oldd meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenségeket!

a) $3^x \le \frac{1}{9}$;

b) $5^x > -2$;

c) $|x| \ge 12$.

5. Oldd meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenségeket!

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x} \le 8$;

b) $5^{x+4} > \left(\frac{1}{5}\right)^x$;

c) $|2x-1| \ge 5$.

HÁZI FELADAT

1. Írd fel intervallumjelöléssel a következő számhalmazokat:

a) a 3-nál nagyobb valós számok halmazának és a $[0; 7[$ intervallumnak az uniója;

b) a 3-nál nagyobb valós számok halmazának és a $[0; 7[$ intervallumnak a metszete;

c) $\mathbf{R} \setminus [5; +\infty[$;

d) $]-\infty; 13[\cap [5; +\infty[$!

2. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket!

a) $5-2x < 0$; **c)** $4{,}5-1{,}5x-x^2 < 0$;

b) $4{,}5-1{,}5x-x^2 > 0$; **d)** $\frac{4{,}5-1{,}5x-x^2}{5-2x} < 0$.

3. Melyik halmaz az
$x^2-3x-10 \le 0$ és az $x^2-3x-10 \ge 0$
egyenlőtlenség megoldáshalmazának

a) az uniója,

b) a metszete?

4. Oldd meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenségeket!

a) $2^{x-2} < 2^{3x}$;

b) $2^{-2x} \ge \frac{1}{64}$;

c) $|x-5| \le 17$.

RÁADÁS

Korábbi érettségi feladatok

1. *(Középszintű érettségi, 2006. február)* Egy osztály történelemdolgozatot írt. Öt tanuló dolgozata jeles, tíz tanulóé jó, három tanulóé elégséges, két tanuló elégtelen dolgozatot írt. Hányan írtak közepes dolgozatot, ha tudjuk, hogy az osztályátlag 3,410-nél nagyobb és 3,420-nél kisebb?

2. *(Középszintű érettségi, 2010. október)* Egy számtani sorozat első tagja −7, a nyolcadik tagja 14. Adja meg n lehetséges értékeit, ha a sorozat első n tagjának összege legfeljebb 660.

57 Mindenféle egyenlet

FELADAT

1. Oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!
a) $\sqrt{2x^2-7x}=2$; **b)** $\sqrt{7x-2x^2}=2$; **c)** $\sqrt{7x+2}=x+2$; **d)** $\sqrt{2x^2-x-2}-x=0$; **e)** $\sqrt{2x^2-x-2}+x=0$.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Oldjuk meg (algebrai megfontolások alapján) az
$|x-2|=2x-1$
egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás

Tudjuk, hogy $|a|=\begin{cases} a, \text{ ha } a\geq 0; \\ -a, \text{ ha } a<0. \end{cases}$

Ennek megfelelően
$|x-2|=x-2$, ha $x-2\geq 0$, vagyis $x\geq 2$, és
$|x-2|=-(x-2)=2-x$, ha $x-2<0$, vagyis $x<2$.

Első eset: $x\geq 2$
Most az adott egyenlet így írható: $x-2=2x-1$.
A mérlegelvvel megoldva $x=-1$.
Mivel a -1 kisebb a 2-nél, ez az első eset nem ad megoldást az egyenletünkre.

Második eset: $x<2$
Most az adott egyenlet így írható: $2-x=2x-1$.
A mérlegelvvel megoldva azt kapjuk, hogy $3x=3$, $x=1$.
Az 1 kisebb a 2-nél, és behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy valóban gyöke is az eredeti egyenletnek:
$|1-2|=1$ és $2\cdot 1-1=1$.
Tehát az adott egyenlet megoldáshalmaza: $\{1\}$.

FELADAT

2. Oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $|x+6|=2$;
b) $|3x-4|=0$;
c) $|24+8x|=8x+24$;
d) $|x-4|=4-x$;
e) $\sqrt{5-x}+|x+6|=0$;
f) $\sqrt{x^2-9}+|3-x|=0$;
g) $|3x-4|\cdot\sqrt{8-y}=0$.

KIDOLGOZOTT FELADAT

2. Oldd meg grafikusan a következő egyenletet a valós számok lehető legbővebb részhalmazán, ahol a kifejezések értelmezhetők!
$\sqrt{x+1}=|x|-1$

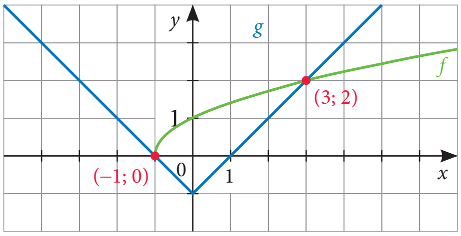
Megoldás
Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az
$f(x)=\sqrt{x+1}$ és a $g(x)=|x|-1$
függvényeket!

A két grafikonnak két közös pontja van, a $(-1; 0)$ és a $(3; 2)$.
A közös pontok *első* koordinátái adják az egyenlet megoldásait: -1 és 3.
Ellenőrizzük a leolvasott értékeket!

$\sqrt{-1+1} = 0$ és $|-1|-1 = 0$, illetve

$\sqrt{3+1} = 2$ és $|3|-1 = 2$.

Ebből az egyenlet megoldásai az $x_1 = -1$ és az $x_2 = 3$.



FELADAT

3. Oldd meg grafikusan a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{x+3}+2 = |x|-1$; **b)** $(x-1)^2+2 = |x+2|-1$; **c)** $\sqrt{x+2} = (x+1)^2-7$.

HÁZI FELADAT

1. Oldd meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{5-x} = x-5$;
b) $1-2x = \sqrt{4-15x}$;
c) $|5x-12| = 3$;
d) $|5x-12| = 5x-12$;
e) $|5x-12| = 12-5x$;
f) $|5x-12| = x+3$;
g) $\sqrt{x^2-16} = x-4$.

2. Oldd meg grafikusan a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{x-1} = -|x-4|+3$;
b) $(x+2)^2+4 = |x+2|$;
c) $-x-5 = -(x+3)^2+4$.

RÁADÁS

1. Legyen a k egész szám. A k melyik értékeire lesz a $\frac{24}{k-1}$ tört értéke

a) természetes szám;
b) nulla;
c) egész szám;
d) pozitív szám;
e) negatív szám;
f) 5-nél nagyobb;
g) 3-nál kisebb?

58 Szöveges feladatok

Dolgozzatok egyénileg, vagy alkossatok 3-4 fős csoportokat, és együtt oldjátok meg a feladatokat!

FELADAT

1. Egy futballklub két különböző teljesítményű fűnyírót használ a pálya füvének gondozására. A kisebb géppel 30 perc alatt lehet lenyírni a pálya füvét. A két géppel együtt ez mindössze 12 percet vesz igénybe. Mennyi ideig tartana a munka csak a nagyobbik géppel?

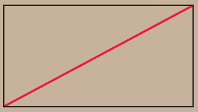
a) Egyedül a nagyobb gép számára szükséges idő legyen x perc. Töltsd ki a táblázat üres helyeit!

	A kisebb gép egyedül	A nagyobb gép egyedül	A két gép együtt
Hány perc alatt nyírja le a füvet?		x	
1 perc alatt a pálya hányadrészét nyírja le?			
12 perc alatt a pálya hányadrészét nyírja le?			

b) Oldd meg egyenlettel a feladatot!

c) Oldd meg a feladatot következtetéssel, egyenlet nélkül!

2. Egy téglalap kerülete 92 mm, az átlója 34 mm hosszú. Mekkorák az oldalai?



a) Bence így kezdte a megoldást: legyen a téglalap oldalainak hossza x mm, illetve y mm. Ekkor a kerület miatt $2x + 2y = 92$, az átló hosszára pedig felírható a Pitagorasz-tétel: $x^2 + y^2 = 34^2$. Fejezd be Bence elkezdett megoldását!

b) Dönci így fogott hozzá a feladat megoldásához: ha a téglalap egyik oldala x mm-es, akkor a másik oldal hossza a Pitagorasz-tétel alapján $\sqrt{34^2 - x^2}$ mm. Tehát a téglalap kerülete így írható fel: $2x + 2\sqrt{34^2 - x^2} = 92$. Fejezd be a megoldást, oldd meg a felírt egyenletet a pozitív számok halmazán!

3. A sarki boltban egy állattartó minden héten 5 doboz macskaeledel-konzervet és 3 doboz kutyaeledel-konzervet vásárol, és minden alkalommal 2250 forintot fizet. Árváltozások miatt a macskaeledel 20%-kal olcsóbb, a kutyaeledel pedig 10%-kal drágább lett, de az állattartó továbbra is 2250 forintot fizet a 8 doboz konzervért. Mennyibe került eredetileg egy-egy konzerv? Oldd meg következtetéssel is ezt a feladatot!

4. A diákok az osztálykirándulásra 2400 forintért gyümölcsöt vásárolnak. Ha a kilónként 40 forinttal drágább mandarint vásárolják meg, akkor 2 kilogrammal kevesebbet tudnak venni, mint tervezték. Hány kilogramm mandarin vásárlását tervezték, és mennyibe kerül ennek kilója?

5. Egy derékszögű háromszög átfogója 144,5 cm hosszú, az átfogóhoz tartozó magassága pedig 60 cm.

a) Mekkora szakaszokra bontja az átfogót a hozzá tartozó magasság?

b) Mekkorák a háromszög befogói, mekkora a háromszög területe?

HÁZI FELADAT

1. Egy szakmunkás 8 nappal rövidebb idő alatt végez el egy adott munkát, mint egy betanított munkás. Ha együtt dolgoznak, akkor 3 nap alatt elkészülnek a munkával. Hány nap alatt végzi el a munkát egyedül a szakmunkás, illetve a betanított munkás?

2. Bencéékhez szombaton vendégek jönnek, ezért édesanyja elküldte a boltba almaléért és barackléért. Bence 6 doboz almaléért és 4 doboz barackléért 2720 Ft-ot fizetett. Otthon derült ki, hogy valójában 6 doboz baracklét és 4 doboz almalét kellett volna hoznia, de így legalább spórolt 60 Ft-ot. Mennyibe kerül egy doboz almalé, illetve egy doboz baracklé?

3. Egy telefontársaság kétféle díjszabást kínál. Mindkét díjszabás esetén van fizetendő havidíj és percdíj is. A percdíj független a beszélgetésre fordított időtartamtól, a havidíjat pedig akkor is ki kell fizetni, ha egyetlen percet sem beszélgettek az adott hónapban.

Az alábbi táblázat néhány példán mutatja be a fizetendő összegeket.

	Havi 10 óra beszélgetési idő	Havi 30 óra beszélgetési idő
„A” díjszabás	13 040 Ft	27 440 Ft
„B” díjszabás	12 500 Ft	31 700 Ft

Mennyi beszélgetési időnél lesz a havi telefonszámla azonos a két esetben, és mekkora ez az összeg?

RÁADÁS

1. A hajó és a kapitány együtt 98 évesek. A hajó kétszer annyi idős, mint amennyi a kapitány volt akkor, amikor a hajó annyi idős volt, mint a kapitány most. Hány éves a kapitány?

2. Melyik az a legkisebb, 6-ra végződő természetes szám, amely a négyszeresére változik, ha az egyesek helyén álló 6-os számjegy helyét megváltoztatjuk: a szám végéről áthelyezzük a legelejére?

Korábbi érettségi feladatok

3. *(Középszintű érettségi 2012. május)* A testtömegindex kiszámítása során a vizsgált személy kilogrammban megadott tömegét osztják a méterben mért testmagasságának négyzetével. Számítsa ki Károly testtömegindexét, ha magassága 185 cm, tömege pedig 87 kg!

4. *(Középszintű érettségi 2010. május)* Számítsa ki azt a két pozitív számot, amelyek számtani (aritmetikai) közepe 8, mértani (geometriai) közepe pedig 4,8!

5. *(Középszintű érettségi 2009. május)* Egy kisüzem 6 egyforma teljesítményű gépe 12 nap alatt gyártaná le a megrendelt csavarmennyiséget. Hány ugyanilyen teljesítményű gépnek kellene dolgoznia ahhoz, hogy ugyanennyi csavart 4 nap alatt készítsenek el?

6. *(Középszintű érettségi 2012. október)* Stefi mobiltelefon-költségeinek fedezésére feltöltőkártyát szokott vásárolni. A mobiltársaság ebben az esetben sem előfizetési díjat, sem hívásonkénti kapcsolási díjat nem számol fel. Csúcsidőben a percdíj 25 forinttal drágább, mint csúcsidőn kívül. Stefi az elmúlt négy hétben összesen 2 órát telefonált, és 4000 Ft-ot használt fel kártyája egyenlegéből úgy, hogy ugyanannyi pénzt költött csúcsidőn belüli, mint csúcsidőn kívüli beszélgetésekre. Hány percet beszélt Stefi mobiltelefonján csúcsidőben az elmúlt négy hétben?

59 Egyenletrendszerek

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Oldd meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\left.\begin{aligned} \frac{2}{x} + \frac{5}{x+y} &= 27 \\ \frac{4}{x} + \frac{3}{x+y} &= 19 \end{aligned}\right\}$$

Megoldás

Az egyenletrendszer értelmezési tartománya: $x, y \in \mathbf{R}$; $x \neq 0$; $x + y \neq 0$.

Vezessünk be új ismeretleneket!

Legyen $a = \frac{1}{x}$ és $b = \frac{1}{x+y}$.

Az új ismeretlenekkel írjuk fel az egyenleteket!

$$\left.\begin{aligned} 2a + 5b &= 27 \\ 4a + 3b &= 19 \end{aligned}\right\}$$

Oldjuk meg ezt az egyenletrendszert, például az egyenlő együtthatók módszerével! Ehhez szorozzuk meg az első egyenletet (-2)-vel!

$$\left.\begin{aligned} -4a - 10b &= -54 \\ 4a + 3b &= 19 \end{aligned}\right\}$$

A két egyenletet összeadva: $-7b = -35$; ebből: $b = 5$.

Helyettesítsük be $b = 5$ értékét például a második egyenletbe!

$4a + 15 = 19$; ebből $a = 1$.

Az x és y értékét megkaphatjuk a és b értékéből.

$\frac{1}{x} = 1$, ebből $x = 1$.

$\frac{1}{x+y} = 5$; ebből $x + y = 0{,}2$; ebből $y = -0{,}8$.

Az egyenletrendszer megoldása az $(1; -0{,}8)$ számpár, amit behelyettesítéssel tudunk ellenőrizni.

FELADAT

1. Oldd meg az egyenletrendszereket az egész számok halmazán!

a)
$$\left.\begin{aligned} 2x + 1{,}5y &= 18 \\ \frac{x}{2} - \frac{2y}{3} &= \frac{1}{3} \end{aligned}\right\}$$

b)
$$\left.\begin{aligned} \frac{2x+1}{5} - \frac{y-2}{4} &= -\frac{1}{10} \\ \frac{2x+4}{6} &= \frac{7-5y}{2} + 3 \end{aligned}\right\}$$

c)
$$\left.\begin{aligned} (x+3)(y+2) &= xy \\ (x+1)(y-2) &= xy \end{aligned}\right\}$$

2. Oldd meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} &= \frac{1}{6} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{5}{6} \end{aligned}\right\}$$

3. A végzős osztály búcsúkirándulásra készül. Egy panziót akarnak lefoglalni, melyben minden szobában legfeljebb három embert tudnak elhelyezni. Ha minden szobában ketten lesznek, akkor 8 főt nem tudnak elhelyezni. Ha azonban minden szobában hárman lesznek, akkor az utolsó szobába már csak 1 ember jut. Hány szoba volt a panzióban, és hányan mentek a kirándulásra?

KIDOLGOZOTT FELADAT

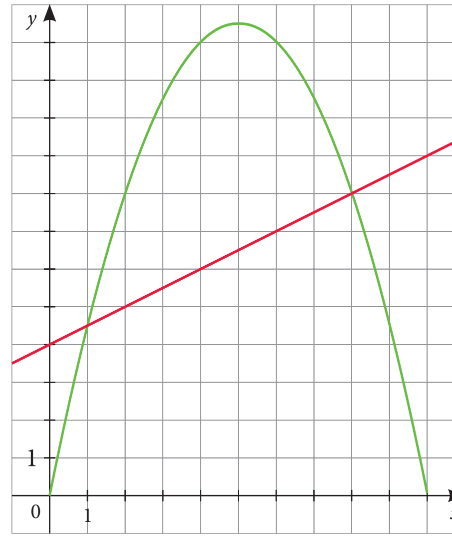
2. Az egyik lézerharcpálya a következő szolgáltatást kínálja: az agyaggalamb-lövészethez hasonlóan kilőnek egy „lövedéket”, és lézerrel el kell találni, így lehet pontokat gyűjteni.

a) Ábrázoljuk koordináta-rendszerben a lövedék és a lézersugár pályáját, ha a lövedék az $y = 5x - 0{,}5x^2$ egyenletű görbén mozog, a lézersugár pedig az $y = 0{,}5x + 4$ egyenletű egyenesen!

b) Adjuk meg azoknak a pozícióknak a koordinátáit, amelyekben eltalálhatja a lézersugár a lövedéket!

Megoldás

a) Ábrázoljuk az $y = 5x - 0{,}5x^2$ és az $y = 0{,}5x + 4$ függvényt közös koordináta-rendszerben!



b) Olvassuk le a grafikonról a metszéspontok koordinátáit!
Az első koordináták: $x_1 = 1$ és $x_2 = 8$.
Az $x_1 = 1$-et helyettesítve mindkét egyenletbe mindkét egyenlet esetében $y = 4{,}5$. Ezért az $(1; 4{,}5)$ pont közös pontja a két görbének. Az $x_2 = 8$-at helyettesítve mindkét egyenlet esetében $y = 8$. Ezért a $(8; 8)$ pont közös pontja a két görbének.
A találati pozíciók tehát: $(1; 4{,}5)$ és $(8; 8)$.

FELADAT

4. Oldd meg az egyenletrendszert az egész számok halmazán grafikus módszerrel!

$$\left.\begin{aligned} -x^2 + 10x - 19 &= y \\ 3 - y &= |x - 6| \end{aligned}\right\}$$

5. Oldd meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\left.\begin{aligned} \sin x + \cos y &= 1 \\ \cos y - \sin x &= 0 \end{aligned}\right\}$$

HÁZI FELADAT

1. Oldd meg az egyenletrendszereket a természetes számok halmazán!

a) $4x = 6 - 3y$ és $x + 0{,}5y = 2$;

b) $x - 6y = 5$ és $\dfrac{2x - 5y}{5} + \dfrac{2y - 3x}{3} = -3$.

2. Keresd meg a következő egyenletrendszerek megoldáshalmazát grafikus módszerrel!
Az alaphalmaz legyen a valós számok halmaza!

a) $|x + 5| = y - 2$ és $-0{,}5x = y - 1$;

b) $|x - 3| = y + 4$ és $-x^2 + 6x - 11 = y$.

3. Egy baráti társaság néhány napos balatoni pihenést tervez. A közös költségekre 12 000 Ft-ot szednek össze fejenként. A nyaralás végén kiderül, hogy 4000 Ft-tal kevesebb pénzt szedtek össze, mint amennyire szükség volt. Ha 13 000 Ft-ot szedtek volna, akkor pont annyival gyűlt volna össze több pénz, mint amennyivel kevesebbet szedtek össze eredetileg. Hány fős ez a baráti társaság?

60 Ismeretlenek a kitevőben

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Oldjuk meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $8^x \cdot 8^{x+\frac{1}{3}} = 64;$ **b)** $8^x + 8^{x+\frac{1}{3}} = 6.$

Megoldás

a) Az azonos alapú hatványok szorzatára vonatkozó azonosság szerint az egyenlet bal oldala írható így is: $8^{x+x+\frac{1}{3}}$, továbbá igaz az is, hogy $64 = 8^2$.

A megoldandó egyenlet tehát: $8^{2x+\frac{1}{3}} = 8^2$.

Ha a 8-nak két hatványa egyenlő, akkor a kitevőknek is egyenlőknek kell lenniük, mert nagyobb kitevőhöz a 8-nak nagyobb hatványa tartozik. (Másképp: az $x \mapsto 8^x$ exponenciális függvény szigorúan monoton növekedő.)

Tehát $2x + \frac{1}{3} = 2$, amiből $x = \frac{5}{6}$ adódik.

Ellenőrzés: $8^{\frac{5}{6}} \cdot 8^{\frac{5}{6}+\frac{1}{3}} = 8^{\frac{5}{6}+\frac{5}{6}+\frac{1}{3}} = 8^{\frac{12}{6}} = 8^2 = 64$, tehát az $\frac{5}{6}$ valóban megoldása az egyenletnek.

b) A hatványozás azonosságát használva az egyenlet írható így is: $8^x + 8^{\frac{1}{3}} \cdot 8^x = 6.$

Mivel $8^{\frac{1}{3}} = 2$, ezért az egyenlet: $8^x + 2 \cdot 8^x = 6;$ $3 \cdot 8^x = 6;$ $8^x = 2.$

A 8-nak az x-edik hatványa egyenlő a 8-nak az $\frac{1}{3}$-ik hatványával, tehát $x = \frac{1}{3}$.

Ellenőrzés: $8^{\frac{1}{3}} + 8^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} + 8^{\frac{2}{3}} = 2 + 4 = 6$, ezért az $\frac{1}{3}$ valóban megoldása az egyenletnek.

2. Egy mennyiség változását az $M(t) = 250 \cdot 0{,}9^t$ képlet írja le, ahol t a kezdeti állapot óta eltelt idő, percekben mérve. Mennyi az $M(0)$ kezdeti érték, és mennyi a felezési idő ebben a folyamatban?

(*Felezési idő*: az exponenciálisan csökkenő mennyiség; ennyi idő alatt csökken a kezdeti érték a felére.)

Megoldás

$M(0) = 250 \cdot 0{,}9^0 = 250 \cdot 1 = 250.$

A felezési idő legyen T.

Ekkor $250 \cdot 0{,}9^T = \frac{250}{2}$, vagyis $0{,}9^T = 0{,}5.$

Ebből $T = \log_{0,9} 0{,}5 \approx 6{,}58$ (perc).

FELADAT

1. Melyik számot jelölheti az y, ha $4^{y^2-15y+56} = 1$?

2. Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $4^{x+1} \cdot 4^x \cdot 4^{x-1} = 0{,}25;$

b) $4^{x+1} + 4^x + 4^{x-1} = 10{,}5.$

3. Egy mennyiség időbeli változását az

$M(t) = 28{,}9 \cdot 2^{-\frac{t}{8}}$

képlet írja le, amelyben a t a kezdeti állapot óta eltelt időt jelöli, percekben mérve. Mennyi az $M(0)$ kezdeti érték, és mennyi a felezési idő ebben a folyamatban?

4. Mennyi a logaritmus alapszáma?

a) $\log_a 100 = 2;$ **c)** $\log_a 4 = -2.$

b) $\log_a 5 = 0{,}5;$

5. Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $5 \cdot 10^{2x-3} = 0{,}5;$

b) $3{,}8 \cdot 7^{1-\frac{2x}{3}} = 0{,}38;$

c) $\log_2 (3x - 2{,}75) = -2;$

d) $\log_x (14x - 49) = 2;$

e) $3 - 2\lg x = 5 + \lg (10x);$

f) $4^{x-0,5} + 31 \cdot 2^{x-3} = 1;$

g) $0{,}5 \lg x = 2 \lg 2.$

HÁZI FELADAT

1. Add meg az egyenletek értelmezési tartományát, majd oldd is meg az egyenleteket!

a) $9^x - 6 \cdot 3^x = 27$;

b) $2^{x+1} + 8^{\frac{x}{3}} - 4^{0,5x-0,5} = 80$;

c) $\lg x + \lg(x+2) = \lg 15$;

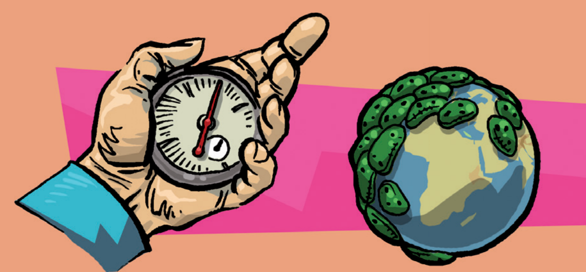
d) $4,2 \cdot \lg(8x) = 16,8$;

e) $\log_2(3x - 2,75) = -2$;

f) $\dfrac{\log_{0,5}(2x+5)}{\log_{0,5}(x+4)} = 1$;

2. Mennyi az $M(t) = 6 \cdot 10^{23} \cdot 2^{-\frac{t}{5730}}$ képlettel leírható mennyiség felezési ideje, ahol t a kezdeti állapot óta eltelt időt jelöli, években mérve?

3. A papucsállatkák átlagban 27 óra alatt osztódnak ketté. Mennyi időre lenne szükség ahhoz, hogy egyetlen papucsállatka utódainak térfogata egyenlő legyen a Föld térfogatával, ha az osztódást követően valamennyi papucsállatka életben maradna? A Föld sugara 6378 km, és 1 papucsállatka térfogatát közelítsd 1,3 mm^3-rel! (Számolj normálalakkal!)



4. A Föld népessége évente kb. 1,48%-kal növekedett a 2000-es évek elején. 2001-ben 6,2 milliárd ember élt a Földön. Melyik évben érné el az össznépesség a 8 milliárdot változatlan gyarapodási ütemben?

RÁADÁS

Korábbi érettségi feladatok

1. *(Középszintű érettségi, 2012. október)* A mobiltársaság Telint néven új mobilinternet-csomagot vezet be a piacra január elsején. Januárban 10 000 új előfizetőt várnak, majd ezután minden hónapban az előző havinál 7,5%-kal több új előfizetőre számítanak. Abban a hónapban, amikor az adott havi új előfizetők száma eléri a 20 000-et, a társaság változtatni szeretne a Telint csomag árán. Számítsa ki, hogy a tervek alapján melyik hónapban éri el a Telint csomag egyhavi új előfizetőinek a száma a 20 000-et!

2. *(Középszintű érettségi, 2006. október)* A szociológusok az országok statisztikai adatainak összehasonlításánál használják a következő tapasztalati képletet:

$$É = 75,5 - 5 \cdot 10^{\frac{6000-G}{6090}}.$$

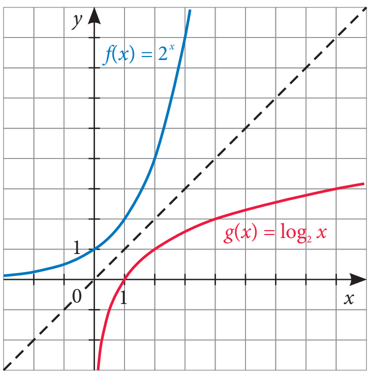
A képletben az $É$ a születéskor várható átlagos élettartam években, G az ország egy főre jutó nemzeti összterméke (a GDP) reálértékben, átszámítva 1980-as dollárra.

a) Mennyi volt 2005-ben a várható élettartam abban az országban, amelyben akkor a G nagysága 1090 dollár volt?

b) Mennyivel változhat ebben az országban a várható élettartam 2020-ra, ha a gazdasági előrejelzések szerint ekkorra G értéke a 2005-ös szint háromszorosára nő?

c) Egy másik országban 2005-ben a születéskor várható átlagos élettartam 68 év. Mekkora volt ekkor ebben az országban a GDP (G) nagysága (reálértékben, átszámítva 1980-as dollárra)?

Függvények, sorozatok



A felismerés, hogy a körülöttünk lévő világ jelenségei egymással összefüggnek, egyidős az emberiséggel. A matematikában azonban a függvény fogalma (legalábbis mai formájában) viszonylag későn alakult ki: a kifejezés *Gottfried Leibniz* német matematikus egy 1673-ban íródott levelében bukkan fel először. Az azóta eltelt szűk három és fél évszázad alatt a függvények vizsgálata a matematika egyik leglátványosabb területévé nőtte ki magát. Függvényekkel dolgozik a marsjárót célba juttató mérnök, a tőzsdei elemző, de az egyszerű átlagember is, amikor például a heti időjárás-előrejelzést tanulmányozgatja, vagy a pékségben megvett zsömlék árát igyekszik kiszámítani.

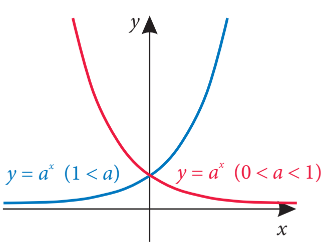
FOGALOMTÁR, TÉTELEK

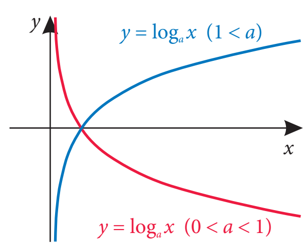
I. FÜGGVÉNYEK (Részletesen lásd 9. osztályos tankönyv, 44–57. lecke, illetve 10. osztályos tankönyv, 23–31. lecke és 11. osztályos tankönyv, 19–24., 47. és 54. lecke.)

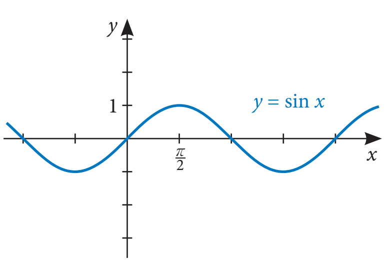
D	Legyen *A* és *B* egy-egy nem üres halmaz, *A* és *B* egyenlő is lehet. Ha az *A* minden eleméhez hozzárendeljük a *B* egy elemét, akkor azt mondjuk, hogy megadtunk egy olyan függvényt, amelynek az **értelmezési tartománya** *A* és **képhalmaza** *B*. Másképp: **az *A* halmazt leképeztük a *B* halmazba.** A *B* halmaznak a hozzárendelésben szereplő elemei alkotják a függvény **értékkészletét**.
D	Egy függvény **hozzárendelési szabályának** azt az utasítást nevezzük, amely megszabja, hogy az értelmezési tartomány egyes elemeihez a képhalmaznak melyik elemét kell hozzárendelni. A függvényeket általában az értelmezési tartományukkal és a hozzárendelési szabályukkal szoktuk **megadni**.
D	Egy függvényt gyakran egy betűvel, például *f*-fel jelölünk. Egy *f*-fel jelölt függvény értelmezési tartományának a jele D_f, értékkészletének a jele R_f, a D_f valamely *x* eleméhez hozzárendelt elem jele: $f(x)$. Ez a függvénynek az *x* helyen vett **helyettesítési értéke**. A hozzárendelést a $\mapsto$ (talpas nyíl) jellel szoktuk leírni.
D	Ha egy függvény az értelmezési tartomány bármely két különböző eleméhez az értékkészletnek különböző elemeit rendeli hozzá, akkor ezt a függvényt **kölcsönösen egyértelmű leképezésnek** nevezzük.
D	Ha egy függvény értelmezési tartománya is és értékkészlete is számhalmaz, akkor ezt **valós-valós függvénynek** mondjuk. Jelekkel: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (olvasd: er nyíl er függvény). *Megállapodás*: ha egy függvény értelmezési tartománya az **R**, akkor azt nem kötelező kiírni.
D	Elnevezések $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvények esetében: **zérushely** – az értelmezési tartomány olyan eleme, amelyhez a 0 van hozzárendelve; **maximum** – az értékkészlet legnagyobb eleme, ha ez létezik; **maximumhely** – az értelmezési tartomány olyan eleme, amelyhez a maximum van hozzárendelve; **minimum** – az értékkészlet legkisebb eleme, ha ez létezik; **minimumhely** – az értelmezési tartomány olyan eleme, amelyhez a minimum van hozzárendelve.
D	Egy $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt **növekedőnek** (**csökkenőnek**) nevezünk, ha az értelmezési tartomány bármely két eleme közül a nagyobbikhoz nem tartozik kisebb (nagyobb) helyettesítési érték, mint a kisebbikhez.
D	Egy $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt **szigorúan monoton növekedőnek (csökkenőnek)** nevezünk, ha az értelmezési tartomány bármely két eleme közül a nagyobbikhoz nagyobb (kisebb) helyettesítési érték tartozik, mint a kisebbikhez.

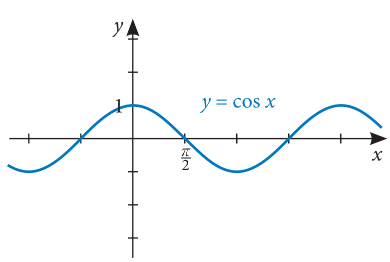
D	Néhány fontos függvénytípus hozzárendelési szabálya: **állandó függvény** $x \mapsto a \ \ (a \in \mathbf{R})$ **egyenes arányosság** $x \mapsto ax \ \ (a \in \mathbf{R},\, a \neq 0)$ **fordított arányosság** $x \mapsto \frac{a}{x} \ \ (a \in \mathbf{R},\, a \neq 0)$ **elsőfokú függvény** $x \mapsto ax + b \ \ (a, b \in \mathbf{R},\, a \neq 0)$ **másodfokú függvény** $x \mapsto ax^2 + bx + c \ \ (a, b, c \in \mathbf{R},\, a \neq 0)$ **hatványfüggvények** $x \mapsto x^n \ \ (n \in \mathbf{N}^+)$ **négyzetgyökfüggvény** $x \mapsto \sqrt{x}$ *a* **alapú exponenciális függvény** $x \mapsto a^x \ \ (a \in \mathbf{R}^+)$ *a* **alapú logaritmusfüggvény** $x \mapsto \log_a x \ \ (a \in \mathbf{R}^+,\, a \neq 1)$ 10-es **alapú logaritmusfüggvény** $x \mapsto \lg x$ **trigonometrikus függvények** $x \mapsto \sin x$; $x \mapsto \cos x$; $x \mapsto \operatorname{tg} x$
T	**Páros** függvény grafikonja szimmetrikus az ordinátatengelyre, azaz az y tengelyre. **Páratlan** függvény grafikonja szimmetrikus az origóra. Ha **periodikus** egy függvény, akkor van olyan x tengellyel párhuzamos eltolás, amelynek hossza nem 0, és amely a függvény grafikonját önmagába viszi át.

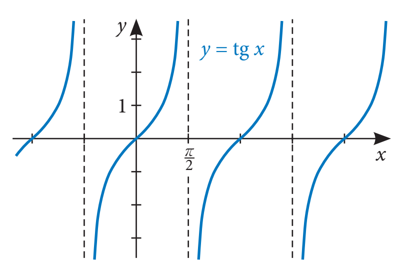
NÉHÁNY NEHEZEBB FÜGGVÉNY GRAFIKONJA











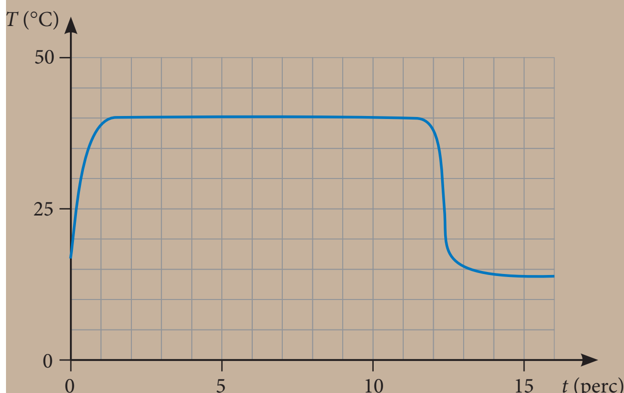
II. SOROZATOK (Részletesen lásd 12. osztályos tankönyv, 26–33. lecke.)

D	Azokat a függvényeket, amelyeknek az értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza, értékei pedig valós számok, **számsorozatoknak** nevezzük.
D	Ha egy számsorozathoz van olyan szám, amelyet bármelyik taghoz hozzáadva megkapjuk a következő tagot, akkor ezt **számtani sorozatnak** mondjuk.
T	Ha (a_n) olyan számtani sorozat, amelynek első tagja a_1 és a differenciája d, akkor minden $n \in \mathbf{N}^+$ esetén $a_n = a_1 + (n-1)d$. Ha az (a_n) számtani sorozatban $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, akkor $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.
D	Ha egy számsorozathoz van olyan nullától különböző szám, amellyel bármelyik tagot megszorozva megkapjuk a következő tagot, akkor ezt **mértani sorozatnak** nevezzük.
T	Ha (a_n) olyan mértani sorozat, amelynek a hányadosa q, akkor minden $n \in \mathbf{N}^+$ esetén $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Legyen az (a_n) mértani sorozat első tagja a_1, hányadosa q és $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Ekkor $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$, ha $q \neq 1$. Ha $q = 1$, akkor a mértani sorozat minden tagja a_1-gyel egyenlő, ezért ekkor $S_n = n \cdot a_1$.

61 Grafikonok és egyenletek

FELADAT

1. A meleg vizes tartályból a kifolyónyíláson átfolyva egy hosszabb csövön keresztül jut el a víz a csaphoz. A mellékelt grafikon a csapból kifolyó víz hőmérsékletét ábrázolja az eltelt idő függvényében. A tartályban lévő meleg vízhez a befolyónyíláson át folyamatosan hidegebb víz áramlik.



a) Mennyi ideig tart, amíg kifolyik a csaphoz vezető csőben lévő hideg víz, és elkezd folyni a meleg?

b) Mekkora hőmérsékletre van beállítva a vízmelegítő?

c) Mennyi idő alatt fogy ki a melegítő tartályából az előre felmelegített víz?

d) Milyen hőmérsékletű víz folyik a csapból ezután?

2. **a)** Határozd meg az $x \mapsto 5x^2 + 3x - 36$ függvény zérushelyeit!

b) Az $x \mapsto 3x^2 - 4x + c$ függvény zérushelye -1. Mennyi a c értéke?

3. Add meg az elsőfokú f függvény grafikonját és a hozzárendelési szabályát, ha

a) a grafikon átmegy a $P(0;\ 2)$ ponton és a $Q(1;\ 5)$ ponton;

b) a grafikon átmegy az origón és meredeksége $-0{,}5$;

c) a grafikon átmegy a $P(0;\ -4)$ ponton és meredeksége $1{,}5$;

d) a függvény zérushelye -3 és a grafikon meredeksége 2;

e) $f(2) = 3$ és $f(3) = 1$!

4. Megadunk négy függvényt. Az értelmezési tartományuk a $[-1;\ 5]$ intervallum, hozzárendelési szabályuk

$x \mapsto x^2$, $\quad x \mapsto x^2 - 6x$,

$x \mapsto x^2 - 6x + 9$, $\quad x \mapsto x^2 - 6x + 8$.

Ábrázold a négy függvényt! Add meg mindegyik függvény zérushelyeit!

5. Az f másodfokú függvény minimuma -1, minimumhelye -3, a függvény grafikonja átmegy a $P(-1,\ 3)$ ponton. Add meg f hozzárendelési szabályát!

6. Az f és a g függvény értelmezési tartománya $\mathbf{R}$, $f(x) = 3 - 2x$, $g(x) = x^2$.

a) Ábrázold közös koordináta-rendszerben az f és a g függvényt!

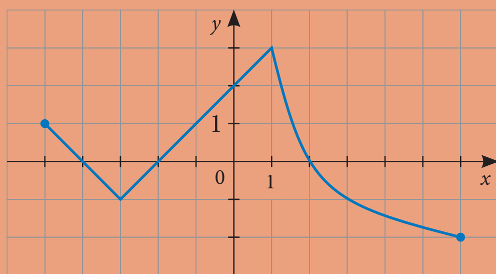
b) Oldd meg grafikusan az $f(x) = g(x)$ egyenletet!

c) Ellenőrizd eredményedet a másodfokú egyenlet megoldóképletével!

d) Oldd meg grafikusan az $f(x) > g(x)$ egyenlőtlenséget!

HÁZI FELADAT

1. Az f függvényt a grafikonjával adtuk meg.



a) Határozd meg a függvény értelmezési tartományát, értékkészletét!
b) Add meg a függvény szélsőértékeit és szélsőértékhelyeit!
c) Mely számok a függvény zérushelyei?
d) Értelmezési tartományának mely részében növekedő és mely részében csökkenő a függvény?
e) Igaz-e, hogy az f függvény monoton?
f) Mennyi $f(-3)$, $f(0)$ és $f(3)$?
g) Oldd meg a valós számok halmazán az $f(x) = 1$ egyenletet!
h) Oldd meg a valós számok halmazán az $f(x) \geq 0$ egyenlőtlenséget!

2. Az $x \mapsto 3x + c$ függvény zérushelye 6. Mennyi a c értéke?

3. Megadunk négy függvényt. Az értelmezési tartományuk a $[-1; 5]$ intervallum, hozzárendelési szabályuk
$x \mapsto x^2$, $\quad x \mapsto -x^2 + 6x$,
$x \mapsto -x^2 + 6x - 9$,
$x \mapsto -x^2 + 6x - 8$.
Ábrázold közös koordináta-rendszerben a négy függvényt! Add meg mindegyiknek a zérushelyét!

4. Az f és a g függvény értelmezési tartománya a $]-4{,}5; 0]$ intervallum,
$f(x) = x^2 + 4x + 3$, $\quad g(x) = |x^2 + 4x + 3|$.
a) Rajzold meg az f és a g függvény grafikonját!
b) Értelmezési tartományának melyik részén növekedő és melyiken fogyó az f függvény?
c) Melyik halmaz az f függvény értékkészlete?
d) Van-e f-nek maximuma vagy minimuma? Ha van, melyik szám az?
e) Értelmezési tartományának melyik részén növekedő és melyiken fogyó a g függvény?
f) Melyik halmaz a g függvény értékkészlete?
g) Van-e g-nek maximuma vagy minimuma? Ha van, melyik szám az?

RÁADÁS

Korábbi érettségi feladatok

1. *(Középszintű érettségi, 2012. október)* Legyenek f és g a valós számok halmazán értelmezett függvények, továbbá:
$f(x) = 5x + 5{,}25$ és $g(x) = x^2 + 2x + 3{,}5$
a) Számítsa ki az alábbi táblázatok hiányzó értékeit!
b) Adja meg a g függvény értékkészletét!
c) Oldja meg az $5x + 5{,}25 > x^2 + 2x + 3{,}5$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

x	3
$f(x)$	

x	
$g(x)$	2,5

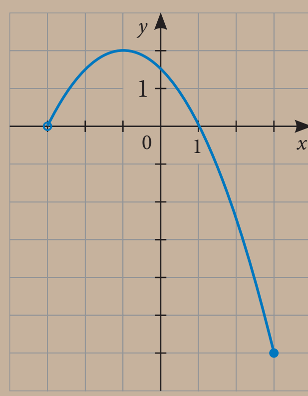
2. *(Középszintű érettségi, 2010. május)*
a) Rajzolja meg derékszögű koordináta-rendszerben a $]-1; 6]$ intervallumon értelmezett, $x \mapsto |x - 2| + 3$ hozzárendelésű függvény grafikonját!
b) Állapítsa meg a függvény értékkészletét, és adja meg az összes zérushelyét!
c) Döntse el, hogy a $P(3{,}2; 1{,}58)$ pont rajta van-e a függvény grafikonján! Válaszát számítással indokolja!
d) Töltse ki az alábbi táblázatot, és adja meg a függvényértékek (a hét szám) mediánját!

x	$-0{,}5$	0	1,7	2	2,02	4	5,5
$-\lvert x - 2\rvert + 3$							

62 Függvény és grafikonja

FELADAT

1. Állapítsd meg az ábrázolt függvény

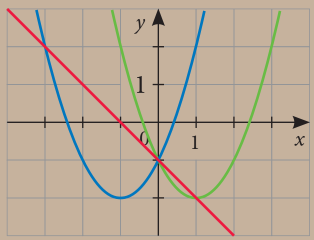


a) értelmezési tartományát és az értékkészletét;
b) maximumát és a maximumhelyét;
c) minimumát és a minimumhelyét;
d) zérushelyét!

2. Folytasd az előző feladatot! Mi az ábrázolt függvény hozzárendelési szabálya, ha a grafikonja egy parabola része?

3. Egyes országokban az autópályán nemcsak a túl gyorsan, hanem a túl lassan haladó autósokat is megbüntetik. Tegyük fel, hogy egy bizonyos autópályán a megengedett legkisebb sebesség 70 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a legnagyobb 130 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. A sebességhatárokat be nem tartókat átszámítva annyiszor 1200 Ft-nak megfelelő összegre büntetik, ahány $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-val a sebesség alulmúlja a minimum, vagy meghaladja a maximum megengedett sebességet. Add meg ennek a függvénynek a hozzárendelési szabályát!

4. Az alábbi ábrán három függvény grafikonját látod. Közülük kettő tartozik ehhez a feladathoz. Válaszd ki a megfelelő kettőt, majd segítségükkel oldd meg grafikusan



a) az $(x+1)^2-2=-x-1$ egyenletet;
b) az $(x+1)^2-2\le -x-1$ egyenlőtlenséget!

5. Oldd meg grafikusan a következő egyenleteket!

a) $\frac{2}{x}=x+1$ **b)** $\frac{2}{x}=x-3{,}5$

6. Ábrázold a következő függvényeket! Add meg a függvények értékkészletét!

a) $x\mapsto|x-3|$;
b) $x\mapsto|x+1|$;
c) $x\mapsto-|x|+4$.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Rajzold meg a következő függvény grafikonját! Add meg a függvény értékkészletét!

$x\in([-4;4]\setminus\{3\})$ $\quad x\mapsto\frac{x^2+2x-15}{x-3}$

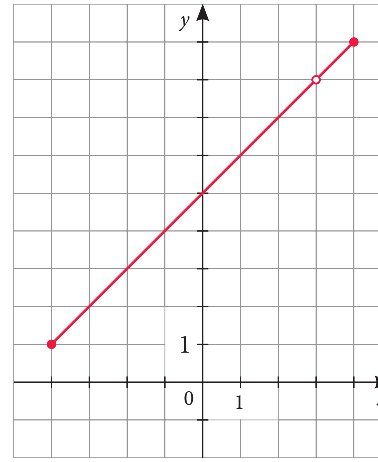
Megoldás
A hozzárendelési szabályban szereplő tört számlálóját szorzattá alakítjuk. Ehhez használhatjuk a másodfokú egyenlet gyöktényezős alakját is.

Az $x^2+2x-15=0$ másodfokú egyenlet valós gyökei a megoldóképlettel: $x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{-2\pm 8}{2}$,

amiből $x_1=3$ és $x_2=-5$.

Tehát $x^2+2x-15=(x-3)(x+5)$, és $\frac{x^2+2x-15}{x-3}=\frac{(x-3)(x+5)}{x-3}=x+5$.

A függvény hozzárendelési szabálya ennek megfelelően: $x \mapsto x + 5$.
A függvény grafikonja ezért az $y = x + 5$ egyenletű egyenesnek egy olyan szakasza, amelyből elhagytuk az egyenes 3 abszcisszájú pontját, a $P(3; 8)$ pontot.
A függvény értékkészlete akár a grafikon segítségével is leolvasható: $[1; 9] \setminus \{8\}$.



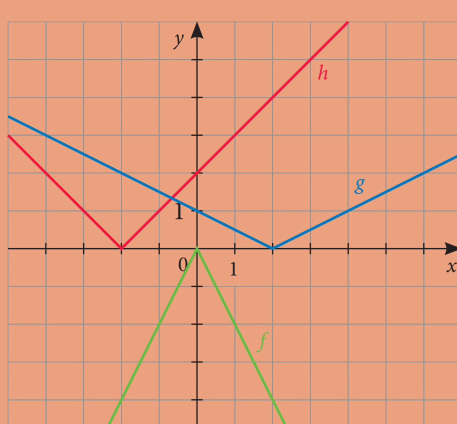
FELADAT

7. Rajzold meg a következő függvény grafikonját! Add meg a függvény értékkészletét!

$x \in ([-4; 4] \setminus \{-3\}) \qquad x \mapsto \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3}$

HÁZI FELADAT

1. **a)** Megadjuk hat függvény hozzárendelési szabályát és közülük háromnak a grafikonját. Rajzold meg a hiányzó grafikonokat, írd a grafikonok mellé az egyenletüket! A függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza.



$x \mapsto |x - 2|$; $\qquad x \mapsto -2|x|$; $\qquad x \mapsto \left|\dfrac{1}{2}x - 2\right|$;

$x \mapsto \dfrac{1}{2}|x - 2|$; $\qquad x \mapsto |2 + x|$; $\qquad x \mapsto 2 + |x|$.

b) Határozd meg a függvények 0-hoz rendelt értékét!
c) Add meg a függvények zérushelyeinek halmazát!

2. Ábrázold a következő függvényeket! Add meg a függvények értékkészletét!
a) $x \mapsto |x + 3|$; **c)** $x \mapsto -|x + 2| + 3$.
b) $x \mapsto |x - 1|$;

3. **a)** A lecke 4. feladatához adott ábrán egy egyenest és két parabolát látunk. Mely függvények grafikonja ez a három ponthalmaz?
b) Milyen egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása olvasható le erről az ábráról?

RÁADÁS

Ábrázold a következő függvényeket! Add meg ezek értékkészletét!
a) $x \mapsto |x - 2|$; **b)** $x \mapsto |x + 4|$; **c)** $x \mapsto |x - 2| + |x + 4|$; **d)** $x \mapsto |x - 2| - |x + 4|$.

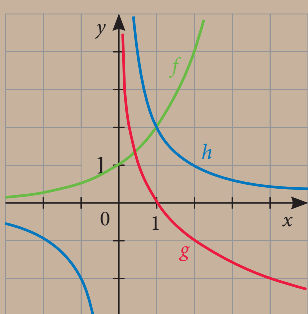
63 Exponenciális függvények, logaritmusfüggvények

FELADAT

1. Megadjuk hat függvény hozzárendelési szabályát és közülük háromnak a grafikonját.

$x \mapsto 2x$; $\quad x \mapsto 2^x$; $\quad x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$;

$x \mapsto \frac{2}{x}$; $\quad x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x$; $\quad x \mapsto x^2$.

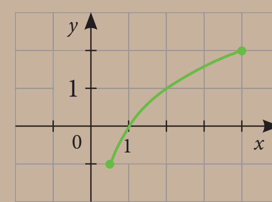


a) Melyik halmaz az *f*, a *g*, illetve a *h* függvény értelmezési tartománya?

b) Melyik az *f*, a *g* és a *h* függvény hozzárendelési szabálya?

c) Rajzold meg a maradék három hozzárendelési szabályhoz tartozó három függvény grafikonját! Értelmezési tartománynak válaszd az **R** lehető legbővebb részhalmazát!

2. Az ábrán egy logaritmusfüggvény grafikonjának egy része látható. Ez a grafikon meghatároz egy függvényt.



a) Mi az ábrázolt függvény értelmezési tartománya és értékkészlete?

b) Mi az ábrázolt függvény hozzárendelési szabálya?

c) Mennyi az ábrázolt függvény helyettesítési értéke az 1, a 2, a 3 és a 4 helyen?

d) Melyik helyen 1,5 a függvény helyettesítési értéke?

3. Rajzold meg közös koordináta-rendszerben a 4-es alapú és az $\frac{1}{4}$ alapú logaritmusfüggvény grafikonját!

4. Az előző feladatban készített grafikon segítségével oldd meg

a) a $\log_{0,25} x = 0,5$ és a $\log_{0,25} x = -0,5$ egyenletet;

b) a $\log_{0,25} x < 0,5$ és a $\log_{0,25} x > -0,5$ egyenlőtlenséget;

c) a $-0,5 < \log_{0,25} x < 0,5$ egyenlőtlenségrendszert!

HÁZI FELADAT

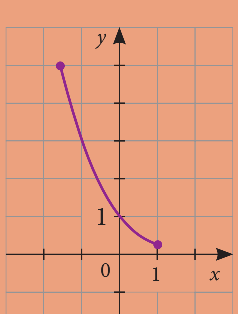
1. Az ábrán egy exponenciális függvény grafikonjának egy része látható. Ez a grafikon meghatároz egy függvényt.

a) Mi az ábrázolt függvény értelmezési tartománya és értékkészlete?

b) Mennyi az ábrázolt függvény helyettesítési értéke a (-1) és a 0 helyen?

c) Mi az ábrázolt függvény hozzárendelési szabálya?

d) Melyik helyen 4 a függvény helyettesítési értéke?

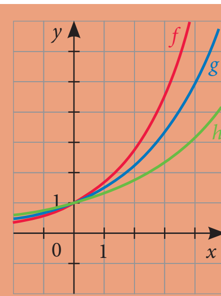


2. Megadjuk öt függvény hozzárendelési szabályát és közülük háromnak a grafikonját.

$x \mapsto \left(\frac{3}{2}\right)^x$; $x \mapsto \left(\frac{2}{3}\right)^x$;

$x \mapsto \left(\frac{4}{3}\right)^x$; $x \mapsto \left(\frac{5}{3}\right)^x$;

$x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^x$.



a) Melyik hozzárendelési szabály tartozik az *f*, a *g*, illetve a *h* grafikonokhoz?

b) Az ábráról leolvashatjuk, hogy $g(4) \approx 5$. Számológéped segítségével határozd meg az $|5 - g(4)|$ szám három tizedesjegyre kerekített értékét!

3. Az órai 3. feladatban készített grafikon segítségével oldd meg

a) a $\log_4 x = 0{,}5$ és a $\log_4 x = -0{,}5$ egyenletet;

b) a $\log_{0,25} x > 0{,}5$, az $\log_4 x \geq -0{,}5$ egyenlőtlenséget;

c) a $-0{,}5 \leq \log_4 x \leq 0{,}5$ egyenlőtlenségrendszert!

RÁADÁS

Érvek és ellenérvek

Egy időben internetes fórumokon óriási vita dúlt arról, hogy a szegényebb, de gyorsabb ütemben növekedő ország utolérheti-e a gazdagabb, ám lassabban növekedő országot.

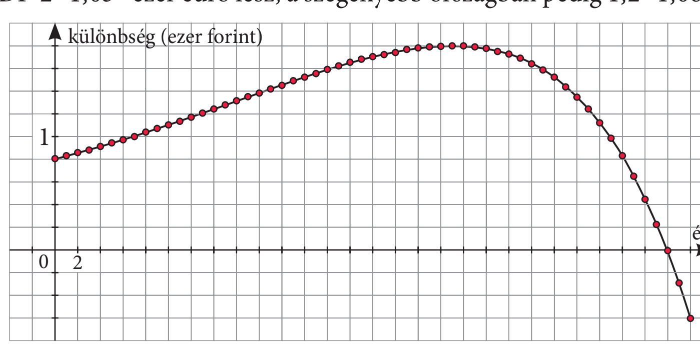
Példánkban legyen az egy főre jutó éves GDP 2 ezer euró a gazdagabb országban, a szegényebb országban ugyanez a mutató legyen 1,2 ezer euró. A gazdagabb országban növekedjen ez a mutató évente 5%-kal, a szegényebb országban évente 6%-kal. Az utolérés lehetetlenségét bizonygatók közül többen is így érveltek: a 2000-nek az 5%-a 100, az 1200-nak a 6%-a 72. Ezért nemhogy csökkenne, inkább növekszik a különbség a két ország között, hiszen egy év múlva a gazdagabb országban 2,1 ezer, a szegényebben pedig 1,272 ezer euró lesz az egy főre jutó GDP. Így a kezdeti 800 eurós különbség immáron 828 euróra növekedett. A folytatásban az előző gondolatmenetet ismételve azt kapjuk, hogy a szegényebb ország egyre jobban lemarad a gazdagabb országtól – fejezték be az érvelésüket a kétkedők.

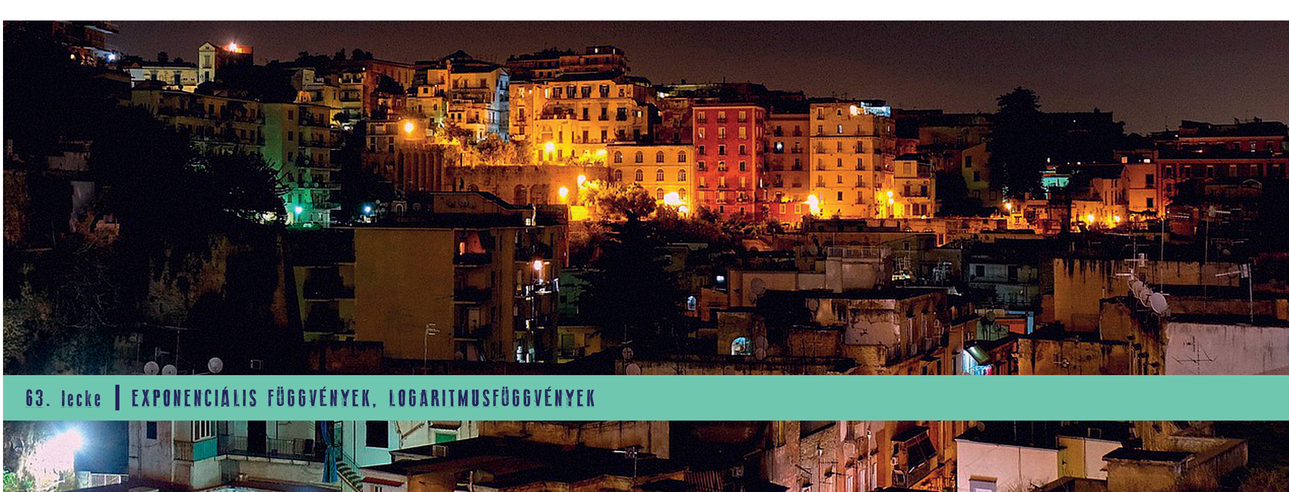
Elég sokan kiálltak a fenti érvelés mellett, de többen voltak, akik matematikai formába öntötték a kérdést (azaz **megalkották a probléma matematikai modelljét**).

A gazdagabb országban *x* év elteltével az egy főre jutó GDP $2 \cdot 1{,}05^x$ ezer euró lesz, a szegényebb országban pedig $1{,}2 \cdot 1{,}06^x$ ezer euró.

Az a kérdés tehát, hogy az $x \mapsto 2 \cdot 1{,}05^x - 1{,}2 \cdot 1{,}06^x$ ($x \in \mathbf{N}$) függvény szigorúan monoton növekedő-e.

Ezt a kérdést számítógép segítségével gyorsan el lehet dönteni akár függvényábrázoló, akár táblázatkezelő program alkalmazásával. Mi egy függvényábrázoló program segítségével kapott grafikont mutatunk be. Döntsd el a vitát a grafikon alapján, és elemezd, hogy a helytelen érvelésben hol lehet a hiba!





64 Függvények és alkalmazásaik

FELADAT

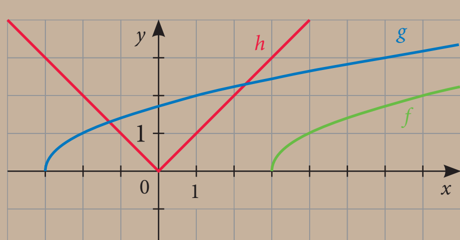
1. Hozzárendelési szabályokat adunk meg. Válaszd melléjük értelmezési tartománynak a [–4; 4] intervallumnak azt a legbővebb részhalmazát, amelyeken a kifejezések értelmezhetők! Ábrázold közös koordináta-rendszerben a keletkező 3-3 függvényt!

a) $x \mapsto \sqrt{x}$; $x \mapsto \sqrt{x+2}$; $x \mapsto \sqrt{x}+2$;

b) $x \mapsto \sqrt{x}$; $x \mapsto \sqrt{x-1}$; $x \mapsto \sqrt{x}-1$.

2. Folytasd az előző feladatot! Add meg a szereplő függvények értékkészletét és zérushelyét!

3. Megadunk hat hozzárendelési szabályt és három grafikont.



$x \mapsto 3\cdot\sqrt{x}$; $x \mapsto \sqrt{x^2}$; $x \mapsto \sqrt{3+x}$;
$x \mapsto \sqrt{x-3}$; $x \mapsto \sqrt{x^4}$; $x \mapsto \sqrt{3-x}$.

a) Melyik hozzárendelési szabály melyik grafikonhoz tartozik?

b) A három kimaradt hozzárendelés mindegyikéhez válassz olyan értelmezési tartományt, amelyen az egyes hozzárendelések értelmezhetők, majd ábrázold a függvényeket!

4. Azt, hogy a tengerszint felett h kilométer magasságban lévő pontból – a Föld görbületét is figyelembe véve – legfeljebb hány kilométerre „láthatunk el”, jó közelítéssel a $D(h)=\sqrt{12\,740\cdot h+h^2}$ $(h\in\mathbf{R}^+)$ függvény segítségével számíthatjuk ki.

a) 2012-es megnyitásakor a tokiói *Sky Tree* kilátó és tévétorony volt a világ második legmagasabb épülete. Körülbelül milyen messzire lehet ellátni a 455 m magasan lévő kilátószintről?

b) Körülbelül mekkora magasságban haladhat az a repülő, amelynek pilótája 300 km-nyi távolságra lát el?

5. Rajzold meg a következő függvények grafikonját!

a) $x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$;

b) $x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$, $x \mapsto \frac{1}{x}+2$;

c) $x\in\mathbf{R}\setminus\{-2\}$, $x \mapsto \frac{1}{x+2}$.

HÁZI FELADAT

1. Hozzárendelési szabályokat adunk meg. Válaszd melléjük értelmezési tartománynak a $[-4;\,4]$ intervallumnak azt a legbővebb részhalmazát, amelyeken az egyes kifejezések értelmezhetők! Ábrázold közös koordináta-rendszerben a keletkező három függvényt, és add meg az értékkészletüket is!

$x \mapsto \sqrt{x}$; $\quad x \mapsto 3\sqrt{x+2}$; $\quad x \mapsto 3\sqrt{x}+2$.

2. Rajzold meg a következő függvények grafikonját!

a) $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $x \mapsto \frac{2}{x}$;

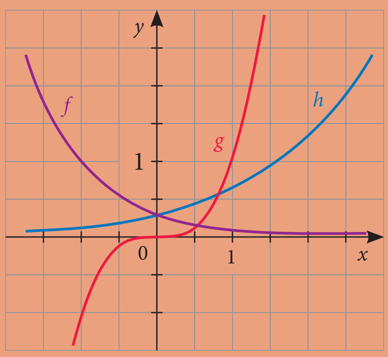
b) $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $x \mapsto \frac{2}{x} - 1$;

c) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $x \mapsto \frac{2}{x+2}$.

3. Válaszd ki az f, g, h függvények hozzárendelési szabályát az alább megadottak közül!

$x \mapsto x^3$; $\quad x \mapsto \frac{1}{3}\cdot x^4$; $\quad x \mapsto \frac{1}{3}\cdot 2^x$;

$x \mapsto \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x$; $\quad x \mapsto 3^x$; $\quad x \mapsto \frac{1}{3}$.



4. Egy internetes csomagküldő szolgálat kezelési költségként fix csomagolási díjat és a csomag tömegével arányos postaköltséget számít fel. Az x dekagramm tömegű csomagért (forintban) fizetendő díjat az $f(x) = 11x + 340$ képlettel számítják ki.

a) Mennyi a fix csomagolási díj?

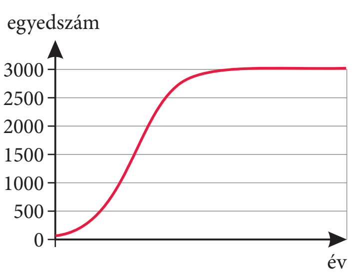
b) Mennyi az 1 dkg-ra jutó postaköltség?

c) Mennyi kezelési költséget kell fizetni egy 450 g-os csomagért?

RÁADÁS

A populációbiológia az egyes élőlénycsoportok egyedszámának változásait vizsgálja. Az erre szolgáló matematikai modellek közül az egyik legegyszerűbb az úgynevezett *logisztikus modell*, amelynek lényege, hogy minden új populáció egyedszáma arányos egyrészt az előző populáció egyedszámával, másrészt az adott környezet által még eltartható egyedek számával.

Tegyük fel, hogy egy bizonyos állatpopuláció egyedszámát a $P(t) = \frac{3000}{1 + 49\cdot 0{,}35^t}$ összefüggés írja le, amelyben t mutatja azt, hogy hány év telt el a populáció megjelenésétől számítva.



a) Töltsd ki a táblázatot!

Évek száma	0	1	2	3	4	5
A populáció egyedszáma						

b) A táblázat adatai alapján jelöld be az évek számát a megfelelő tengelyen!

c) Oldd meg a valós számok halmazán a $2700 = \frac{3000}{1 + 49\cdot 0{,}35^x}$ egyenletet! A megoldást egy tizedesjegyre kerekítsd!

65 Trigonometrikus függvények

FELADAT

1. A következő függvények értelmezési tartománya a $[-3\pi;\ 3\pi]$ halmaz, hozzárendelési szabályuk:

$x \mapsto \sin x$;

$x \mapsto \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

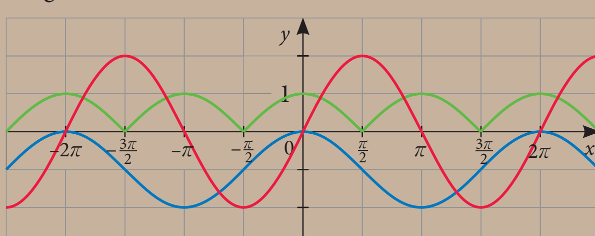
$x \mapsto \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$.

a) Add meg e három függvény zérushelyeit!

b) Rajzold meg a grafikonjukat!

c) Melyik halmaz a vizsgált függvények értékkészlete?

2. Megadunk hat hozzárendelési szabályt és három grafikont. Melyik hozzárendelési szabályhoz melyik grafikon tartozik?



$y = 2\sin x$ $\qquad$ $y = |\cos x|$

$y = \cos x - 1$ $\qquad$ $y = \left|\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right|$

$y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ $\qquad$ $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$

3. A hálózati váltakozó feszültséget az

$U(t) = 325 \cdot \sin(100\pi \cdot t)$

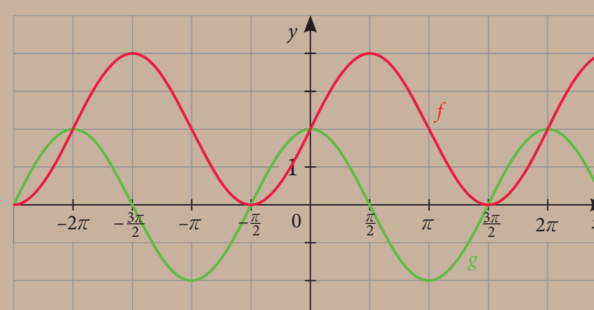
összefüggés írja le. A képletben t jelöli az eltelt időt, másodpercben mérce, U pedig a feszültség értékét, voltban.

a) Mekkora a feszültség értéke a kezdeti állapot után 1 másodperccel?

b) Mekkora a feszültség értéke a kezdeti állapot után 1,002 másodperccel?

c) Mekkora a feszültség legnagyobb értéke?

4. Az ábrán két olyan függvény grafikonját látjuk, amelyek a szinuszfüggvény transzformálásával keletkeztek. Mindkét függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza, az egyik függvény zérushelye a $\frac{\pi}{2}$ szám.



a) Add meg a két függvény értékkészletét!

b) Add meg a két függvény hozzárendelési szabályát!

c) Írj fel egy olyan trigonometrikus egyenletet, amelynek grafikus megoldása leolvasható erről az ábráról!

d) Add meg a c) pontban felírt egyenlet 3 megoldásának két-két tizedesjegyre kerekített értékét!

5. Állapítsd meg, hány (-4) és 4 közötti gyöke van a $\operatorname{tg} x = 3 - x$ egyenletnek!

Coney Island – New York,
Deno's Wonder Wheel Amusement Park

HÁZI FELADAT

1. A következő függvények értelmezési tartománya a $[-3\pi; 3\pi]$ halmaz, hozzárendelési szabályuk:

$x \mapsto \cos x$;

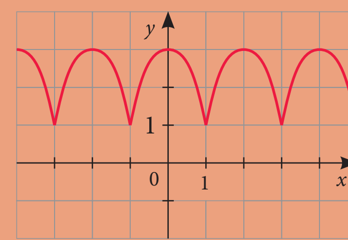
$x \mapsto \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$;

$x \mapsto \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - 1$.

a) Add meg e három függvény zérushelyeit!

b) Rajzold meg a grafikonjukat!

2. Az ábrán egy periodikus függvény grafikonja látható. (Az ábra egy periódusnál többet mutat a függvényből.)



a) Elemezd a függvényt a következő szempontok alapján: értelmezési tartomány, értékkészlet, zérushely, szélsőértékek helye és értéke, monotonitás.

b) Jellemezd azt a legrövidebb vektorú eltolást, amellyel a függvény grafikonja önmagába megy át! (Az eltolás vektora nem a nullvektor.)

RÁADÁS

1. Rajzold meg közös koordináta-rendszerben a következő két-két függvény grafikonját!

a) $x \mapsto \sin x$ és $x \mapsto 0{,}1x$;

b) $x \mapsto \sin x$ és $x \mapsto 0{,}1|x|$.

c) Hány gyökük van a következő egyenleteknek?

$\sin x = 0{,}1x$; $\quad \sin x = 0{,}1|x|$.

2. A hálózati váltakozó feszültséget az

$U(t) = 325 \cdot \sin(100\pi \cdot t)$

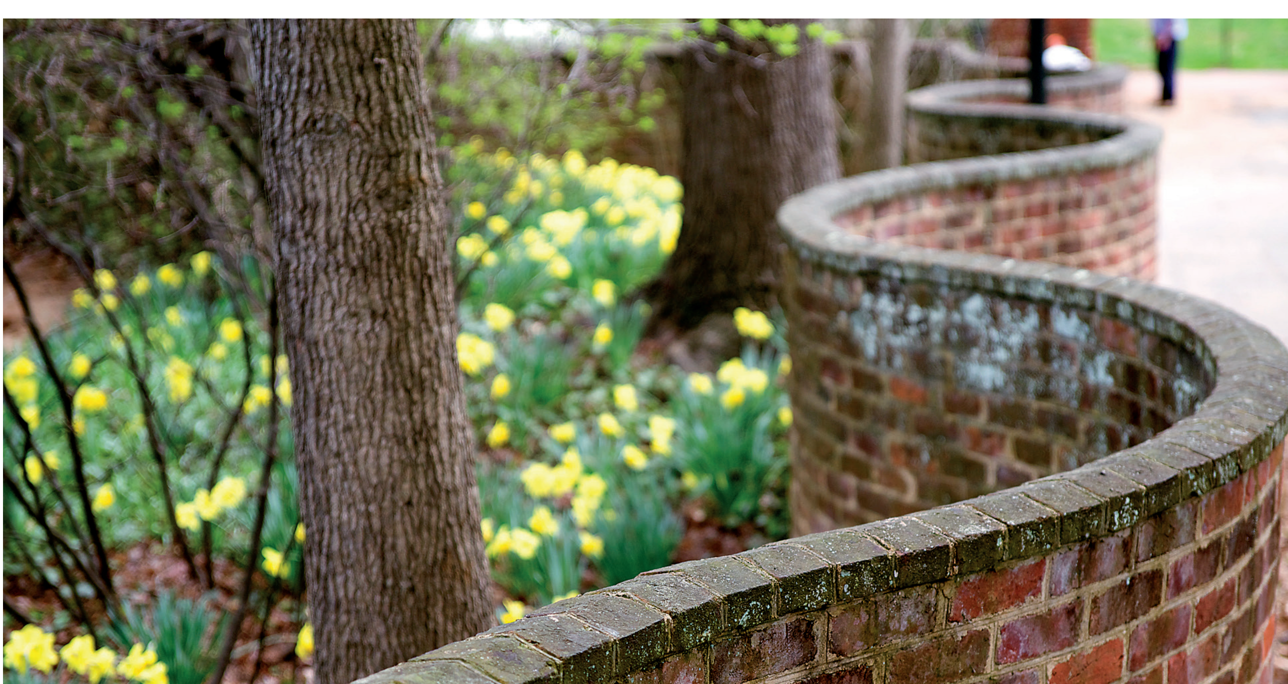
összefüggés írja le. A képletben t az idő másodpercben mért értéke, a feszültséget voltban kapjuk meg.

a) Melyek azok a pillanatok, amelyekben a feszültség éppen 0 értékű?

b) Vázold a feszültség időbeli lefolyását alkalmas koordináta-rendszerben!

c) Hány másodperc a periódusidő?

d) Egy másodperc alatt hány alkalommal lesz a feszültség értéke éppen 230 volt?



66 Számsorozatok

FELADAT

1. Megadunk négy sorozatot az n-edik tagjukkal ($n \in \mathbf{N}^+$): $a_n = 5 - 2n$, $b_n = 3 \cdot 0{,}8^n$, $c_n = 2\sin(n \cdot \pi)$ és $d_n = n(n+1)$. Töltsd ki a táblázatot a megadott sorozatokra vonatkozóan!

	(a_n)	(b_n)	(c_n)	(d_n)
1. tag				
2. tag				
3. tag				
4. tag				
Számtani sorozat? (igen, nem)				
Mértani sorozat? (igen, nem)				

2. Egy számtani sorozat első tagja (-20), negyedik tagja 1.

a) Mennyi a sorozat differenciája?
b) Add meg a hetedik tagot!
c) Számítsd ki az első hét tag összegét!

3. Egy mértani sorozat első tagja (-120), negyedik tagja 15.

a) Mennyi a sorozat kvóciense?
b) Sorold fel az első hat tagot, számítsd ki az összegüket!
c) Ellenőrizd a b) pontban kapott eredményedet a mértani sorozat összegképletével!

4. Egy számtani sorozat tizedik tagja 22, századik tagja 202.

a) Mennyi a sorozat differenciája?
b) Számítsd ki az első tagot!
c) Számítsd ki az első 100 tag összegét!
d) Válaszd ki e sorozat tagjai közül azokat, amelyek 2-re végződnek! Ezek is egy számtani sorozatot alkotnak. Mennyi ennek az új sorozatnak az első tagja és a differenciája?
e) Tagja-e ennek, illetve az eredeti sorozatnak a 802? Ha igen, hányadik?

5. Egy stadion nézőterén az első sorban 520 ülőhely van, minden következő sorban 20-szal több, mint az előzőben. Hány sor van a nézőtéren, ha az ülőhelyek száma 24 300?

KIDOLGOZOTT FELADAT

Melyik az a pozitív tagú mértani sorozat, amelyben az első és a harmadik tag szorzata 2304, a második és a negyedik tag összege pedig 240?

Megoldás

Jelöljük a sorozat n-edik tagját a_n-nel ($n \in \mathbf{N}^+$), a hányadosát q-val! Fejezzük ki az első feltételt a második tag és a hányados segítségével!

$a_1 \cdot a_3 = \frac{a_2}{q} \cdot (a_2 \cdot q) = (a_2)^2$, tehát $(a_2)^2 = 2304 = 48^2$. Mivel a sorozatunk tagjai pozitívak, eredményünkből az következik, hogy a sorozat második tagja $a_2 = 48$.

Most vizsgáljuk a második feltételt! Eszerint

$a_2 + a_4 = 240$, vagyis

$a_2 + (a_2 \cdot q^2) = 240$;

$48 + 48 \cdot q^2 = 240$; $48 \cdot q^2 = 192$; $q^2 = 4$,

$q = 2$ vagy $q = -2$.

Mivel a tagok pozitívak, ezért a hányados nem lehet negatív, tehát $q = 2$.

Tehát a mértani sorozat második tagja 48, hányadosa 2. Ebből az is következik, hogy az első tag 24.

Ellenőrzés: a sorozat harmadik tagja 96, a negyedik tagja pedig 192. Az első és a harmadik tag szorzata: $24 \cdot 96 = 2304$, a második és a negyedik tag összege: $48 + 192 = 240$.

FELADAT

6. Hány olyan mértani sorozat van, amelynek

a) a negyedik tagja 24 és az ötödik tagja 6;

b) a negyedik tagja 24 és a hatodik tagja 6?

Add meg a sorozatok első tagját és hányadosát!

HÁZI FELADAT

1. Százegy darab egymást követő páratlan szám összege 12 827.

a) Mennyi az első és a százegyedik szám összege?

b) Melyik a középső szám?

2. Töltsd ki az alábbi táblázatot az (a_n) mértani sorozatra vonatkozóan!

	a_1	q	a_6	S_{12}
1. sorozat	1	1		
2. sorozat	0,1		3,2	
3. sorozat		0,5	32	
4. sorozat		–2		–13,65

3. Egy háztetőn a legfelső sorban 60 cserép van, a többi 32 sor mindegyikében 5-tel több, mint a felette lévőben.

a) Hány cserép van a legalsó sorban?

b) Hány cserép van ezen a tetőn?

RÁADÁS

Korábbi érettségi feladatok

1. *(Középszintű érettségi, 2015. október)* Egy számtani sorozat három egymást követő tagja ebben a sorrendben 32, *a* és 18.

a) Határozza meg az *a* értékét és a sorozat differenciáját!

Egy mértani sorozat három egymást követő tagja ebben a sorrendben 32, *b* és 18.

b) Határozza meg a *b* értékét és a sorozat hányadosát!

A 32, *c* és 18 számokról tudjuk, hogy a három szám átlaga kettővel kisebb, mint a mediánja, továbbá $32 > c > 18$.

c) Határozza meg a *c* értékét!

2. *(Középszintű érettségi 2005. május)*

a) Iktasson be a 6 és az 1623 közé két számot úgy, hogy azok a megadottakkal együtt egy számtani sorozat szomszédos tagjai legyenek!

b) Számítsa ki a 6 és az 1623 közötti néggyel osztható számok összegét!

3. *(Középszintű érettségi, 2016. május)* A kereskedelemmel foglalkozó cégek között több olyan is van, amely állandóan emelkedő fizetéssel jutalmazza a dolgozók munkavégzését. Péter munkát keres, és két cég ajánlata közül választhat:

I. ajánlat: Az induló havi fizetés 200 000 Ft, amit havonta 5000 Ft-tal emelnek négy éven át.

II. ajánlat: Az induló havi fizetés 200 000 Ft, amit havonta 2%-kal emelnek négy éven át.

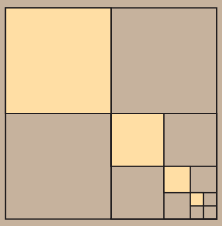
Melyik ajánlatot válassza Péter, ha tervei szerint négy évig a választott munkahelyen akar dolgozni, és azt az ajánlatot szeretné választani, amelyik a négy év alatt nagyobb összjövedelmet kínál?

67 Sorozatok alkalmazása

FELADAT

1. Egy számtani sorozat harmadik és negyedik tagjának összege 58, a sorozat második tagja 8-cal nagyobb az elsőnél. Számítsd ki a sorozat első tagját!

2. Megrajzoltuk egy 8 cm oldalú négyzet két középvonalát, majd az így keletkező négy négyzet egyikét beszíneztük. A színezetlen három négyzet közül az egyikkel megismételtük az előző eljárást, majd ezt a mellékelt ábra szerint tovább folytattuk.


8 cm

a) Számítsd ki az első négy beszínezett négyzet területének és kerületének összegét!

b) Az eredeti négyzet területének hány százaléka van beszínezve, ha összesen 15 négyzetet színeztünk be?

3. Megtakarított pénzünk 6 éven keresztül évi 4%-os kamatos kamattal, majd újabb 4 éven keresztül évi 5%-os kamatos kamattal növekszik. Tíz év után az eredeti tőke hány százaléka áll rendelkezésünkre?

4. Számítsd ki az 1,2 első 30 pozitív egész kitevőjű hatványának szorzatát, vagyis az
$1{,}2^1 \cdot 1{,}2^2 \cdot 1{,}2^3 \cdot \ldots \cdot 1{,}2^{30}$ szorzat értékét!
Az eredményt normálalakban add meg!

5. Számítsd ki az 1,2 első 30 pozitív egész kitevőjű hatványának összegét, vagyis az
$1{,}2^1 + 1{,}2^2 + 1{,}2^3 + \ldots + 1{,}2^{30}$ összeg értékét!
Az eredményt egy tizedesjegyre kerekítve add meg!

6. Egy színház földszinti nézőterén az első sorban 20, minden következő sorban 2-vel több ülőhely van, mint az előzőben. Az ülőhelyek száma összesen 840. Hány sor van a földszinten?

HÁZI FELADAT

1. Egy számtani sorozat negyedik és hatodik tagjának az összege 28, az első és a kilencedik tag szorzata pedig (-380).

a) Számítsd ki a sorozat ötödik tagját!

b) Számítsd ki a sorozat differenciáját!

c) Hány sorozat felel meg a feltételeknek?

d) Mennyi lehet a sorozat első tagja?

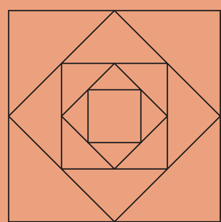
e) Mennyi lehet a sorozat első 25 tagjának az összege?

2. Egy különböző számjegyekből álló háromjegyű szám számjegyei megegyeznek egy mértani sorozat első három tagjával. A sorozat második tagja a tízes helyi értéken álló számjegy.

a) Milyen számjegyek jöhetnek szóba?

b) Add meg az összes megfelelő háromjegyű számot!

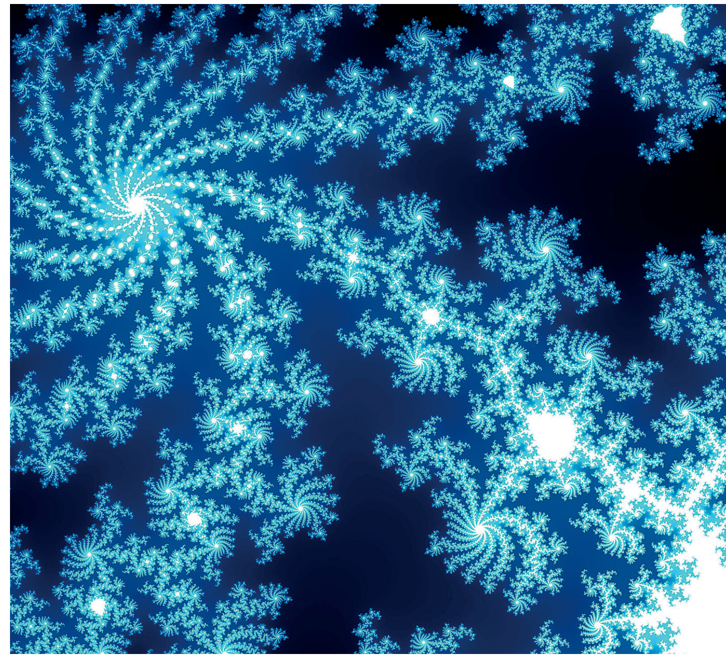
3. Egy 16 cm-es oldalú négyzet oldalfelező pontjait az ábra szerint sorban összekötjük, majd a kapott négyszög oldalfelező pontjait újra összekötjük, és így tovább: négyzetek keletkeznek.



16 cm

a) Igazold, hogy ha csökkenő sorrendben felírjuk e négyzetek területét, mértani sorozatot kapunk! Mennyi itt a hányados?

b) Mennyi az első 10 ilyen négyzet területének az összege?



RÁADÁS

Korábbi érettségi feladatok

1. *(Középszintű érettségi, 2015. május)* Zsuzsa nagyszülei elhatározzák, hogy amikor unokájuk 18 éves lesz, akkor vásárlási utalványt adnak neki ajándékba. Ezért Zsuzsa 18. születésnapja előtt 18 hónapon keresztül minden hónapban félretesznek valamekkora összeget úgy, hogy Zsuzsa 18. születésnapján éppen 90 000 forintjuk legyen erre a célra. Úgy tervezik, hogy az első alkalom után mindig 200 forinttal többet tesznek félre, mint az előző hónapban.
Terveik szerint mennyi pénzt tesznek félre az első, és mennyit az utolsó alkalommal?

2. *(Középszintű érettségi, 2007. október)* Szabó nagymama sálat kötött egyetlen lányunokájának. Az első napon 8 cm készült el a sálból, és a nagymama elhatározta, hogy a további napokon mindennap 20 százalékkal többet köt meg, mint az előző napon. Ezt az elhatározását tartani tudta. Hány nap alatt készült el a 2 méter hosszúra tervezett sál?

3. *(Középszintű érettségi, 2006. október)* Egy útépítő vállalkozás egy munka elkezdésekor az első napon 220 méternyi utat aszfaltoz le. A rákövetkező napon 230 métert, az azutánin 240 métert és így tovább: a munkások létszámát naponta növelve minden következő munkanapon 10 méterrel többet, mint az azt megelőző napon.

a) Hány méter utat aszfaltoznak le a 11. munkanapon?

b) Az összes aszfaltozandó út hossza ebben a munkában 7,1 km. Hányadik munkanapon készülnek el vele?

c) Hány méter utat aszfaltoznak le az utolsó munkanapon?

d) A 21. napon kétszer annyian dolgoztak, mint az első napon. Igaz-e az a feltételezés, hogy a naponta elkészült út hossza egyenesen arányos a munkások létszámával? (Válaszát indokolja!)

4. *(Középszintű érettségi, 2009. október)* Angéla a pihenőkertjük egy részére járólapokat fektetett le. Az első sorba 8 járólap került, minden további sorba kettővel több, mint az azt megelőzőbe. Összesen 858 járólapot használt fel.

a) Hány sort rakott le Angéla?

A járólapokat 225-ös csomagolásban árusítják. Minden csomagban bordó színű a járólapok 16%-a, a többi szürke. Angéla 4 csomag járólapot vásárolt. Csak bordó színű lapokat rakott le az első és az utolsó sorba. Ezenkívül a többi sor két szélén lévő 1-1 járólap is bordó, az összes többi lerakott járólap szürke.

b) Adja meg, hogy hány szürke és hány bordó járólap maradt ki a lerakás után!

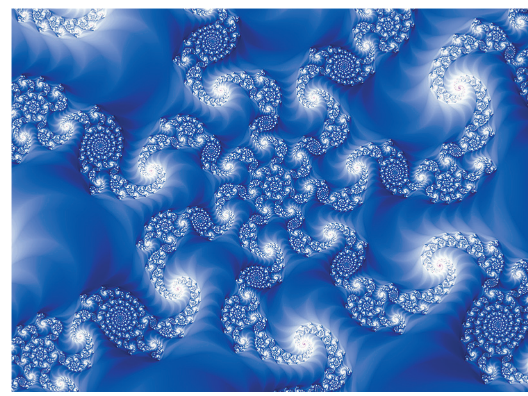
Geometria

A geometria a matematikának az az ága, amely különböző alakzatokkal, azok tulajdonságaival, formájával, méretével, kölcsönös elhelyezkedésével foglalkozik. Egyben a matematika egyik legrégebbi ága is. A testek, síkidomok ismeretlen adatainak meghatározása, a szimmetriák felismerése és felhasználása már az ősi Mezopotámiában és Egyiptomban is része volt a földmérési, építészeti, csillagászati számításoknak. A geometria szabályait Kr. e. 300 környékén Eukleidész öntötte szigorú formába *Elemek* című munkájában, amely a következő két évezredre megalapozta és meghatározta a geometria szemléletét. A XVII. sz. elején Renè Descartes és Pierre Fermat francia matematikusok a koordinátageometria bevezetésével lehetővé tették geometriai feladatok algebrai úton, egyenletek segítségével történő megoldását is.
A XIX. század matematikusai (közöttük a magyar Bolyai János) a párhuzamos egyenesek Eukleidésztől eltérő értelmezésével új típusú geometriákat hoztak létre, amelyek segítségével ma a tengeri szivacsok telepeinek alakjától egészen az univerzum lehetséges jövőjéig terjedő kérdésekre keressük a választ.

A geometria élő, napjainkban is fejlődő tudomány, a differenciálgeometria, a topológia vagy éppen a fraktálgeometria művelői újabb és újabb érdekes eredményekkel állnak elő.

A Klein-kancsó önmagába visszatérő felülete

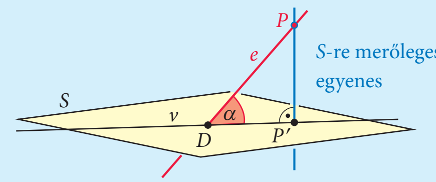
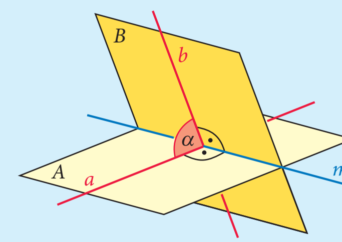
Fraktálok segítségével számítógéppel generált „táj"



FOGALMAK, TÉTELEK

I. TÉRGEOMETRIA (Részletesen lásd 9. osztályos tankönyv 31. és 78–81. lecke, 10. osztályos tankönyv 52–61. lecke.)

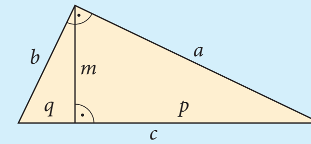
D	A pontot, az egyenest és a síkot **térelemeknek** nevezzük.
D	**A térelemek kölcsönös helyzete** Két pont, egy pont és egy egyenes, illetve egy pont és egy sík lehet **illeszkedő** vagy **nem illeszkedő.** Két egyenest – **kitérőnek** mondunk, ha nincs közös síkjuk; – **párhuzamosnak** mondunk, ha van közös síkjuk, de nincs közös pontjuk; – **metszőnek** mondunk, ha van egy és csakis egy közös pontjuk. Ha két egyenesnek egynél több közös pontja van, akkor ezek **illeszkedők**. Más eset nem fordulhat elő. Egy egyenest és egy síkot – **párhuzamosnak** mondunk, ha nincs közös pontjuk; – **metszőnek** mondunk, ha van egy és csakis egy közös pontjuk. Ha egynél több közös pontjuk van, akkor ezek **illeszkedők**. Más eset nem fordulhat elő. Két síkot – **párhuzamosnak** mondunk, ha nincs közös pontjuk; – **metszőnek** mondunk, ha az összes közös pontjuk egy egyenesre illeszkedik. Ha van három olyan közös pontjuk, amely nem illeszkedik egy egyenesre, akkor ezek a síkok **illeszkedők**. Más eset nem fordulhat elő.
D	Két, egy pontból kiinduló félegyenes a síkot két szögre (szögtartományra) bontja.

D	Ha egy *e* egyenes metszi az *S* síkot, de nem merőleges rá, és *v* az *e*-nek az *S*-beli merőleges vetülete, akkor *e* és *v* szögét **az *e* egyenes és az *S* sík szögének** nevezzük. 
D	Ha az *A* **és a** *B* **sík** az *m* egyenesben metszi egymást, akkor az *m* metszésvonal egy tetszőleges pontjában állítsunk merőlegest *m*-re az *A* síkban is és a *B* síkban is. Az így kapott két egyenes szögét **a két sík szögének** nevezzük. 
D	**Két pont távolsága** az általuk meghatározott szakasz hossza.
D	Ha egy *P* pont nem illeszkedik valamely *e* egyenesre (illetve valamely *S* síkra), akkor ***P* és *e*** (**illetve *S***) **távolsága** a *P*-n át *e*-re (illetve *S*-re) állított merőleges szakasz hossza. Két párhuzamos egyenes, egy sík és egy vele párhuzamos egyenes, illetve két párhuzamos sík távolsága a rájuk állított merőleges egyeneseken olvasható le.
D	Azokat a függvényeket, amelyeknek az értelmezési tartománya és az értékkészlete ponthalmaz, **geometriai transzformációknak** nevezzük.
D	Egy geometriai transzformációt **egybevágósági transzformációnak** mondunk, ha **távolságtartó**, vagyis ha bármely két pont távolsága egyenlő a képeik távolságával.
D	Ha egy ponthalmazhoz van olyan pont, egyenes, illetve sík, amelyre tükrözve önmagába megy át, azt **középpontosan szimmetrikusnak, tengelyesen szimmetrikusnak**, illetve **síkszimmetrikusnak** mondjuk. Ha van olyan 0° és 360° **közötti szögű elforgatás, amely egy adott ponthalmazt önmagába visz át, akkor ezt a ponthalmazt forgásszimmetrikusnak** mondjuk.
D	Egy geometriai transzformációt **hasonlósági transzformációnak** mondunk, ha **aránytartó**, vagyis ha bármely két pont távolsága ugyanannyiszorosára változik a transzformáció során. Azt a számot, amely megadja, hányszorosukra változnak az egyes távolságok a transzformáció során, **a hasonlóság arányszámának** nevezzük. Ha az arányszám 1-gyel egyenlő, akkor ez egybevágósági transzformáció.
T	Ha két síkidom **hasonló** és a hasonlóság arányszáma k, akkor a két síkidom kerületének az aránya k, a területük aránya pedig k^2. Ha két test **hasonló** és a hasonlóság arányszáma k, akkor e két test felszínének az aránya k^2, a térfogatuk aránya pedig k^3.

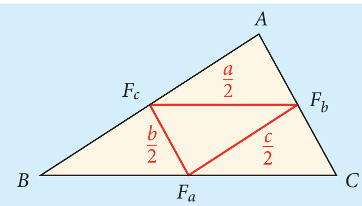
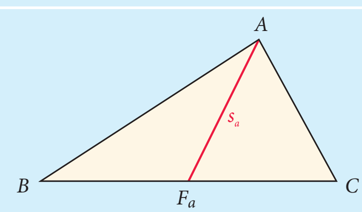
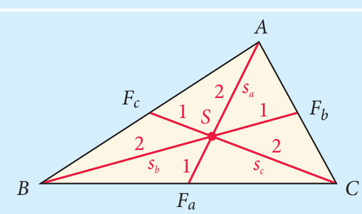
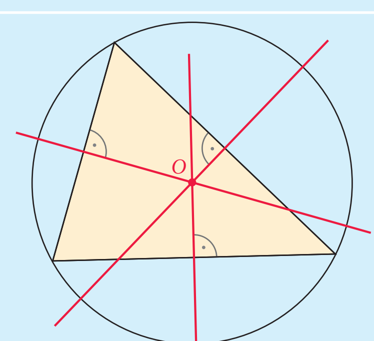
II. SÍKIDOMOK

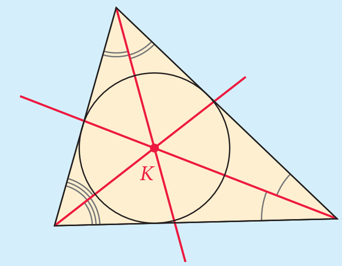
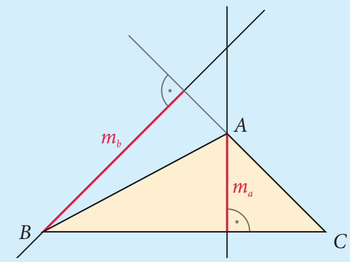
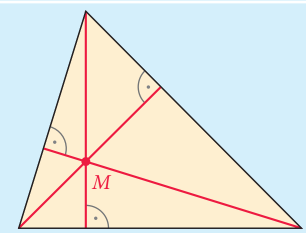
HÁROMSZÖGEK (Részletesen lásd 9. osztályos tankönyv 32–36. és 82–88. lecke, 10. osztályos tankönyv 14–15. lecke.)

T	**Háromszög-egyenlőtlenség:** A háromszögben bármely két oldal összege nagyobb, mint a harmadik oldal; bármely két oldal különbsége kisebb, mint a harmadik oldal.
T	Minden háromszögben 180° a belső szögek összege.
T	Ha egy háromszögben két szög egyenlő, akkor a velük szemben lévő oldalak is egyenlők, és megfordítva: ha egy háromszögben két oldal egyenlő, akkor a velük szemben lévő szögek is egyenlők.
T	Ha egy háromszögben egy oldal nagyobb egy másiknál, akkor a vele szemben lévő szög is nagyobb a másikkal szemben lévő szögnél.

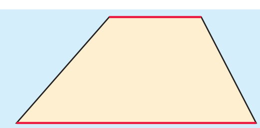
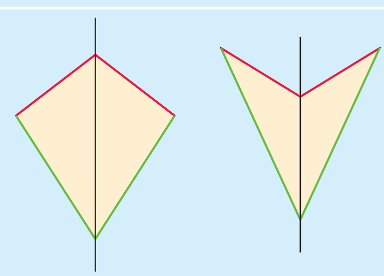
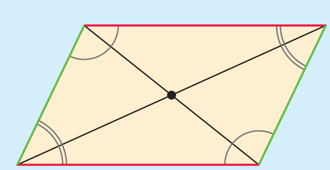
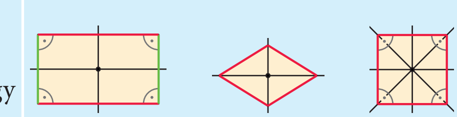
T	**Derékszögű háromszögekre vonatkozó tételek:** **Thalész-tétel:** a kör átmérője a körvonal bármely pontjából, kivéve az átmérő két végpontját, derékszögben látszik; a **Thalész-tétel megfordítása:** Ha C pontból az AB szakasz derékszögben látszik, akkor C rajta van az AB átmérőjű körön. **Pitagorasz tétele:** a derékszögű háromszög két befogójának a négyzetösszege egyenlő az átfogó négyzetével; a **Pitagorasz-tétel megfordítása:** Ha egy háromszög két oldalának a négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, akkor ez a háromszög derékszögű; **befogótétel:** a derékszögű háromszög befogója mértani közepe az átfogónak és a befogó átfogóra eső merőleges vetületének; **magasságtétel:** a derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága a befogók átfogóra eső merőleges vetületeinek mértani közepe.  Tételek: $a^2 + b^2 = c^2$ $a = \sqrt{p \cdot c}$; $b = \sqrt{q \cdot c}$; $m = \sqrt{p \cdot q}$

HÁROMSZÖGEK NEVEZETES VONALAI ÉS PONTJAI (9. osztályos tankönyv 85–86. lecke, 10. osztályos tankönyv 59. lecke)

D	A háromszög **középvonala**: két oldalfelező pontot összekötő szakasz.	
T	A háromszög középvonala párhuzamos és feleakkora, mint a szemközti oldal.	
D	A háromszög **súlyvonala**: a csúcsot a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz.	
T	A háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást. Ez a háromszög **súlypontja**. A súlypont harmadolja a súlyvonalat úgy, hogy a csúcs felé eső szakasz úgy aránylik az oldal felé eső szakaszhoz, mint 2 : 1.	
T	A háromszög **oldalfelező merőlegesei** egy pontban metszik egymást. Ez a pont a háromszög **köré írható kör** középpontja.	

T	A háromszög **belső szögfelezői** egy pontban metszik egymást. Ez a pont a **háromszögbe írható kör** középpontja.	
D	A csúcsból a szemközti oldal egyenesére bocsátott merőlegest a háromszög **magasságvonalának** nevezzük. A magasságvonalnak a csúcs és az oldalegyenes közé eső szakasza a háromszög **magassága**.	
T	A háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást. Ez a pont a háromszög **magasságpontja**.	

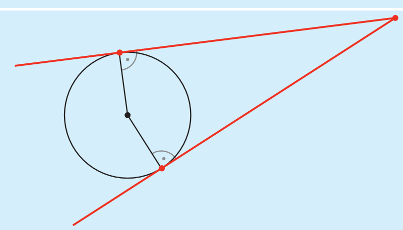
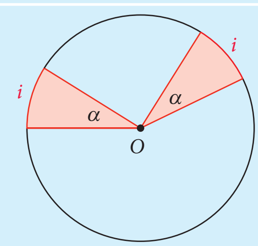
NEVEZETES NÉGYSZÖGEK (9. osztályos tankönyv 37. lecke)

D	Egy négyszög trapéz, ha van egy párhuzamos oldalpárja.	
D	Egy négyszög deltoid, ha két-két szomszédos oldala egyenlő.	
D T	A paralelogramma sokféle módon meghatározható. Az alábbiak közül bármelyikkel definiálható, és abból a többi állítás bebizonyítható. Egy négyszög paralelogramma, ha középpontosan szimmetrikus. Egy négyszög paralelogramma, ha van két-két párhuzamos oldala. Egy négyszög paralelogramma, ha két-két szemközti oldala egyenlő. Egy négyszög paralelogramma, ha átlói felezik egymást. Egy négyszög paralelogramma, ha szemközti szögei egyenlők.	
D	Egy négyszög téglalap, ha mind a négy szöge egyenlő. Egy négyszög rombusz, ha mind a négy oldala egyenlő. Egy négyszög négyzet, ha téglalap is és rombusz is, azaz mind a négy oldala egyenlő, és mind a négy szöge egyenlő.	

Készítsd el a füzetedbe a következő táblázatot, és töltsd ki:

Négyszög / Neve	Oldalai	Szögei	Átlói	Szimmetriái	Kerülete	Területe
Trapéz						
Deltoid						
Paralelogramma						
Téglalap						
Rombusz						
Négyzet						

KÖR ÉS RÉSZEI (9. osztályos tankönyv 35. lecke, 10. osztályos tankönyv 18–20. és 62–64. lecke)

D	A **körvonal (kör)** azoknak a pontoknak a halmaza a síkban, melyek a sík egy pontjától ugyanakkora távolságra vannak.
D T	Ha egy (síkbeli) egyenesnek egy közös pontja van a körrel, akkor az a kör érintője. Az érintő merőleges az érintési pontban húzott sugárra. Külső pontból a körhöz két érintő húzható. Külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok hossza egyenlő. (érintőszakasz: a külső ponttól az érintési pontig húzott szakasz) 
T	Egy körben egyenlő **középponti szögek**hez egyenlő hosszúságú **körív**ek és egyenlő területű **körcikk**ek; egyenlő körívekhez egyenlő kerületi szögek és egyenlő területű körcikkek; egyenlő területű körcikkekhez egyenlő körívek és egyenlő középponti szögek tartoznak. 
D	Azt a számot, amely megadja, hogy valamely körben egy középponti szöghöz tartozó körív a kör sugarának hányszorosa, a szög **ívmértékének** nevezzük.

SOKSZÖGEK (Részletesen lásd 9. osztályos tankönyv 90. lecke.)

T	Az n oldalú konvex sokszög belső szögeinek összege $(n-2)\cdot 180°$, külső szögeinek összege 360°, átlóinak száma: $\frac{n(n-3)}{2}$ $(n \in \mathbf{N}, n > 2)$.

III. VEKTOROK, TRIGONOMETRIA, KOORDINÁTAGEOMETRIA (Részletesen lásd 9. osztályos tankönyv 79. lecke, 10. osztályos tankönyv 46–51. és 67–76. lecke, 11. osztályos tankönyv 1–18. és 62–89. lecke)

D	Akkor mondjuk, hogy **megadtunk egy vektort**, ha ismerjük az **állását**, **irányát**, **abszolút értékét** *(hosszúságát)*.
D	A **nullvektor** abszolút értéke nulla, iránya tetszőleges.
T D	Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ olyan, egy síkban lévő vektorok, hogy az $\mathbf{u}$ és a $\mathbf{v}$ nem egyállású, akkor van egyetlen olyan k és egyetlen olyan l valós szám, hogy $\mathbf{a} = k\mathbf{u} + l\mathbf{v}$. Az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ bázisrendszerben tehát minden $\mathbf{a}$ vektorhoz egyetlen olyan valós $(a_1; a_2)$ számpár van, amelyre $\mathbf{a} = a_1\,\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j}$. Az a_1 és a_2 számokat az $\mathbf{a}$ vektor *koordinátáinak* nevezzük.
T	Az $\mathbf{a}(a_1; a_2)$ vektor hossza $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

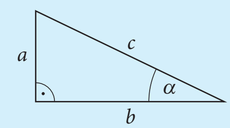
D T Ha az **a** és a **b** vektor szöge α, akkor az $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\alpha$ szorzatot az **a** és a **b** vektor **skaláris szorzatának** nevezzük. Jele: **ab**. Derékszögű koordináta-rendszerben a koordináták szokásos jelölésével $\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2$.

D Egy koordináta-rendszerben az origóból a sík valamely P pontjába mutató vektort a P pont **helyvektorának** nevezzük. A helyvektor koordinátái megegyeznek a vektor végpontjának koordinátáival.

D Ha egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge α, akkor

– a vele szemközti befogó és az átfogó hányadosa az α **szinusza**; jele $\sin\alpha$;
– a mellette lévő befogó és az átfogó hányadosa az α **koszinusza**; jele $\cos\alpha$;
– a vele szemközti befogó és a mellette lévő befogó hányadosa az α **tangense**; jele $\operatorname{tg}\alpha$;
– a mellette lévő befogó és a vele szemközti befogó hányadosa az α **kotangense**; jele $\operatorname{ctg}\alpha$.

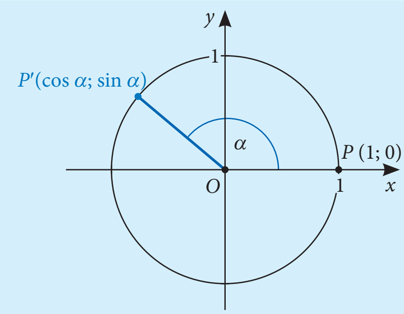
A szinuszt, a koszinuszt, a tangenst és a kotangenst közös néven **szögfüggvényeknek** nevezzük.



$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$; $\quad \cos\alpha = \dfrac{b}{c}$;

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$; $\quad \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{b}{a}$

D Ha egy koordináta-rendszer síkjában a $P(1; 0)$ pontot elforgatjuk az origó körül α szöggel, akkor P pont képének az első koordinátáját az α **koszinuszának**, második koordinátáját pedig az α **szinuszának** nevezzük.



T Minden α szög esetében igaz, hogy $\mathbf{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$.

D Ha egy szög koszinusza nem egyenlő 0-val, akkor a $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ számot az α **tangensének** nevezzük. Jele: $\operatorname{tg}\alpha$.
Ha egy szög szinusza nem egyenlő 0-val, akkor a $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ számot az α **kotangensének** nevezzük. Jele: $\operatorname{ctg}\alpha$.

T **Szinusztétel**: A háromszög két oldalának aránya egyenlő a velük szemben lévő szögek szinuszának arányával. A szokásos jelöléssel: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.
Koszinusztétel: A háromszög bármely oldalhosszúsága kifejezhető a másik két oldal és az ezek által közbezárt szög felhasználásával. A szokásos jelöléssel: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

T Ha egy háromszög két oldalának hosszúsága a, illetve b, és az általuk közbezárt szög γ, akkor a háromszög területe $\dfrac{ab\sin\gamma}{2}$-vel egyenlő.

T Ha egy szakasz két végpontja $A(a_1; a_2)$ és $B(b_1; b_2)$, akkor e szakasz felezőpontja $F\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}; \dfrac{a_2+b_2}{2}\right)$.
Ha egy háromszög csúcsai $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$ és $C(c_1; c_2)$, akkor a háromszög súlypontja $S\left(\dfrac{a_1+b_1+c_1}{3}; \dfrac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$.

D Azt a vektort, amely merőleges egy egyenesre, és nem a nullvektor, az egyenes egy **normálvektorának** nevezzük. Minden egyenesnek végtelen sok normálvektora van.

T Ha egy egyenes egyik normálvektora $\mathbf{n}(A; B)$, és az egyenes egy adott pontja $P_0(x_0; y_0)$, akkor az egyenlete felírható $Ax + By = Ax_0 + By_0$ alakban.

D Azt a vektort, amely egyállású egy egyenessel, és nem a nullvektor, az egyenes egy **irányvektorának** nevezzük. Minden egyenesnek végtelen sok irányvektora van.

T Ha egy egyenes egyenlete $y = mx + b$ alakú, ahol az m és a b adott valós számok, akkor itt m az egyenes **iránytangense** (meredeksége), a b pedig azt mutatja, hol metszi az egyenes az ordinátatengelyt.

T A $K(u; v)$ középpontú, r sugarú **kör egyenlete** $(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$.

68 A trigonometria alkalmazásai

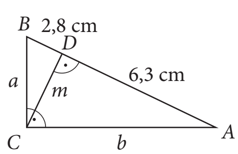
BEVEZETŐ

A geometriai számítási feladatok nagy része a háromszögekkel kapcsolatos számításokra vezethető vissza. Jelentős mértékben gyorsulhat a probléma megoldása, ha a háromszöghöz legjobban illő számítási módot választjuk ki. Derékszögű háromszög esetében időveszteséget okoz, ha koszinusztétellel számolunk Pitagorasz-tétel helyett, ugyanakkor súlyos elvi hibát jelent, ha a nem derékszögű háromszögben a háromszög oldalaira a Pitagorasz-tételt próbáljuk alkalmazni, vagy a szögfüggvényeket az oldalak hányadosaként írjuk fel egy nem derékszögű háromszögben. A következő példában összefoglaljuk a legfontosabb eseteket.

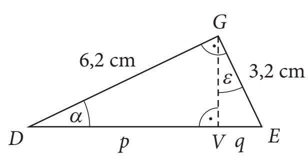
KIDOLGOZOTT FELADAT

Számítsd ki az ismeretlen szakaszhosszakat és a megjelölt szögeket! A keresett hosszúságokat két tizedesjegy pontossággal, a szögeket egy tizedesjegy pontossággal határozd meg!

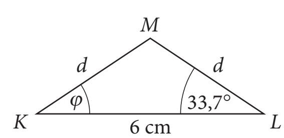
a)



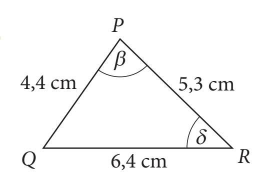
b)



c)



d)



Megoldás

a) A derékszögű háromszögben érvényes a *magasságtétel* és a *befogótétel*. Ezért
$m = \sqrt{2{,}8 \cdot 6{,}3} = \sqrt{17{,}64} = 4{,}20$ (cm), $a = \sqrt{2{,}8 \cdot 9{,}1} = \sqrt{25{,}48} \approx 5{,}05$ (cm) és $b = \sqrt{6{,}3 \cdot 9{,}1} = \sqrt{57{,}33} \approx 7{,}57$ cm.

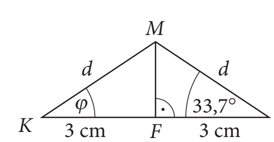
b) A *derékszögű háromszög* hegyesszögeinek szögfüggvényeit a háromszög oldalainak hányadosával is kifejezhetjük. A DEG háromszögben: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3{,}2}{6{,}2} \approx 0{,}516$, amiből $\alpha \approx 27{,}3°$.

A DVG derékszögű háromszögben $\cos 27{,}3° = \frac{p}{6{,}2}$, amiből $p = 6{,}2 \cos 27{,}3° \approx 5{,}51$ (cm).

Az ε és az α *merőleges szárú hegyesszögek*, ezért ezek egyenlők: $\varepsilon \approx 27{,}3°$.

A GVE derékszögű háromszögben $\sin 27{,}3° = \frac{q}{3{,}2}$, amiből $q = 3{,}2 \sin 27{,}3° \approx 1{,}47$ (cm).

c) A KLM háromszög *egyenlő szárú*, ezért az alapján fekvő két szöge is egyenlő: $\varphi = 33{,}7°$.
Ha megrajzoljuk a háromszög alapjához tartozó magasságát, akkor a háromszöget két egybevágó *derékszögű háromszögre* bontjuk. Például az MFL derékszögű háromszögben: $\cos 33{,}7° = \frac{3}{d}$, amiből $d = \frac{3}{\cos 33{,}7°} \approx 3{,}61$ (cm).



d) Gyors számolással ellenőrizhetjük, hogy a PQR háromszög *nem derékszögű*, hiszen $4{,}4^2 + 5{,}3^2 = 47{,}45 \neq 6{,}4^2 = 40{,}96$.
A háromszögre a mi ismereteink szerint csak a *koszinusztétel* alkalmazható. Célszerű ezt a háromszög leghosszabb oldalára felírni: $6{,}4^2 = 5{,}3^2 + 4{,}4^2 - 2 \cdot 5{,}3 \cdot 4{,}4 \cdot \cos \beta$, amiből $\cos \beta = \frac{5{,}3^2 + 4{,}4^2 - 6{,}4^2}{2 \cdot 5{,}3 \cdot 4{,}4} \approx 0{,}139$. Tehát $\beta \approx 82{,}0°$.
A δ szöget célszerű szinusztétellel kiszámítani: $\frac{\sin \delta}{\sin 82°} = \frac{4{,}4}{6{,}4} = 0{,}6875$, $\sin \delta = 0{,}6875 \cdot \sin 82° \approx 0{,}681$, amiből $\delta \approx 42{,}9°$. (A δ csak hegyesszög lehet, hiszen nem a háromszög leghosszabb oldalával van szemben.)

Megjegyzés

A $\sin \delta = 0{,}681$ egyenletnek végtelen sok megoldása van: $42{,}9° + n \cdot 360°$, illetve $137{,}1° + n \cdot 360°$ ($n \in \mathbf{Z}$). A végtelen sok megoldás közül csak egy felelt meg a kitűzött feladat feltételeinek.

FELADAT

1. Számítsuk ki a Kidolgozott feladatban megadott *ABC*, *DGE*, *KLM* és *PQR* háromszög területét!

2. Egy derékszögű háromszög átfogója 25 cm, a hozzá tartozó magassága 6,72 cm.

a) Mekkora a háromszög területe?
b) Mekkorák a befogók?
c) Mekkorák a háromszög hegyesszögei?

3. Egy egyenlő szárú háromszög oldalai cm-ben kifejezve egész számok. A háromszög kerülete 25 cm.

a) Hányféle ilyen háromszög van? Mekkorák az oldalaik?
b) A háromszögről még azt is tudjuk, hogy az alapja 7 cm. Mekkorák a szögei és mekkora a területe?

4. Egy háromszög egyik oldala 8,5 cm hosszú, a rajta fekvő két szög 50°-os, illetve 66°-os.

a) Mekkora szögben látszanak a háromszög oldalai a beírt kör középpontjából?
b) Mekkora a háromszög másik két oldala?
c) Mekkora a háromszög területe?

5. Egy 4 méter hosszú létrát úgy támasztottunk a fához, hogy a legfelső pontja 3,2 méter magasságba került.

a) Mekkora távolságra van a létra alja a fától?
b) Milyen magasra érne fel ez a létra, ha az alja 5 dm-rel távolabbra csúszna a fától?

HÁZI FELADAT

1. Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza 20 cm és 21 cm.

a) Mekkora a háromszög átfogóhoz tartozó magassága?
b) Mekkora részekre osztja az átfogót a hozzá tartozó magasság?
c) Mekkorák a háromszög hegyesszögei?

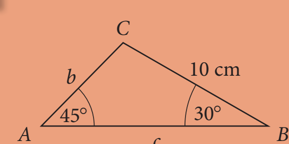
2. Egy derékszögű háromszög átfogóját a hozzá tartozó magasság egy 4 cm és egy 9 cm hosszú szakaszra bontja.

a) Mekkora a háromszög köré írható kör sugara?
b) Mekkora a háromszög átfogójához tartozó magasság és a háromszög területe?
c) Mekkorák a háromszög befogói és a háromszög szögei?

3. Egy derékszögű háromszögben az egyik hegyesszög szögfelezője 10 cm hosszú. Ez a szögfelező a szemközti oldallal 60°-os szöget zár be.

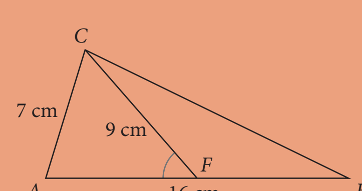
a) Mekkorák e háromszög oldalai és szögei?
b) Mekkora területű részekre osztja ez a szögfelező az adott háromszöget?

4. Egy háromszög néhány adatát megjelöltük az ábrán.



a) Számítsd ki a *b* és a *c* oldal hosszát!
b) Számítsd ki a háromszög területét!

5. Egy háromszög két oldalának hossza 16 cm, illetve 7 cm, a 16 cm-es oldalhoz tartozó súlyvonal hossza 9 cm.

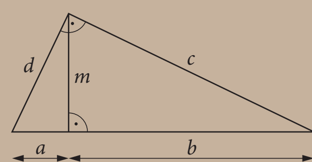


a) Mekkora a súlyvonal és a 16 cm-es oldal szöge?
b) Mekkora a háromszög harmadik oldala?
c) Mekkora a háromszög két részének a területe?

69 Sokszögek, körök

FELADAT

1. Döntse el, hogy az alábbi összefüggések közül – amelyek a mellékelt ábrára vonatkoznak – melyik igaz, melyik hamis!



a) $c^2 = ab$;
b) $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$;
c) $m^2 = a \cdot b$;
d) $m^2 = c^2 - b^2$;
e) $d^2 = a^2 + a \cdot b$;
f) $c^2 = b(a + b)$;
g) $c^2 + d^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

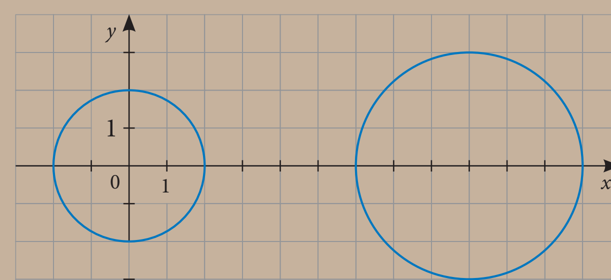
2. Egy rombusz kerülete 52 cm, átlóinak az összege 34 cm.
a) Mekkorák a rombusz átlói?
b) Számítsd ki a rombusz területét!

3. Egy szabályos sokszög egyik külső szöge 15°-os, az oldalai 3,42 cm hosszúságúak.
a) Hány oldalú ez a sokszög?
b) Számítsd ki a sokszög kerületét és területét!

4. Egy tengelyesen szimmetrikus trapéz egyik szöge 60°-os, a szárai hossza pedig 6,6 cm. A trapéz egyik átlója merőleges az egyik szárra. Mekkora ennek a trapéznak a területe?

5. Egy körlemezből kivágunk egy feleakkora területű körlemezt. Hogy aránylik egymáshoz a két kör kerülete?

6. Egy 2 sugarú és egy 3 sugarú kör középpontja egy koordináta-rendszer x tengelyén van, a kisebbiké az origóban, a nagyobbiké a (9; 0) pontban. A két adott kört érintő harmadik kör középpontja szintén az x tengelyre illeszkedik. Hány ilyen kör van, hol van a középpontjuk, és mekkora lehet a sugaruk?



7. Egy síkban a P pont 34 cm távolságra van egy kör középpontjától. P-ből ehhez a körhöz érintőket húzunk, az érintőszakaszok hossza 30 cm-es.
a) Mekkora a kör sugara?
b) Mekkora szöget zár be egymással a két érintő?
c) Mekkora annak a síkrésznek a területe, amelyet a két érintőszakasz és az érintési pontokat összekötő rövidebb körív határol?

HÁZI FELADAT

1. Hány százaléka egy kör területének a beleírt szabályos háromszög, négyszög, hatszög, illetve nyolcszög területe?

2. Egy deltoidnak van két derékszöge. Melyik kijelentés igaz az alábbiak közül?

a) Ez a deltoid egy négyzet.

b) Ennek a deltoidnak pontosan három derékszöge van.

c) Ebben a deltoidban a külső szögek összege 360°.

d) Ennek a deltoidnak van körülírt köre.

e) Ebben a deltoidban a belső szögek összege 360°.

3. Egy húrtrapéz átlói merőlegesek a trapéz egy-egy szárára. A trapéz hosszabbik alapja 24 cm-es, egyik szöge 60°-os.

a) Mekkora a trapéz köré írt kör sugara?

b) Számítsd ki a trapéz kerületét!

c) Számítsd ki a trapéz területét!

d) Mekkora szakaszokra osztja a trapéz átlóinak metszéspontja az átlókat?

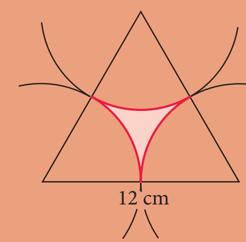
e) Igazold, hogy a trapéz belső szögfelezői egy deltoidot fognak közre! Számítsd ki a deltoid területét és kerületét!

4. Az *ABC* háromszög szabályos, oldalhossza 12 cm, az *AB* oldalának felezőpontja *F*.

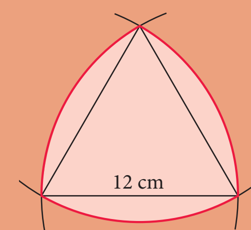
a) Mekkora távolságra van az *F* pont a *BC* oldaltól?

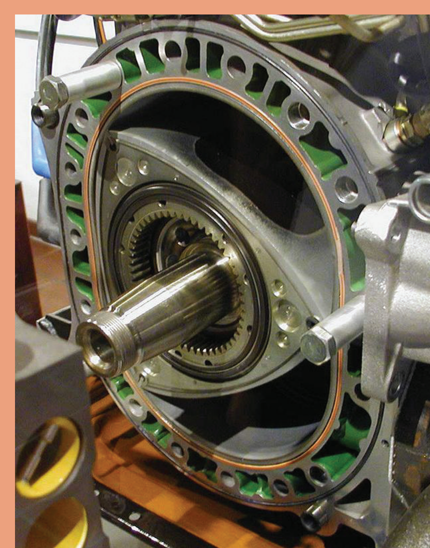
b) Az *F* pontból merőlegest állítunk az *AC* oldalra. Mekkora részekre osztja a merőleges az *AC* oldalt?

c) Az *A*, *B*, *C* pontok körül 6-6 cm sugarú kört rajzolunk. A háromszög területének mekkora része nem tartozik hozzá egyik körhöz sem?



d) Az *A*, *B*, *C* pontok körül egy-egy 12 cm sugarú kört rajzolunk. Mekkora annak a síkidomnak a területe, amelynek pontjai mindhárom körhöz hozzátartoznak?





RÁADÁS

Korábbi érettségi feladat

Egy családnak olyan téglalap alakú telke van, melynek két szomszédos oldala 68 m, illetve 30 m hosszú. A telek egyik sarkánál úgy rögzítettek egy kerti locsolóberendezést, hogy a telek rövidebb oldalától 4 m-re, a vele szomszédos oldaltól 3 m-re legyen. A locsolóberendezés körbeforgó locsolófeje azt a részt öntözi, amely a rögzítés helyétől legalább 0,5 m-re, de legfeljebb 4 m-re van. A telek mekkora részét öntözi a locsolóberendezés, és ez hány százaléka a telek területének? (emelt szint) *(2007. október, középszint)*

70 Szakaszok, szögek, terület

KIDOLGOZOTT FELADAT

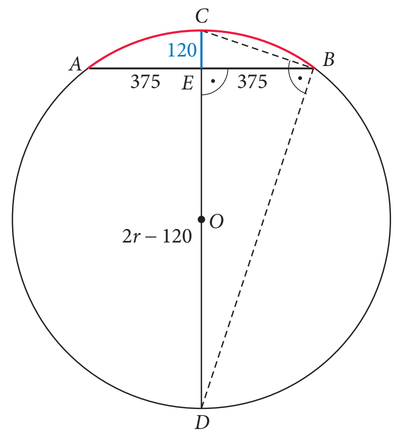
Egy függőhíd tartószerkezete tökéletes körívet alkot. A híd hossza (a körív két vége közötti távolság) 750 méter, és az ív a legmagasabb ponton 120 méteres magasságban emelkedik a hídpálya fölé. Mekkora a híd ívének sugara?

Megoldás

Készítsünk ábrát a feladathoz az adatok feltüntetésével! A kör sugarát jelölje r.

A *Thalész-tétel* miatt a CBD háromszög a B csúcsánál derékszögű.

A derékszögű háromszögben igaz a magasságtétel: $EB = \sqrt{EC \cdot ED}$, tehát: $374 = \sqrt{120 \cdot (2r - 120)}$.



Ebből négyzetre emelés után: $375^2 = 120 \cdot (2r - 120)$.

$2r - 120 = \frac{375^2}{120} \approx 1172, \quad 2r \approx 1292, \quad r \approx 646$ (m).

A híd ívének sugara tehát körülbelül 650 méter.

Megjegyzés

A feladatot Pitagorasz-tétellel is megoldhattuk volna.

Mivel $OE = r - 120$, így az OEB derékszögű háromszögben igaz, hogy $(r - 120)^2 + 375^2 = r^2$.

A négyzetre emelést elvégezve és az egyenletet rendezve kapjuk: $240r = 375^2 + 120^2$, amiből $r = \frac{375^2 + 120^2}{240} \approx 646$.

FELADAT

1. Egy 25 cm sugarú kör két párhuzamos húrjának a hosszúsága 14 cm, illetve 48 cm. Mekkora a két húr távolsága?

2. Egy 18 cm sugarú körben megrajzoltunk egy 18 cm hosszú húrt.

a) Mekkora a húrhoz tartozó két középponti szög?

b) Mekkora területű részekre vágja a kört ez a húr?

3. Egy rombusz oldala 27 cm hosszú, és egyik átlója is 27 cm-es.

a) Mekkora a rombusz kerülete és területe?

b) Mekkorák a rombusz szögei?

c) Mekkora a rombusz beírt körének sugara?

4. Az 1 : 30 000 arányú térképen egy tó 2 cm^2 területű kék foltként van ábrázolva. Hány négyzetméter a valóságban a tó víztükrének területe?

5. Egy paralelogramma egyik oldalának hossza 13 cm, átlóinak hossza 10 cm, illetve 24 cm.

a) Igazold, hogy a paralelogramma átlói merőlegesek egymásra!

b) Igazold, hogy ez a paralelogramma rombusz!

c) Igazold, hogy az oldalak négyzetének összege egyenlő az átlók négyzetének összegével!

d) Mekkorák ennek a rombusznak a szögei?

e) Számítsd ki ennek a rombusznak a magasságát!

6. Egy derékszögű háromszög egyik szöge 35°-os, átfogója 4,58 cm hosszú.

a) Mekkorák a befogók?

b) Mekkora a háromszög területe?

c) Mekkora a háromszög köré írt kör területe?

d) Mekkora a háromszögbe írt kör területe?

HÁZI FELADAT

1. Egy kör sugara 18 cm.

a) Mekkora húr tartozik ebben a körben a 45°-os középponti szöghöz?

b) Mekkora területű részekre osztja ez a húr a körlemezt?

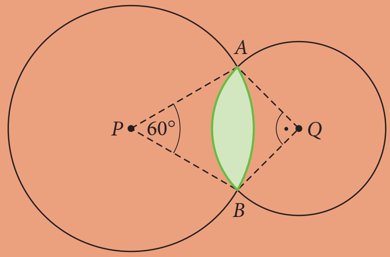
2. Rajzold meg 1 : 8 arányú kicsinyítésben a 2 dm-es sugarú körbe írt szabályos 12 szöget!

a) Mekkora a szabályos 12 szög oldala a rajzon, és mekkora a valóságban?

b) Mekkora a szabályos 12 szögbe írt kör sugara a rajzon, és mekkora a valóságban?

3. Mekkora területűek egy 16 cm sugarú földgömbön az egyes földrészek? (A Föld sugara 6370 km, Európa területe 10,5 millió km^2, Ázsia területe 44,6 millió km^2, Afrika 30,4 millió km^2, Amerika területe 42,3 millió km^2, Ausztrália és Óceánia 8,4 millió km^2, az Antarktisz 13,2 millió km^2.)

4. Egy kisebb és egy nagyobb kör részben átfedi egymást. A következő adatok ismertek:
$PA = PB = 6$ cm, $APB\sphericalangle = 60°$, $AQB\sphericalangle = 90°$.
Mekkora a két körlemez közös részének a területe?



5. Egy paralelogramma oldalainak hossza 32 mm és 49 mm, az egyik átlója 26 mm-es.

a) Mekkorák a paralelogramma szögei?

b) Mekkora a másik átló?

c) Igazold, hogy az oldalak négyzetének összege egyenlő az átlók négyzetének összegével!

71 Felszín, térfogat

FELADAT

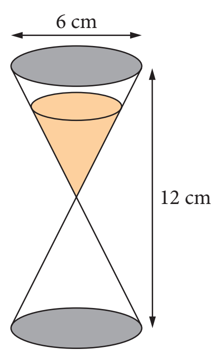
1. Az Abai család havonta átlagosan 16 m^3 vizet fogyaszt.

a) Mekkora magasságig telne meg a kezdetben üres, 50 m hosszú, 21 m széles, 2,5 m mély úszómedence, ha a család által egy év alatt felhasznált vízmennyiséget a medencébe eresztenénk?

b) Mennyi ideig lenne elegendő az Abai családnak egy egész medencényi víz, ha közben az átlagos fogyasztásuk nem változna számottevő mértékben?

KIDOLGOZOTT FELADAT

Az ábra egy homokóra méreteit szemlélteti. A két tartály egybevágó, forgáskúp alakú, az összekötő cső hozzájuk képest elhanyagolható átmérőjű.



Amikor a homok teljesen lepereg, 2 cm magasan áll majd az alsó tartályban. (Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az alsó tartályban a homokkupac teteje teljesen vízszintes lesz.)

a) Hány cm^3 homok van a homokórában?

b) Milyen magasan állt kezdetben a homok a felső tartályban?

Megoldás

a) Az egyik kúp térfogata:

$$V = \frac{r^2\pi m}{3} = \frac{3^2\pi \cdot 6}{3} \approx 56{,}5 \text{ cm}^3.$$

Ennyi a másik kúp térfogata is.

Az alsó tartályba átfolyt homok felett egy 4 cm magasságú, *az eredetihez hasonló* „üres forgáskúp” van. A hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóságuk arányának köbével (harmadik hatványával) egyenlő: $\frac{V_{\text{üres}}}{V} = \left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{8}{27}$, tehát a homok térfogata a teljes térfogatnak a $\frac{19}{27}$ része.

$$V_{\text{homok}} = \frac{19}{27} \cdot V \approx 39{,}8 \text{ cm}^3.$$

b) Ismét a hasonló testek térfogatának arányát használjuk. Ha a homok h cm magasságig tölti meg a felső kúpot, akkor a homokkal megtöltött kúp hasonló az eredetihez, a hasonlóságuk aránya pedig megegyezik a magasságuk arányával: $\left(\frac{h}{6}\right)^3 = \frac{V_{\text{homok}}}{V} = \frac{19}{27}$. Ebből $\frac{h}{6} = \sqrt[3]{\frac{19}{27}}$, vagyis $h = 6 \cdot \sqrt[3]{\frac{19}{27}} \approx 5{,}3$.

Tehát a felső kúpban közelítőleg 5,3 cm magasságban állt a homok.

FELADAT

2. Hányszorosára, illetve hány %-kal változik az egyenes hasáb térfogata, ha

a) a magasságát felére csökkentjük, de az alaplapját változatlanul hagyjuk;

b) az alaplapját 0,5 arányban kicsinyítjük, de a magasságát változatlanul hagyjuk;

c) a hasábot 0,9 arányszámmal kicsinyítjük;

d) a hasábot 1,1 arányszámmal nagyítjük?

3. 80 cm hosszúságúra darabolt, 10 cm átmérőjű fahengerekből olyan cölöpöket esztergálnak, amelyeknek a hengeres része ugyancsak 10 cm átmérőjű (lásd az ábrát). Egy cölöp hossza 77 cm, a csonka kúp alakú rész 5 cm magas, a henger alakú rész 60 cm hosszú. A cölöp csonka kúp alakú végén lévő kör 5 cm átmérőjű. A cölöpök külső felületét ellenálló lakkal vonják be. Hány m^2 felületet kell belakkozni, ha 15 000 darab cölöpöt gyártanak? Válaszodat tíz négyzetméterre kerekítve add meg!

4. Táptalajon baktériumokat szaporítanak. A gömb alakú baktériumok (kokkuszok) átmérője 3 μm ($1\ \mu m = 10^{-6}$ m). A szaporodási folyamat gyors növekedést mutató fázisában az 1 cm^3-ben található baktériumok száma eléri a 10^9 értéket.

a) Számítsd ki 10^9 darab baktérium össztérfogatát és együttes felszínét!

b) Az 1 cm^3-ben található baktériumok számát a növekedési szakasz egy részében olyan exponenciális függvény írja le, amelynek a hozzárendelési szabálya: $n(t) = 1500 \cdot 2^{c \cdot t}$. A képletben t az órában mért időt jelöli. Határozd meg a c értékét, ha tudjuk, hogy a 10^9 darabos értéket a $t = 9$ (óra) esetben mérték!

HÁZI FELADAT

1. Egy 1 liter térfogatú, 20 cm magasságú, forgáshenger alakú flakont szeretnénk készíteni.

a) Mekkora legyen a henger átmérője?

b) Hány cm^2 anyag kell a flakon elkészítéséhez, ha az felül nyitott?

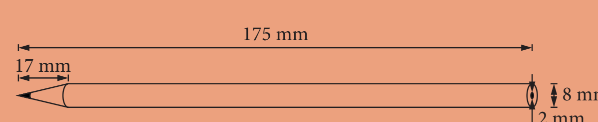
2. Egy forgáskúp alakú átlátszó dísztárgyban színes folyadék van. A kúp alapkörének átmérője 26 cm, magassága 30 cm. Amikor a kúpot az alaplapjára állítjuk, akkor éppen magasságának feléig áll benne a színes folyadék.

a) Készíts ábrát a kúpról!

b) A kúp teljes térfogatának hány százalékát teszi ki a folyadék térfogata?

c) Megfordítjuk a kúpot a csúcsára. Milyen magasságban van ekkor a folyadék felső szintje?

3. Egy henger alakú grafitceruza teljes hossza 175 mm. A kihegyezett ceruza vázlatrajzát a mellékelt ábra mutatja. A ceruza külső átmérője 8 mm, belsejében 2 mm átmérőjű, henger alakú grafitrúd található. A forgáskúp alakra kihegyezett rész teljes magassága 17 mm. A ceruza 0,5 $\frac{g}{cm^3}$ sűrűségű fából és 2,2 $\frac{g}{cm^3}$ sűrűségű grafitból készült.



a) Mekkora a belső, kihegyezett grafitrúd térfogata?

b) Mekkora a fából készült rész térfogata?

c) Ebből a ceruzából 270 db-ot csomagolnak egy dobozba. Hány kg egy ilyen doboz tartalma?

4. Megrajzoltuk egy szabályos háromszög beírt és körülírt körét, majd a három síkidomot megforgattuk az egyik közös szimmetriatengelyük körül.

a) Igazoljuk, hogy a keletkező két gömb térfogatának aránya nem függ a szabályos háromszög oldalhosszától! Határozd meg ezt az arányt!

b) Igazoljuk, hogy a keletkező két gömb felszínének aránya nem függ a szabályos háromszög oldalhosszától! Határozd meg ezt az arányt!

72 Távolság, szög, felszín, térfogat

FELADAT

1. Egy szimmetrikus trapéz alapjai 14 cm és 48 cm hosszúak, magassága 31 cm.

a) Mekkorák ennek a trapéznak a szárai és a szögei?

b) Forgasd meg ezt a trapézt a szimmetriatengelye körül. Milyen test keletkezik? Add meg a keletkezett test jellemző adatait!

c) Mekkora a b) pontban kapott test felszíne és térfogata?

2. Egy 10 cm átmérőjű, 15 dm hosszú, fából készült forgáshengerből annyi 5 cm sugarú gömböt faragunk, ahányat csak lehet.

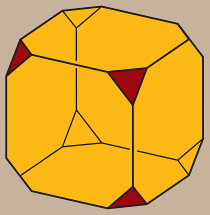
a) Hány gömböt faraghatunk?

b) A henger térfogatának hányadrésze a hulladék?

c) Hogy aránylik egymáshoz a henger felszíne és a gömbök felszínének az összege?

3. Egy szabályos csonka kúp alakú dézsa alapkörének az átmérője 3 dm, fedőkörének az átmérője 50 cm, magassága 40 cm. A dézsában 24 cm magasságig víz áll. Hány liter víz van benne?

4. Egy 30 cm-es élű kocka mindegyik sarkáról levágunk egy olyan gúlát, amelynek az oldallapjai 6 cm-es befogójú derékszögű háromszögek.



a) Hány lapja, hány csúcsa és hány éle van a keletkezett testnek?

b) Számítsd ki e test felszínét!

c) Számítsd ki e test térfogatát!

HÁZI FELADAT

1. Egy kocka testátlója 53 cm hosszú.

a) Mekkora a kocka éle?

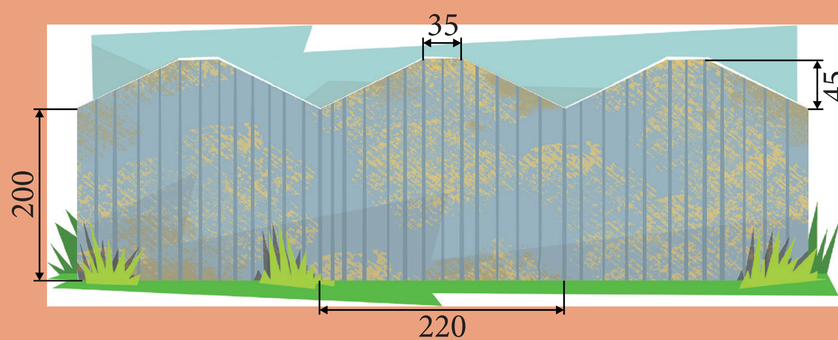
b) Mekkora szöget zár be a kocka két testátlója?

c) Mekkora szöget zár be egy testátló az egyik végpontjából induló élekkel?

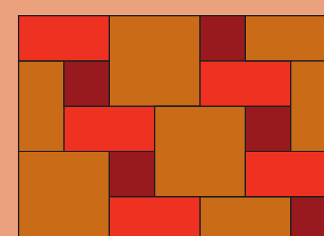
2. Egy 10 cm sugarú gömbön megjelöltünk nyolc pontot úgy, hogy azok egy kocka csúcspontjai legyenek. Válassz ki minden lehetséges módon két-két megjelölt pontot, majd számítsd ki ezek távolságát! Hány különböző távolságot kaptál?

3. Egy kis méretű mozgásérzékelőt a vízszintes terepre merőlegesen álló, 4 m magas oszlop tetején helyeztek el. Azokat a mozgó objektumokat érzékeli, amelyek az érzékelőtől legfeljebb 8 m távolságban vannak. Az oszlop talppontjától legalább mekkora távolságban szaladt el a macska, ha az érzékelő nem jelezte a mozgását?

4. Kissé megkopott a deszkakerítés utca felé és kert felé néző oldala is, ezért mindkét oldalán újra akarjuk festeni. A deszkakerítés csak az utca felőli részen határolja a telket, a kert három oldalról drótkerítéssel van bekerítve, amit most nem kell lefesteni. A deszkakerítés hossza 22 méter, azaz a 220 cm szélességű „minta” pontosan 10-szer ismétlődik. Az ábrán a méreteket cm-ben adtuk meg; 1 kg festék kb. 4,5 m^2-re elegendő. Hány kg festéket kell vennünk, ha kétrétegű (alapozó és fedő) festést szeretnénk?



5. Háromféle járólappal szeretnénk burkolni a 16 m × 14 m-es téglalap alapú váróterem padlóját. A csempék mérete 30 cm × 30 cm, 15 cm × 30 cm és 15 cm × 15 cm. A minta egy részletét a mellékelt ábra mutatja. Körülbelül hány m^2 járólapra van szükségünk az egyes méretekből?



RÁADÁS

Korábbi érettségi feladat

1. Egy fa építőjáték-készlet négyféle, különböző méretű téglatestfajtából áll. A készletben a különböző méretű elemek mindegyikéből 10 db van. Az egyik téglatest (nevezzük alapelemnek) egy csúcsából induló éleinek hossza: 8 cm, 4 cm, 2 cm. A többi elem méreteit úgy kapjuk, hogy az alapelem valamelyik 4 párhuzamos élének a hosszát megduplázzuk, a többi él hosszát pedig változatlanul hagyjuk.

a) Mekkora az egyes elemek felszíne?

b) Rajzolja le az alapelem kiterített hálózatának 1:2 arányú kicsinyített képét!

c) Elférhet-e a játékkészlet egy olyan kocka alakú dobozban, amelynek belső éle 16 cm?

d) A teljes készletből öt elemet kiveszünk. (A kiválasztás során minden elemet azonos valószínűséggel választunk.) Mekkora valószínűséggel lesz mind az öt kiválasztott elem négyzetes oszlop? (A valószínűség értékét három tizedesjegy pontossággal adja meg!)

(2008. október, középszint)

2. Egy csonka kúp alakú tejfölösdoboz méretei a következők: az alaplap átmérője 6 cm, a fedőlap átmérője 11 cm és az alkotója 8,5 cm.

a) Hány cm^3 tejföl kerül a dobozba, ha a gyárban a kisebbik körlapján álló dobozt magasságának 86%-áig töltik meg? Válaszát tíz cm^3-re kerekítve adja meg!

b) A gyártás során a dobozok 3%-a megsérül, selejtes lesz. Az ellenőr a gyártott dobozok közül visszatevéssel 10 dobozt kiválaszt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 10 doboz között lesz legalább egy selejtes? Válaszát két tizedesjegyre kerekítve adja meg!

(2011. október, középszint)

73 Vektorok és koordináta-rendszer

FELADAT

1. Az $ABCD$ négyzet oldalai 5 cm-esek, a négyzet középpontja az O pont. Milyen hosszú a következő vektor?

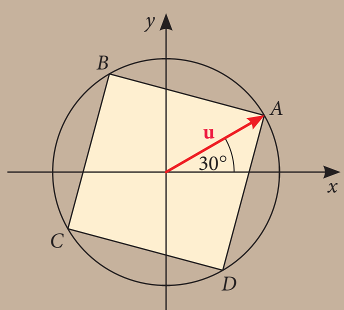
a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CB}$

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AB}$

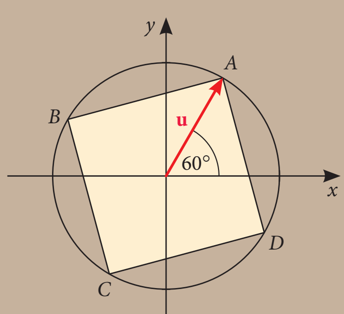
c) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AB}$

2. Az origó kezdőpontú **u** vektor hossza 1 egység. Add meg az $ABCD$ négyzet csúcsainak koordinátáit!

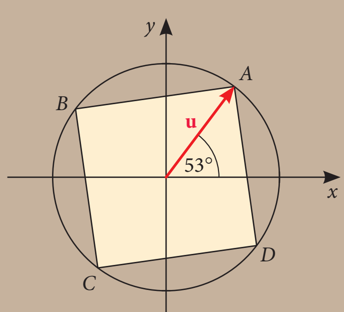
a)



b)



c)



3. Folytasd a 2. b) feladatot! Az **i**, **j** bázisvektorok legyenek a szokásos módon választott egységvektorok a koordináta-rendszerben!

a) Mekkora az $ABCD$ négyzet oldala?

b) Add meg az $\overrightarrow{AB}$ és az $\overrightarrow{AD}$ vektor koordinátáit az **i**, **j** bázisrendszerben!

c) Add meg a $\overrightarrow{CB}$ és a $\overrightarrow{CD}$ vektor koordinátáit is!

4. Legyen az **i**-**j** bázisrendszerben **a**$(4; -3)$ és **b**$(-2; 5)$.

a) Rajzold be ezt a két vektort a koordináta-rendszerbe úgy, hogy az origó legyen a kezdőpontjuk! Mik a végpontjuk koordinátái?

b) Számítsd ki az **a** és a **b** vektorok hosszát!

c) Számítsd ki az **ab** skaláris szorzatot!

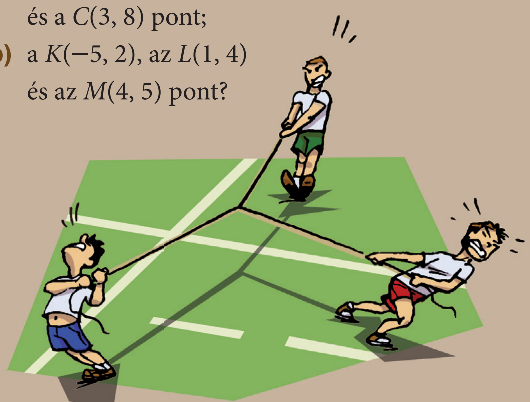
d) Számítsd ki a két vektor szögét!

e) Számítsd ki a következő skaláris szorzatokat: **ii**, **jj**, **ij**, **aa**, **bb**!

5. Van-e olyan háromszög, amelynek a csúcsai

a) az $A(-2, 6)$, a $B(0, 7)$ és a $C(3, 8)$ pont;

b) a $K(-5, 2)$, az $L(1, 4)$ és az $M(4, 5)$ pont?



6. Folytasd az előző feladatot! Legyen $\overrightarrow{CB}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC}=\mathbf{b}$ és $\overrightarrow{AB}=\mathbf{c}$.

a) Add meg **b** és **c** koordinátáit!

b) Fejezd ki **b**-vel és **c**-vel az **a** vektort, és add meg az **a** koordinátáit is!

c) Adj meg a koordinátáival egy-egy olyan vektort, amely merőleges az **a**-ra, a **b**-re, illetve a **c**-re!

7. Adott az ABC háromszög: $A(-2; 3)$, $B(2; 7)$, $C(7; 1)$. Számítsd ki a háromszög

a) kerületét; **b)** szögeit; **c)** területét!

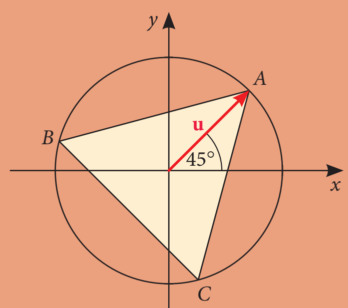
HÁZI FELADAT

1. Az origó kezdőpontú $\mathbf{u}$ vektor hossza 1 egység.

a) Add meg az *ABC* szabályos háromszög csúcsainak koordinátáit!

b) Add meg az oldalfelező pontokba mutató helyvektorok koordinátáit!

c) Számítsd ki a háromszög területét!



2. Megadunk egy **i-j** bázisrendszerben két vektort a koordinátáikkal: $\mathbf{u}(12; 5)$ és $\mathbf{v}(-4; 3)$.

a) Mik az $(\mathbf{u} + \mathbf{v})$, az $(\mathbf{u} - \mathbf{v})$, a $2\mathbf{u}$, a $2\mathbf{v}$ és a $(2\mathbf{u} + 2\mathbf{v})$ koordinátái?

b) Mennyi az $\mathbf{u}$, a $\mathbf{v}$, a $2\mathbf{u}$ és a $2\mathbf{v}$ abszolút értéke?

c) Számítsd ki az $\mathbf{uv}$ skaláris szorzatot!

d) Számítsd ki az $\mathbf{u}$ és a $\mathbf{v}$ szögét!

e) Számítsd ki a következő skaláris szorzatokat: $\mathbf{ui}$, $\mathbf{uj}$, $\mathbf{vi}$, $\mathbf{vj}$, $(\mathbf{u} + \mathbf{v})\mathbf{i}$, $(\mathbf{u} + \mathbf{v})(\mathbf{u} - \mathbf{v})$, $(2\mathbf{u} + 2\mathbf{v})\ (\mathbf{u} - \mathbf{v})$!

3. A $\mathbf{p}(p_1; p_2)$ vektor merőleges a $\mathbf{q}(9; -2)$ vektorra és hossza $\sqrt{340}$.

a) Milyen hosszú a $\mathbf{q}$?

b) Add meg a $\mathbf{p}$ koordinátáit!

4. Ismerjük az *ABC* háromszög csúcsainak koordinátáit: $A(-8; 7)$, $B(-4; -3)$, $C(11; 3)$.

a) Mekkorák az *ABC* háromszög oldalai?

b) Igazold, hogy ez a háromszög derékszögű!

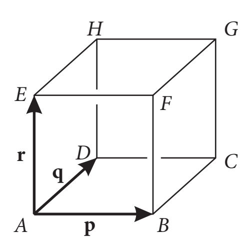
c) Számítsd ki az *ABC* háromszög legkisebb szögét!

d) Mekkora a háromszög köré írható kör sugara?

RÁADÁS

Korábbi érettségi feladat

1. Az ábrán látható kocka *A* csúcsából kiinduló élvektorai $\overrightarrow{AB} = \mathbf{p}$; $\overrightarrow{AD} = \mathbf{q}$ és $\overrightarrow{AE} = \mathbf{r}$. Fejezze ki $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ és $\mathbf{r}$ segítségével a $\overrightarrow{GC}$, az $\overrightarrow{AG}$ és az $\overrightarrow{FH}$ vektorokat!
(2015. május, középszint)



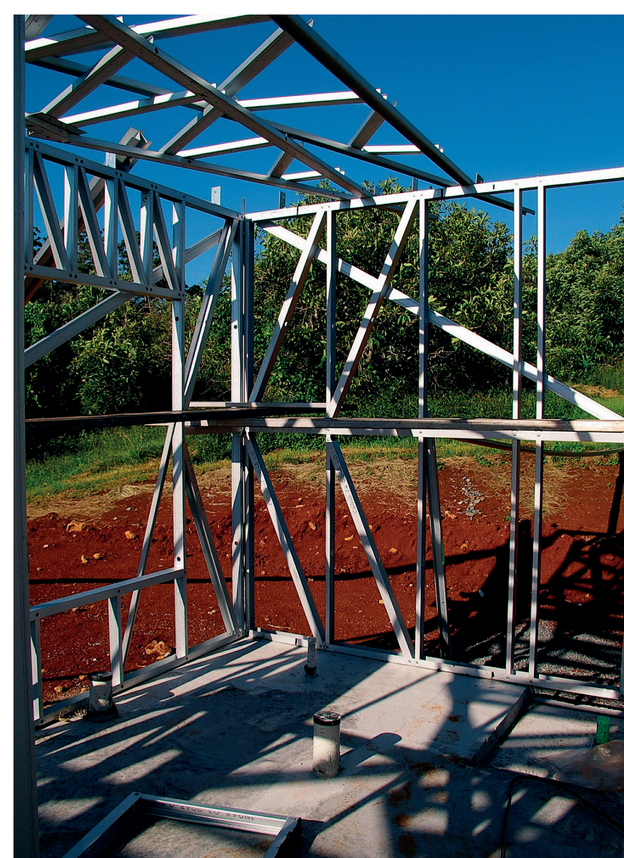
2. Számítsa ki a következő vektorok skaláris szorzatát! Határozza meg a két vektor által bezárt szöget! $\mathbf{a}(5; 8)$, $\mathbf{b}(-40; 25)$
(2009. október, középszint)

3. Tekintsük a koordináta-rendszerben adott $A(6; 9)$, $B(-5; 4)$ és $C(-2; 1)$ pontokat!

a) Mekkora az *AC* szakasz hossza?

b) Írja fel az *AB* oldalegyenes egyenletét!

c) Igazolja (számítással), hogy az *ABC* háromszög *C* csúcsánál derékszög van!
(2005. május, középszint)



74 Forgásszögek, egyenletek

FELADAT

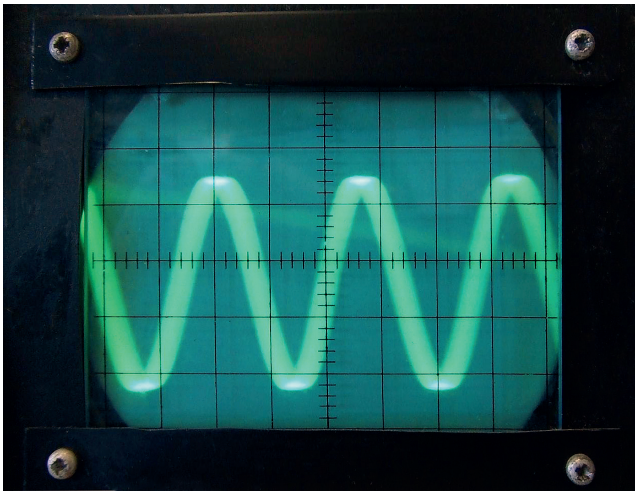
1. Melyik hegyesszög vagy tompaszög szögfüggvényeivel egyenlő

a) $\sin 1200°$; **c)** $\operatorname{tg} 1200°$;

b) $\cos 1200°$; **d)** $\operatorname{ctg} 1200°$?

2. Mennyi $\sin 1200° \cdot \cos 1200° \cdot \operatorname{tg} 1200° \cdot \operatorname{ctg} 1200°$?

3. Végtelen sok olyan szög van, amelynek a koszinusza $\frac{3}{5}$. A szögek kiszámítása nélkül állapítsd meg, mennyi lehet az egyes szögek szinusza, tangense és kotangense!



KIDOLGOZOTT FELADAT

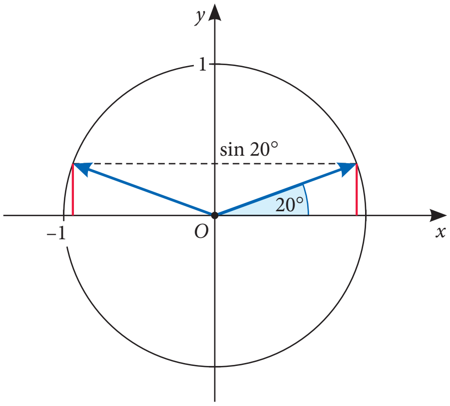
Oldjuk meg közelítő értékek használata nélkül az **R** alaphalmazon a $\sin x = \cos \frac{7\pi}{18}$ egyenletet!

Megoldás

Egyszerűbb lenne a feladat, ha a két szögnek azonos szögfüggvényét hasonlítanánk össze. Ezért felhasználjuk, hogy $\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, vagyis a jelen esetben $\cos \frac{7\pi}{18} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{18}\right) = \sin \frac{\pi}{9}$.

Tehát az eredeti egyenlet helyett dolgozhatunk a $\sin x = \sin \frac{\pi}{9}$ egyenlettel is.

A $\frac{\pi}{9}$ szög hegyesszög (20°-os), a $\frac{\pi}{9}$ irányszögű, origó kezdőpontú egységvektor az első síknegyedben van. Az ábrán a piros függőleges szakasz mutatja a szög szinuszát.



Ha $\sin x = \sin \frac{\pi}{9}$, akkor az x szöghöz tartozó egységvektor az első vagy a második síknegyedben lehet.

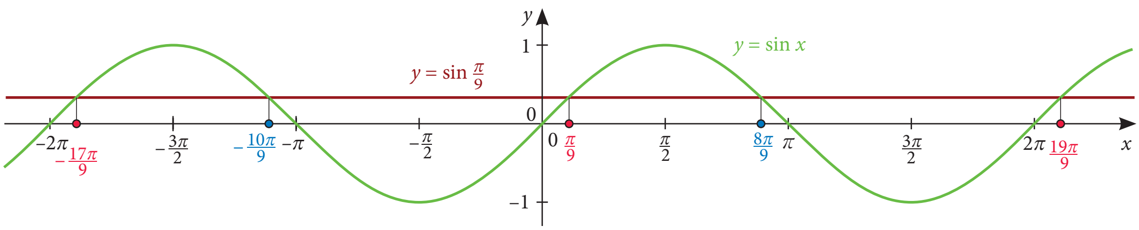
Ha x az első síknegyedben van, akkor $x = \frac{\pi}{9} + 2k\pi$, ahol a k egy egész számot jelöl.

Ha x a második síknegyedben van, akkor $x = \left(\pi - \frac{\pi}{9}\right) + 2l\pi = \frac{8\pi}{9} + 2l\pi$ $(l \in \mathbf{Z})$.

Számításainknak megfelelően tehát az egyenlet megoldáshalmaza végtelen sok számból áll, a $\frac{\pi}{9} + 2k\pi$ és a $\frac{8\pi}{9} + 2l\pi$ számokból $(k, l \in \mathbf{Z})$.

Megjegyzés

A $\sin x = \sin\frac{\pi}{9}$ egyenletet grafikus úton is egyszerűen megoldhatjuk, például számítógépes ábrázolás segítségével.



Az egyenlet megoldásait az $y = \sin x$ és az $y = \sin\frac{\pi}{9}$ egyenletű görbék közös pontjainak első koordinátái adják.

Ezek: $\frac{\pi}{9} + 2k\pi$, illetve $\frac{8\pi}{9} + 2l\pi$ $(k, l \in \mathbf{Z})$.

FELADAT

4. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $2\cos x = 1$

b) $\sin x = 1 + 3\sin x$

c) $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{\operatorname{tg} x - 3}{2} = \operatorname{tg} x - 2$

5. Oldd meg a $[-2\pi; 2\pi]$ alaphalmazon a

$3\sin^2 x - 5 = 7\cos x$

egyenletet az alábbi útmutatásokat követve!

a) Fejezd ki a $(\sin^2 x)$-et $\cos x$ segítségével!

b) Jelöld $(\cos x)$-et y-nal, oldd meg a kapott másodfokú egyenletet!

c) Az y-ra kapott mindkét érték lehet egy szög koszinusza?

d) Add meg az x közelítő értékeit!

6. Oldd meg a $[-2\pi; 2\pi]$ alaphalmazon a $\operatorname{tg} x = 2\sin x$ egyenletet az alábbi útmutatásokat követve!

a) Add meg az egyenlet értelmezési tartományát!

b) Fejezd ki $(\operatorname{tg} x)$-et $\sin x$ és $\cos x$ segítségével!

c) Rendezd úgy az egyenletet, hogy a jobb oldalán 0 szerepeljen, a bal oldali kifejezést alakítsd szorzattá!

d) Oldd meg az egyenletet!

e) Ellenőrizd, megkaptad-e az egyenletnek mind a 9 gyökét!

f) Ellenőrizd eredményeidet úgy, hogy közös koordináta-rendszerben ábrázolod az $x \mapsto \operatorname{tg} x$ és az $x \mapsto 2\sin x$ függvényt!

7. Folytasd az előző feladatot! Oldd meg a $\operatorname{tg} x = 2\sin x$ egyenletet az $\mathbf{R}$ alaphalmazon!

HÁZI FELADAT

1. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $2\cos x = -\sqrt{3}$

b) $5\sin x - 3 = 3\sin x - 2$

c) $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\sin\alpha = -\frac{7}{25}$. A szögek kiszámítása nélkül állapítsd meg, mennyi lehet $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ és $\operatorname{ctg}\alpha$!

3. Melyik valós szám lehet az x, ha $5^{\sin x \cdot \cos x \cdot \operatorname{tg} x} = 1$?

4. Oldd meg a $7 - 13\sin x = 4\cos^2 x$ egyenletet

a) a $[-2\pi; 2\pi]$ alaphalmazon;

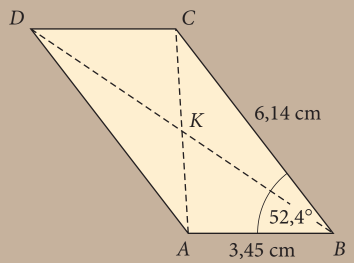
b) az $\mathbf{R}$ alaphalmazon!

5. Oldd meg a $\sin x = \cos x$ egyenletet a valós számok halmazán!

75 Vektorok kapcsolata

FELADAT

1. Az $ABCD$ paralelogramma oldalainak hossza $AB = 3{,}45$ cm és $BC = 6{,}14$ cm, az ABC szög 52,4°, az átlók metszéspontja K.

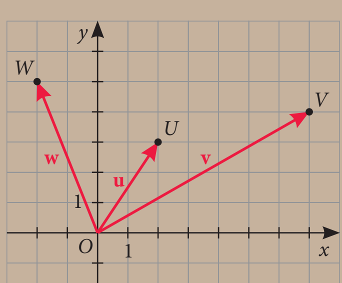


a) Számítsd ki a $\overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{KB}$, $\overrightarrow{KC}$ vektorok abszolút értékét!

b) Számítsd ki az átlók szögét!

c) Mekkora az $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{KB}$ és az $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{CK}$ skaláris szorzat?

2. Az $\mathbf{u}(2;\ 3)$, a $\mathbf{v}(7;\ 4)$ és a $\mathbf{w}(-2;\ 5)$ vektorok az origóból egy paralelogramma három csúcsába vezetnek. A $\mathbf{v}$ és a $\mathbf{w}$ végpontja a paralelogramma két szemközti csúcsa.



a) Határozd meg a paralelogramma középpontjának koordinátáit!

b) Add meg koordinátáival azt a vektort, amelyik az origóból a paralelogramma negyedik csúcsába mutat!

c) Mekkorák ennek a paralelogrammának az oldalai és az átlói?

3. Ismerjük az $A(-3;\ 5)$ és a $B(4;\ 2)$ pontot.

a) Számítsd ki az AB szakasz hosszát!

b) Add meg az AB szakasz felezőpontjának koordinátáit!

c) Számítsd ki az AB szakasz B-hez közelebbi harmadolópontjának koordinátáit!

d) Add meg az A kezdőpontú, B végpontú vektor koordinátáit, és jelöld ezt a vektort $\mathbf{v}$-vel!

e) Add meg a $3\mathbf{v}$, a $\frac{2\mathbf{v}}{5}$, a $0 \cdot \mathbf{v}$ és a $\left(-\frac{\mathbf{v}}{8}\right)$ vektor koordinátáit!

f) Add meg a $\mathbf{v}$ vektor pozitív irányú 90°-os elforgatottjának koordinátáit!

g) Határozd meg a következő vektorok koordinátáit, ha O pont az origó!

$\overrightarrow{OA} + \mathbf{v}$, $\quad \overrightarrow{OB} - \mathbf{v}$, $\quad \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$,

$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$, $\quad \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$, $\quad \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\mathbf{v}$.

4. Az $\mathbf{a}$ vektor hossza 5 egység, és merőleges a $\mathbf{b}(3;\ -4)$ vektorra.

a) Számítsd ki a $\mathbf{b}$ vektor hosszát!

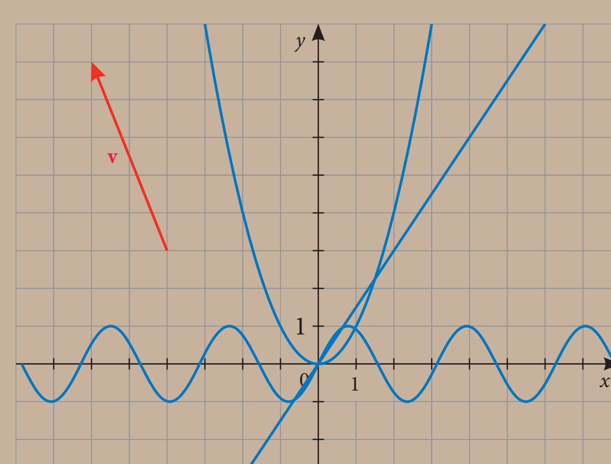
b) Határozd meg az $\mathbf{a}$ koordinátáit!

5. A valós számok halmazán értelmezett f függvény grafikonját eltoltuk a $\mathbf{v}(-2;\ 5)$ vektorral, és így a g függvény grafikonját kaptuk meg. Add meg a $g(x)$-et, ha

a) $f(x) = 3x$;

b) $f(x) = x^2$;

c) $f(x) = \sin x$!



6. A valós számok halmazán értelmezett f függvény grafikonját eltoltuk a **v** vektorral, és így a g függvény grafikonját kaptuk meg. Add meg a **v** vektor koordinátáit, ha

a) $f(x) = x^2$ és $g(x) = (x-1)^2 - 3$; **b)** $f(x) = x^2 - 4$ és $g(x) = x^2 - 4x + 6$!

HÁZI FELADAT

1. Add meg a KL szakasz felezőpontjának és harmadolópontjainak a koordinátáit, ha $K(1; -8)$ és $L(-11; 1)$!

2. Forgasd el az origó körül $(-90°)$-kal a $K(1; -8)$ és az $L(-11; 1)$ pontot! Add meg az elforgatás után kapott $K'L'$ szakasz felezőpontjának és harmadolópontjainak a koordinátáit!

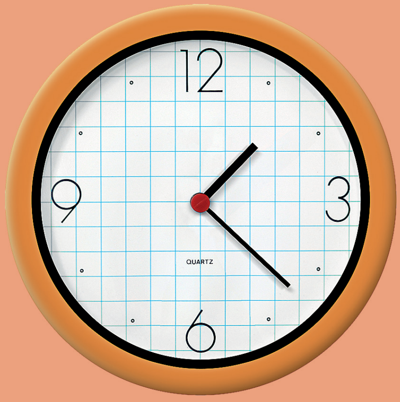
3. Oldd meg a 2. feladatot azzal a változtatással, hogy az **u** és a **w** végpontja a paralelogramma két szemközti csúcsa!

4. Az **u** vektor hossza 25 egység, első koordinátája (-7). Mennyi lehet a második koordinátája?

5. A valós számok halmazán értelmezett f függvény grafikonját eltoltuk a $\mathbf{v}(3; -9)$ vektorral, és így a g függvény grafikonját kaptuk meg. Add meg a $g(x)$-et, ha

a) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot |x|$; **b)** $f(x) = x^2 - 3$!

6. Találj ki az órás ábrához vektorokhoz kapcsolódó feladatot! Oldd meg a feladatodat!



RÁADÁS

Korábbi érettségi feladatok

1. *(2008. október, középszint)* Jelölje X-szel a táblázatban, hogy az alábbi koordinátapárok közül melyek adják meg a 300°-os irányszögű egységvektor koordinátáit, és melyek nem!

	IGEN	NEM
$\mathbf{e}\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$		
$\mathbf{e}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$		
$\mathbf{e}\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$		
$\mathbf{e}(\sin 30°; -\cos 30°)$		

2. *(2015. október, középszint)* Az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok 120°-os szöget zárnak be egymással, és mindkét vektor hossza 5 egység.

a) Számítsa ki az $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ vektor hosszát!

b) Számítsa ki az $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ vektor hosszát!

A $PRST$ rombusz középpontja a $K(4; -3)$ pont, egyik csúcspontja a $T(7; 1)$ pont. Tudjuk, hogy az RT átló hossza fele a PS átló hosszának.

c) Adja meg a P, az R és az S csúcsok koordinátáit!

76 Háromszögek súlypontja

FELADAT

1. A $K(-3; 2)$, az $L(9; -2)$ és az $M(0; 5)$ pont meghatároz egy háromszöget.

a) Rajzold be ezt a háromszöget egy koordináta-rendszerbe!

b) Legyen F a KL oldal felezőpontja. Mik az F koordinátái?

c) Add meg a KLM háromszög S súlypontjának koordinátáit!

d) Milyen kapcsolat van az $\overrightarrow{FS}$ és az $\overrightarrow{SM}$ vektor között? Add meg mindkét vektor koordinátáit!

2. Bence, Dönci és Jocó együtt készíti a házi feladatát. Az egyik feladat így szól:
„Az ABC háromszögben $A(1; 5)$, $B(12; 1)$, a háromszög súlypontja $S(6, 5)$. Mik a C pont koordinátái?”

a) Mindhárman koordináta-rendszert rajzolnak, belehelyezik az adott pontokat, felvázolják a háromszöget. Készítsd el te is ezt a rajzot!

b) Bence a súlypont koordinátáira vonatkozó
$s_1 = \dfrac{a_1 + b_1 + c_1}{3}$, $s_2 = \dfrac{a_2 + b_2 + c_2}{3}$
képleteket használja. Az adott koordináták behelyettesítésével azonnal megkapja a C koordinátáit. Számítsd ki te is!

c) Jocó vektorokkal dolgozik. F-fel jelöli az AB oldal felezőpontját, és ismert vektorok segítségével felírja az origóból a C-be mutató vektort: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OF} + 3\overrightarrow{FS}$. Az $\overrightarrow{OF}$ vektort $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ segítségével számítja ki. Kövesd végig számítással Jocó munkáját!

d) Dönci tudja, hogy $\overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{FS}$, ennek ismeretében a négyzethálós füzetén „kikockázza”, hogy hol van a C pont.

e) Melyik fiú módszere a legegyszerűbb? Pontos-e mind a három?

KIDOLGOZOTT FELADAT

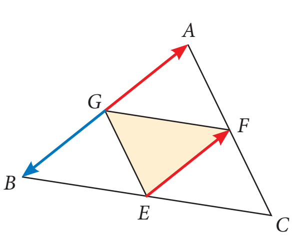
Az ABC háromszög oldalfelező pontjai $E(-1{,}2; 5)$, $F(2{,}2; 3)$ és $G(5; 4)$.

a) Számítsuk ki a háromszög csúcsainak koordinátáit!

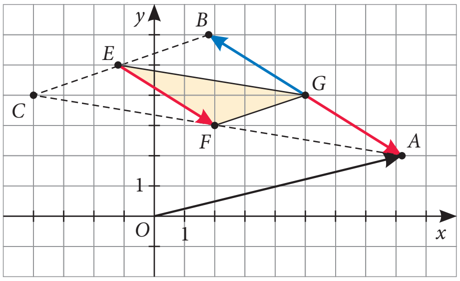
b) Bizonyítsuk be, hogy az EFG és az ABC háromszög súlypontja azonos!

Megoldás

a) Az ABC háromszög E, F, G oldalfelező pontjait összekötve a háromszög *középvonalait* kapjuk meg. A középvonalak párhuzamosak a nem felezett háromszögoldallal, és hosszuk a nem felezett oldal hosszának felével egyenlő.
Az ábra jelöléseivel tehát: $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GA}$ és $\overrightarrow{FE} = -\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GB}$.



Ezt az ismeretet felhasználhatjuk az ABC háromszög csúcsai helyvektorának, következésképpen a csúcsok koordinátáinak meghatározására.
$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE} = (2{,}2;\ 3) - (-1{,}2;\ 5) = (3{,}4;\ -2) = \overrightarrow{GA}$.



Tehát $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} = (5;\ 4) + (3{,}4;\ -2) = (8{,}4;\ 2)$. Ez éppen a háromszög A csúcsának a két koordinátája is egyben: $A(8{,}4;\ 2)$.
Hasonlóképpen:
$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OG} + (-\overrightarrow{GA}) = (5;\ 4) + (-3{,}4;\ 2) = (1{,}6;\ 6)$ és
$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{GF} = (-1{,}2;\ 5) + (-2{,}8;\ -1) = (-4;\ 4)$.
Így $B(1{,}6;\ 6)$ és $C(-4;\ 4)$.

Megjegyzés:
A feladatot úgy is megoldhatjuk, hogy az A, B és C csúcsok koordinátáira bevezetjük az $(a_1;\ a_2)$, $(b_1;\ b_2)$ és $(c_1;\ c_2)$ jelöléseket, és ezekkel felírjuk a felezőpontok koordinátáit. Például B és C koordinátáival kifejezhetők a G pont koordinátái:
$b_1 + c_1 = -1{,}2$ és $b_2 + c_2 = 5$.
Ily módon 6 egyenletet írhatunk fel, ezekből a 6 ismeretlen kiszámítható.

b) Az EFG háromszög súlypontja: $S_1 = \left(\frac{-1{,}2 + 2{,}2 + 5}{3};\ \frac{5 + 3 + 4}{3}\right) = (2;\ 4)$, az ABC háromszög súlypontja: $S_2 = \left(\frac{8{,}4 + 1{,}6 - 4}{3};\ \frac{2 + 6 + 4}{3}\right) = (2;\ 4)$. A két háromszög súlypontja valóban megegyezik.

FELADAT

3. Az ABC háromszög súlypontja az $S(4;\ -1)$ pont. A háromszög egyik csúcsa $A(-8;\ 11)$, a B csúccsal szemközti oldal felezőpontja $F\,(7;\ 4)$.
a) Melyek a B és a C csúcs koordinátái?
b) Mekkorák a háromszög oldalai?
c) Mekkora a C csúcsnál lévő szög?
d) Mekkora a háromszög területe?

HÁZI FELADAT

1. Az ABC háromszögben $A(-13;\ 6)$, $B(-5;\ -2)$, $C(0;\ 8)$.
a) Rajzold be ezt a háromszöget egy koordináta-rendszerbe!
b) Add meg az ABC háromszög súlypontjának koordinátáit!
c) Számítsd ki a háromszög oldalfelező pontjainak koordinátáit!
d) Az adott háromszög oldalfelező pontjai meghatároznak egy kisebb háromszöget. Ennek a háromszögnek is határozd meg a súlypontját!

2. Az EFG háromszög F csúcsa az x tengely 13 jelzésű pontjában van, az E csúcs első koordinátája (-5), második koordinátája 10. A háromszög súlypontja az $S(1;\ 2)$ pont.
a) Készíts rajzot egy koordináta-rendszerben!
b) Melyek a G csúcs koordinátái?
c) Melyik egyenes a háromszögnek az F-ből induló magasságvonala?

3. **a)** Adva van az $A(-4;\ -3)$, a $B(-5;\ 5)$ és a $C(3;\ 7)$ pont. Legyen S az ABC háromszög súlypontja. Számítással igazold, hogy $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{CS} = \mathbf{0}$!
b) Adott az $A(a_1;\ a_2)$, a $B(b_1;\ b_2)$ és a $C(c_1;\ c_2)$ pont, ezek nincsenek egy egyenesen. Legyen az ABC háromszög súlypontja S. Igazold a koordinátageometriai ismereteid segítségével, hogy $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{CS} = \mathbf{0}$!

77 Egyenesek a koordináta-rendszerben

KIDOLGOZOTT FELADAT

Írjuk fel az e egyenes egyenletét, ha tudjuk, hogy átmegy az $(1; 4)$ ponton, és

a) egy normálvektora $\mathbf{n}(3; -2)$;

b) irányvektora $\mathbf{v}(-1; 3)$;

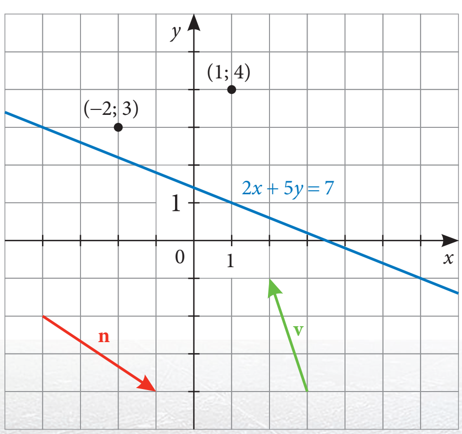
c) meredeksége $m = -\frac{5}{4}$;

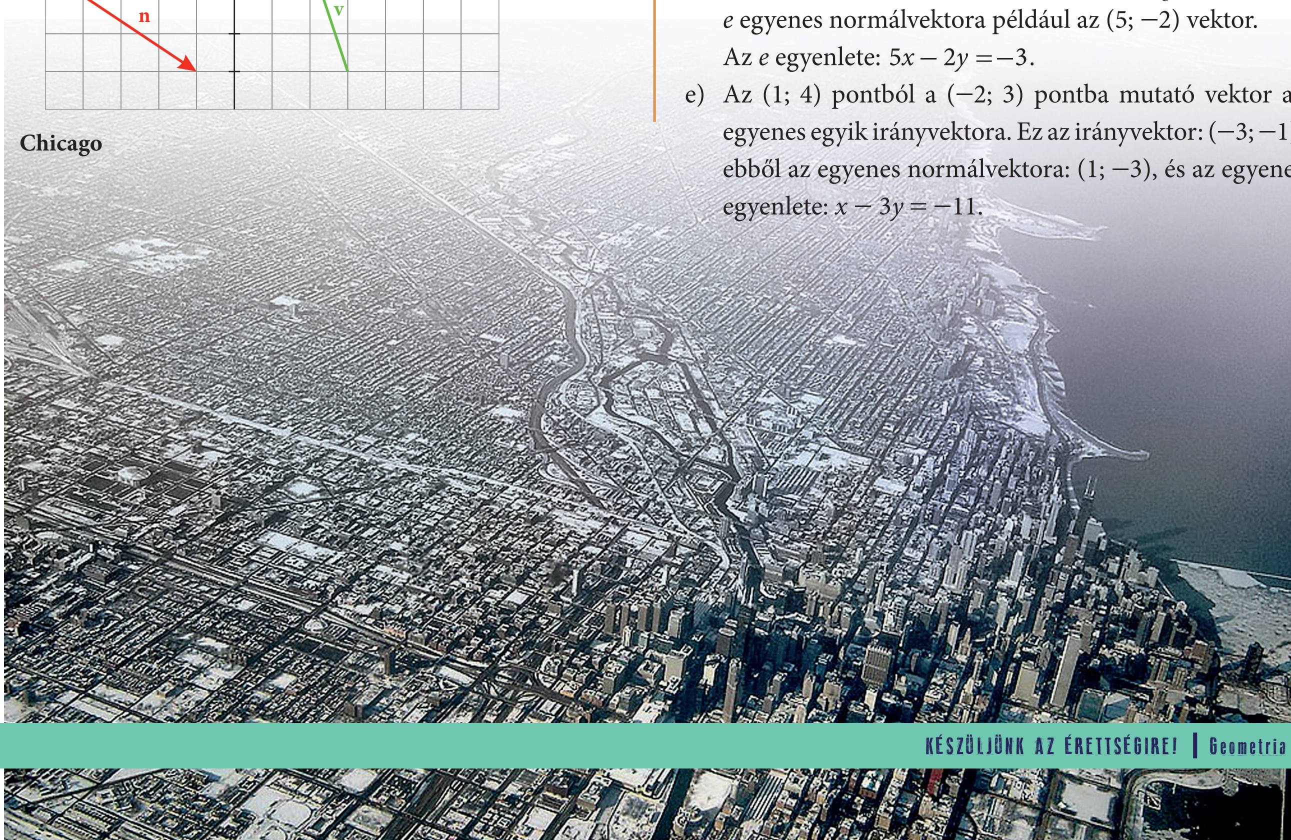
d) merőleges a $2x + 5y = 7$ egyenletű g egyenesre;

e) átmegy a $(-2; 3)$ ponton is!

Megoldás

a) Az adott ponton átmenő, adott normálvektorú egyenes általános egyenletébe helyettesítve:
$3x - 2y = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 4$.
Az e egyenlete ebben az esetben: $3x - 2y = -5$.





Chicago

b) Az e egyenes irányvektorát valamelyik irányban 90°-kal elforgatva az e egyik normálvektorát kapjuk. Ez lehet például a $(3; 1)$ vektor. Az e egyenes egyenlete ezzel: $3x + y = 7$.

c) Többféleképpen is célhoz érhetünk attól függően, hogy az egyenes melyik egyenletét akarjuk használni. Ha az $y = mx + b$ alakban akarjuk előállítani, akkor ebben az egyenletben $m = -\frac{5}{4}$.
Az $(1; 4)$ pont rajta van az egyenesen, ezért
$4 = -\frac{5}{4} \cdot 1 + b$ is igaz,
tehát $b = \frac{21}{4}$.
Az e egyenlete tehát: $y = -\frac{5}{4}x + \frac{21}{4}$.
Ha az egyenes normálvektoros egyenletére akarjuk visszavezetni a feladatot, akkor a meredekségből kiszámíthatjuk az irányvektort: $\left(1; -\frac{5}{4}\right)$, ebből a normálvektort: $\left(\frac{5}{4}; 1\right)$, majd ezzel megadhatjuk az egyenletet.

d) A g egyenes egy normálvektorát kiolvashatjuk a megadott egyenletéből: $\mathbf{n}_g(2; 5)$. Az e egyenes merőleges a g-re, ezért normálvektora merőleges $\mathbf{n}_g$-re. Ezért az e egyenes normálvektora például az $(5; -2)$ vektor.
Az e egyenlete: $5x - 2y = -3$.

e) Az $(1; 4)$ pontból a $(-2; 3)$ pontba mutató vektor az egyenes egyik irányvektora. Ez az irányvektor: $(-3; -1)$, ebből az egyenes normálvektora: $(1; -3)$, és az egyenes egyenlete: $x - 3y = -11$.

FELADAT

1. Add meg a következő egyenesek egy-egy normálvektorát és irányvektorát!

a) $y = -4x + 1{,}6$;

b) $9x - 9y = 9$;

c) $2x - 5 = 3{,}6y$;

d) $\sqrt{18}\,x + \sqrt{2}\,y = 0$.

2. Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(3; 1)$ ponton, és

a) párhuzamos az $y = 2x - 1{,}8$ egyenletű egyenessel;

b) merőleges az $y = 2x - 1{,}8$ egyenletű egyenesre;

c) átmegy az origón is!

3. Határozd meg a $3x - 8y = -37$ és a $4x + y = -26$ egyenletű egyenesek metszéspontját!

4. Az ABC háromszög két csúcsa $A(-3; 5)$ és $C(5; 1)$, az AB oldal felezőmerőlegesének egyenlete: $-x + 3y = 3$.

a) Írd fel az AB egyenes egyenletét!

b) Melyik pont az AB szakasz felezőpontja?

c) Határozd meg a B pont koordinátáit!

d) Írd fel a C-ből induló magasságvonal egyenletét!

5. Egy háromszög csúcsai $A(7; 5)$, $B(-3; 1)$ és $C(5; -3)$.

a) Írd fel az A csúcsból húzott súlyvonal egyenesének egyenletét!

b) Írd fel az A csúcsból húzott magasságvonal egyenletét!

c) Írd fel a B csúcsból húzott magasságvonal egyenletét!

d) Határozd meg a háromszög magasságpontját!

e) Írd fel a BC oldal felezőmerőlegesének egyenletét!

f) Írd fel az AC oldal felezőmerőlegesének egyenletét!

g) Határozd meg a háromszög körülírt körének középpontját!

HÁZI FELADAT

1. Egy egyenes átmegy az $A(-3{,}25; 4)$ ponton, egyik irányvektora a $\mathbf{v}(1, -4)$ vektor.

a) Add meg ennek az egyenesnek egy normálvektorát!

b) Írd fel az egyenes egyenletét!

c) Hol metszi ez az egyenes a koordinátatengelyeket?

2. Számítsd ki a $2x + y = -4$ és a $3x - y = -1$ egyenes metszéspontjának koordinátáit!

3. Az $ABCD$ négyzet két szemközti csúcsa: $A(-3; -2)$ és $C(3; 2)$.

a) Mekkora a négyzet oldala, kerülete, területe?

b) Írd fel az AC egyenes egyenletét!

c) Számítsd ki a B és a D csúcs koordinátáit!

d) Írd fel a négyzet oldalegyeneseinek egyenletét!

RÁADÁS

Korábbi érettségi feladat

(2013. május, középszint) A PQR háromszög csúcsai: $P(-6; -1)$, $Q(6; -6)$ és $R(2; 5)$.

a) Írja fel a háromszög P csúcsához tartozó súlyvonal egyenesének egyenletét!

b) Számítsa ki a háromszög P csúcsnál lévő belső szögének nagyságát!

78 Körök és egyenesek a koordináta-rendszerben

KIDOLGOZOTT FELADAT

Adva van az $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 16 = 0$ egyenletű ponthalmaz.

a) Igazoljuk, hogy a $P(1; 3)$ pont eleme ennek a ponthalmaznak!

b) Mutassuk meg, hogy a ponthalmaz egy kör, adjuk meg a középpontját és a sugarát!

c) Írjuk fel a kör P pontban húzható érintőjének egyenletét!

Megoldás

a) A P koordinátáit a megadott egyenletbe helyettesítve az $1 + 9 + 4 - 30 + 16 = 0$ kijelentést kapjuk. Ez a kijelentés igaz, tehát a P valóban eleme a ponthalmaznak.

b) Alakítsuk át az egyenletet a teljes négyzetté kiegészítés módszerével:

$$(x^2 + 4x + 4) - 4 + (y^2 - 10y + 25) - 25 + 16 = 0,$$
$$(x + 2)^2 - 4 + (y - 5)^2 - 25 + 16 = 0,$$
$$(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 13.$$

A megadott ponthalmaz tehát valóban kör, amelynek középpontja a $K(-2; 5)$ pont, a sugara pedig $r = \sqrt{13}$ egység.

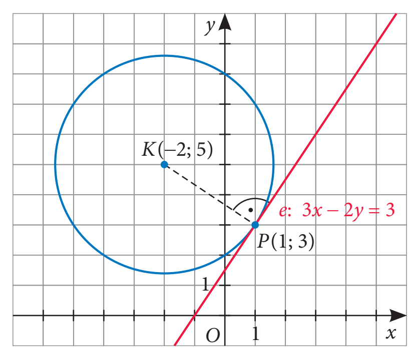
c) A kör érintője merőleges az érintési pontba vezető sugárra, ezért a P pontban érintő e egyenesnek a

$\overrightarrow{KP} = (1; 3) - (-2; 5) = (3; -2)$

vektor az egyik normálvektora.

Az e érintő egyenlete:

$3x - 2y = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3$, azaz $3x - 2y = -3$.



FELADAT

1. Egy kör egyik átmérőjének végpontjai: $P(3; -2)$ és $Q(-1; 6)$.

a) Írd fel a kör egyenletét!

b) Melyik pontban metszi az abszcisszatengelyt a megadott kör?

2. Adva van a KLM háromszög, $K(-5; -1)$, $L(6; -3)$, $M(-2; 3)$.

a) Igazold, hogy a KLM háromszögnek az M csúcsánál derékszöge van!

b) Írd fel a KLM háromszög körülírt körének egyenletét!

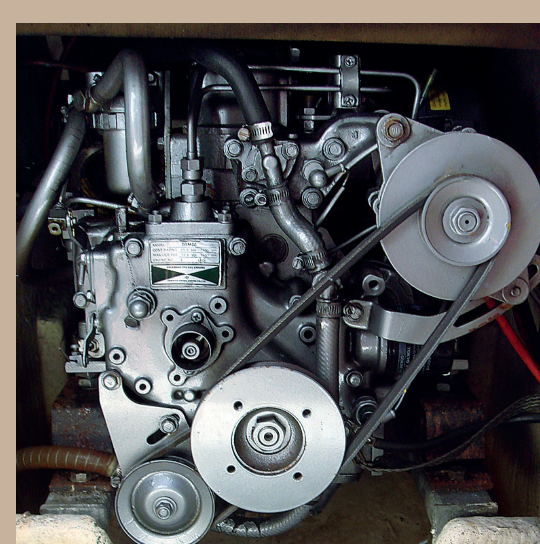
3. Melyik egyenlet milyen ponthalmazt határoz meg?

a) $x^2 + y^2 - 12x + 5y = 0$;

b) $x^2 + y^2 - 12x + 5y + 42,25 = 0$;

c) $x^2 + y^2 - 12x + 5y + 45 = 0$.

4. Vedd fel a koordináta-rendszerben az $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$ egyenletű kört!



a) Igazold számítással, hogy ezen a körön rajta van az $E(2; 9)$ pont!
b) Rajzold be az ábrádba a kör E-beli érintőjét!
c) Írd fel az érintő egyenletét!
d) Jelöljük P-vel az érintő és az x tengely metszéspontját. Mik a P koordinátái?
e) Mekkorák a P-ből a körhöz húzott érintőszakaszok?

5. Hány közös pontja van az $(x-1)^2+(y+3)^2=41$ egyenletű körnek és az $x+3=0$ egyenletű egyenesnek? Melyek azok?

HÁZI FELADAT

1. Írd fel azoknak a köröknek az egyenletét, amelyek középpontja K, sugara pedig r!

a) $K(2; 1)$, $r=4$;
b) $K(0; -2{,}4)$, $r=1{,}4$;
c) $K(-12; 5)$, $r=13$;
d) $K(5{,}9; -4{,}6)$, $r=4{,}6$.

2. Hány közös pontja van az $(x-1)^2+(y+3)^2=41$ egyenletű körnek és a $2x+y=-4$ egyenletű egyenesnek? Melyek azok?

3. Mekkora hosszúságú húrt metsz ki az $x^2+y^2=20$ egyenletű körből a $2x+y=8$ egyenletű egyenes?

4. Foglalkozzunk azzal az $ABCD$ négyzettel, amelynek két szemközti csúcsa az $A(-3; -2)$ és a $C(3; 2)$ pont.

a) Rajzold be ezt a négyzetet egy koordináta-rendszerbe!
b) Írd fel az AC átmérőjű kör egyenletét! Milyen kapcsolatban van ez a kör az $ABCD$ négyzettel?
c) Írd fel az $ABCD$ négyzetbe írt kör egyenletét!
d) Mennyi a hasonlósági arány a b) és a c) pontban szereplő kör között?
e) Hányszor akkora a fenti nagyobb kör területe a kisebb kör területének?

5. Szemléltesd a koordináta-rendszerben mindazokat a $P(x; y)$ pontokat, amelyek koordinátái között fennáll a következő összefüggés:

a) $|x|=|y|$;
b) $x^2+y^2-9\le 0$;
c) $y\ge \frac{1}{2}x^2$;
d) $(x^2-1)(y^2-1)=0$.

RÁADÁS

Korábbi érettségi feladatok

1. Az ABC háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-3; 2)$, $B(3; 2)$ és $C(0; 0)$.

a) Számítsa ki az ABC háromszög szögeit!
b) Írja fel az ABC háromszög körülírt körének egyenletét!

(2011. május, középszint)

2. Adott az $A(5; 2)$ és a $B(-3; -2)$ pont.

a) Számítással igazolja, hogy az A és B pontok illeszkednek az $x-2y=1$ egyenletű e egyenesre!
b) Írja fel az AB átmérőjű kör egyenletét!
c) Írja fel annak az f egyenesnek az egyenletét, amely az AB átmérőjű kört a B pontban érinti!

(2014. május, középszint)

3. Egy négyzet oldalegyenesei a koordinátatengelyek és az $x=1$, valamint az $y=1$ egyenletű egyenesek.

a) Ábrázolja derékszögű koordináta-rendszerben a négyzetet, és adja meg csúcsainak koordinátáit!
b) Írja fel a négyzet köré írható kör egyenletét!
c) Állapítsa meg, hogy a négyzet kerülete hány százaléka a kör kerületének!
d) Az $y=-4x+2$ egyenletű egyenes a négyzetet két részre bontja. Számítsa ki e részek területének arányát!

(2006. február, középszint)

Próbaérettségi feladatsorok

1. FELADATSOR

I. rész

1. Egy 30 fős osztály tanulóinak $\frac{2}{3}$ része közepesnél nem rosszabb tanuló, $\frac{3}{5}$ részük közepesnél nem jobb tanuló. Hány közepes tanuló van az osztályban? **(3 pont)**

2. Az egységoldalú négyzet oldalait mennyivel kell megnövelni, hogy az új négyzet területe két területegység legyen? Határozza meg a növelés mértékének értékét két tizedesjegyre kerekítve! **(2 pont)**

3. Adja meg az $f(x) = (x - 3)^2 + 2$ függvény $[1; 4]$ intervallumon felvett legkisebb és legnagyobb értékét, és azt is, hogy hol veszi fel ezeket az értékeket! **(3 pont)**

4. Egy mértani sorozat második tagja $\frac{1}{4}$, harmadik tagja $-\frac{3}{8}$. Határozza meg a sorozat első tagját! **(2 pont)**

5. Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely egyik átmérőjének két végpontja az $A(2; -1)$ és $B(-4 ; 7)$ koordinátájú pontok! **(3 pont)**

6. Rajzoljon egy olyan gráfot, amely szemlélteti egy ötfős társaság ismeretségi kapcsolatait, ha tudjuk, hogy két embernek 3, egy embernek 2, két embernek 1 ismerőse van! (Az ismeretségek kölcsönösek.) **(2 pont)**

7. A $2x^2 + k \cdot x + 7 = 0$ egyenletnek gyöke $x = -2$. Számolja ki a k valós paraméter értékét! **(2 pont)**

8. Hozza létre az alábbi kifejezés legegyszerűbb formáját!
$(a^3)^2 \cdot a^4 : (a^2)^3 =$ **(2 pont)**

9. Döntse el, hogy az alábbi két mennyiség közül melyik a nagyobb! Válaszát számolással indokolja!
$A = \sqrt{8} + \sqrt{50}$ vagy $B = \sqrt[5]{100\,000}$ **(3 pont)**

10. Határozza meg annak a derékszögű trapéznak a kerületét, amelynek alapjai 10, illetve 22 cm hosszúak, a derékszögű szár pedig 5 cm! **(2 pont)**

11. Igaz vagy hamis?
a) Van olyan 180°-nál kisebb pozitív szög, amelynek minden szögfüggvénye negatív előjelű.
b) Egy pozitív valós szám negatív kitevős hatványa mindig pozitív előjelű.
c) Az első húsz prímszám szorzata páros szám. **(3 pont)**

12. Milyen számjegyeket írhatunk a $\overline{367x2y}$ hatjegyű szám ismeretlen számjegyeinek helyére ahhoz, hogy a szám osztható legyen 12-vel? Határozza meg az összes lehetséges $(x; y)$ rendezett számpárt! **(3 pont)**

II. rész

A

13. Van tíz darab 1 cm sugarú és két darab 3 centiméter sugarú túrógombóc gyártásához elegendő mennyiségű masszánk, de az utolsó pillanatban mégis úgy döntünk, hogy egy darab nagy (családi) gombócot formázunk. (A feladatban a gombóc elnevezés gömb alakot feltételez!)
a) Mekkora lesz az így kapott nagy gombóc sugara? **(4 pont)**
b) Hány százaléka lesz az elkészített gombóc befedéséhez szükséges prézli mennyisége az eredetileg eltervezett gombócokéhoz képest? **(7 pont)**

14. Egy számtani sorozat harmadik, negyedik és ötödik tagjának összege tízzel nagyobb, mint a sorozat kilencedik eleme. A második és hatodik tag összege 30.
Határozza meg a sorozat első tagját, differenciáját, valamint első huszonkét tagjának összegét! **(12 pont)**

15. Egy toronyóra nagymutatója 40 cm, kismutatója 32 cm hosszú. (A nagymutató a percet, a kicsi az órát mutatja.)

a) Milyen távol van egymástól a két mutató végpontja négy órakor? **(5 pont)**

b) Mekkora ívet fut be a nagymutató, illetve a kismutató a négy órától háromnegyed ötig tartó időszakaszban? **(4 pont)**

c) Ez a toronyóra minden egész órakor az órák számát üti el, minden egész órát negyed órával követően egyet, minden egész órát fél órával követően kettőt, minden egész órát háromnegyed órával követően hármat üt. Hányat üt összesen 8 óra 11 perc és 16 óra 22 perc között? **(4 pont)**

B

Az alábbi három feladatból kettőt kell megoldani.

16. Egy 10 fős baráti társaság lábméreteiről a következőket tudjuk:
Aladár 42 Brúnó 41 Cingár 44 Dönci 42 Elemér 43 Furfang 42 Guszti 43 Huncut 42 Icurka 36

a) Határozza meg a tizedik ember, Jankó lábának nagyságát, ha tudjuk, hogy a tíz legény lábméretátlaga 41,8! **(3 pont)**

b) Jankó lábméretének ismeretében határozza meg, mennyi a lábméretek mediánja! **(2 pont)**

A tíz ember nevét felírjuk egy-egy papírra, a papírokat bedobjuk egy kalapba. Véletlenszerűen kihúzzuk a neveket a kalapból, és feljegyezzük a kihúzott nevek sorrendjét.

c) Állítsa növekvő rendbe az alábbi események valószínűségét! **(5 pont)**

A: Először egy legfeljebb negyvenes lábméretű ember nevét húzzuk ki a kalapból.

B: A kalapból kihúzott nevek alapján, balról jobbra sorba állítva az embereket növekvő lábméret szerint sorakoznak fel.

C: Lányhoz tartozó nevet húzunk először.

d) Legalább hány nevet válasszunk ki a kalapból, hogy biztosan legyen a nevek között magánhangzóval kezdődő? **(2 pont)**

A felsoroltak közül Icurka a legfiatalabb, Cingár a legidősebb.

e) Számítsa ki, hány éves Icurka és Cingár, ha tudjuk, hogy kettejük életkorának különbsége 16 év, és tudjuk, hogy 4 év múlva életkoraik hányadosa 2,6 lesz! **(5 pont)**

17. **a)** Oldja meg az egyenletet a racionális számok halmazán!

$$49^x \cdot \frac{1}{7} \cdot \sqrt{7} = \left(\frac{1}{343}\right)^{-2}$$ **(7 pont)**

b) Mely valós számokra teljesül?

$$\log_2(x-1) - 3 = \log_2(12-3x)$$ **(10 pont)**

18. Bimbó, a tehén egy síkra illeszkedő rét közepén legelészik. Tőle északra 9 méterre álldogál Riska, a másik tehén. Riskától keleti irányban, ugyanakkor Bimbótól 15 méterre heverészik Kócos, a pulikutya.
Helyezze el egy derékszögű koordináta-rendszerben az állatokat jelző B; R; K (rendre Bimbó; Riska; Kócos) pontokat úgy, hogy R legyen az origóban, B az ordinátatengely negatív felén, valamint K az abszcisszatengely pozitív ágán. (Tekintsük ilyen szempontból pontszerűnek az állatokat!)

a) Határozza meg az említett állatok helyének koordinátáit rendezett valós számpárokkal, ha egy méter hosszú szakaszt egy egységnek tekintünk! **(3 pont)**

b) Az előbbi koordináták figyelembevételével írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely mentén Kócos és Bimbó elhelyezkedik! **(5 pont)**

c) Mely egyenesen kellene Kócosnak heverésznie, ha azt akarná, hogy a két tehéntől egyenlő távolságra helyezkedjen el? Írja fel ennek az egyenesnek az egyenletét! **(3 pont)**

d) Riska az origóban rögzített, 7 méter hosszúságú kötéllel van kipányvázva. A három állat eredeti helyzetével létrehozott BRK háromszög területének hány százalékát tudja ilyen módon lelegelni? Az eredményt egy tizedesjegyig kerekítve adja meg! **(6 pont)**

2. FELADATSOR

I. rész

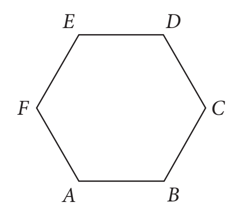
1. Egy 426 cm átmérőjű trambulin ára 65 990 Ft. A nyár eleji árleszállításon 15%-os kedvezménnyel árusítják. Mennyi így az ára tízesekre kerekítve? **(2 pont)**

2. Adja meg az $x \mapsto (x+2)^2 - 1$ függvény zérushelyeit! **(3 pont)**

3. Adjon meg egy olyan pozitív számot, amelynek pontosan 5 pozitív osztója van! Sorolja fel az osztókat! **(3 pont)**

4. Egy kör alakú algatelep mérete 100 m^2. Mekkora lesz a mérete 3 év múlva, ha évenként megkétszereződik a telep átmérője? **(2 pont)**

5. Egy szabályos hatszög csúcsai rendre A, B, C, D, E, F. Legyen $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ és $\mathbf{b} = \overrightarrow{AF}$. Adja meg $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorral az $\overrightarrow{EC}$, a $\overrightarrow{BC}$ és az $\overrightarrow{AD}$ vektorokat! **(3 pont)**



6. Oldja meg a $\log_3 \frac{1}{9} = x$ egyenletet a valós számok halmazán! **(2 pont)**

7. Tíz osztályzat átlaga 3,6. Ha kapunk még két ötöst, mennyi lesz az új átlag? **(3 pont)**

8. Egy egyenes egyik normálvektora $\mathbf{n} = (2; -1)$, egyik pontja pedig $P(5; 4)$. Adja meg az egyenes egyenletét! **(2 pont)**

9. Melyik állítás igaz, melyik hamis? **(2 pont)**

a) A 3 a legkisebb páratlan prímszám.

b) A 2,345 szám racionális szám.

c) Minden tizedes tört felírható két egész szám hányadosaként.

10. Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy szabályos dobókockával egymás után két hatost dobunk? **(3 pont)**

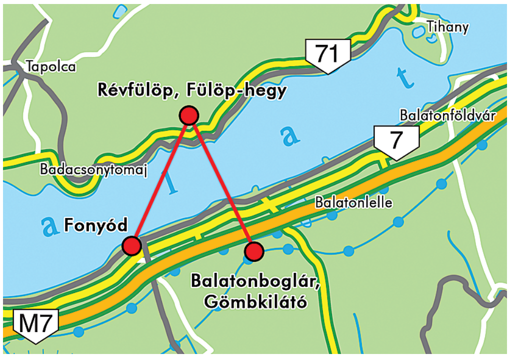
11. Egyszerűsítse az $\frac{x^2 - y^2}{x + y}$ törtet, ha $x \neq -y$! **(3 pont)**

12. Adja meg annak a körnek az egyenletét, amelynek a középpontja a $(-3; 5)$ pont, sugara pedig $\sqrt{5}$! **(2 pont)**

II. rész

A

13. Nyaranta Révfülöp és Balatonboglár között kerül sor a Balaton-átúszásra. Mintegy tízezer ember ússza át a Balatont, és teszi meg a kb. 5,2 km-es távolságot. A két település amúgy is népszerű kirándulóhely: sokan keresik fel a révfülöpi kiindulási hely kilátóját a Fülöp-hegyen, illetve a boglári hegy csúcsán a Xantus János Gömbkilátót. A két kilátó távolságát vegyük 6 km-nek, egyenesük nem merőleges a partra!



a) Meg akarjuk becsülni, milyen messze van a szemközti parton Fonyód csúcsa a Fülöp-hegytől. Iránytűvel úgy becsüljük, hogy a Fülöp-hegy–Fonyód egyenes és a Fülöp-hegy–Gömbkilátó egyenes egymással 50°-os szöget zár be. Tudjuk, hogy a Boglár–Fonyód-távolság vasúton 9 km, tekintsük egyenesnek a vonalat! Számítsa ki, ennek alapján mekkora távolságra van Fonyód a Fülöp-hegyi kilátótól! **(5 pont)**

b) 1998-ig visszamenőleg elérhetők az átúszás legérdekesebb statisztikai adatai. Az alábbi táblázatban a legfiatalabb és legidősebb átúszókat tüntettük fel nemek szerint (2005-ben és 2010-ben a sorozatos rossz idő miatt nem tartották meg az átúszást). Adja meg mind a négy kategóriában a mediánt, az átlagot és a móduszt! **(5 pont)**

	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2006	2007	2008	2009	2011	2012	2013	2014
Legfiatalabb női úszó	7	8	8	7	5	6	9	8	7	8	7	9	8	8	9
Legfiatalabb férfi úszó	8	8	9	7	5	7	6	7	8	8	8	9	8	8	8
Legidősebb női úszó	70	65	65	67	68	69	69	72	73	74	73	77	78	76	80
Legidősebb férfi úszó	76	69	77	80	79	80	77	79	87	77	78	79	82	82	83

c) A Gömbkilátó egy olyan test, amely közelítőleg egy 15 m átmérőjű gömbnek felel meg. Számítsa ki, mekkora egy ilyen gömbnek a felszíne! **(2 pont)**

14. Kislabdával dobunk. A feldobott labda magassága az $y = 5x(4 - x)$ függvény szerint változik, ahol y a földtől mért magasság méterben, x pedig az eltelt másodperceket jelenti.

a) Ábrázolja a függvényt! **(4 pont)**

b) Mennyi idő múlva ér vissza a kislabda a földre? **(2 pont)**

c) Milyen magasra dobtuk fel a kislabdát? **(2 pont)**

d) Mennyi idő után lesz a labda 15 m magasan? **(2 pont)**

e) Adja meg annak a két egyenesnek az egyenletét, amelyek a függvény maximumán és egyik zérushelyén mennek át! **(4 pont)**

15. Bence szülei biciklit ígérnek fiuknak év végére, ha szép bizonyítványt visz haza. 2020. szeptember 1-jén elhatározzák, hogy havonta félretesznek 10 000 Ft-ot 3,6%-os éves kamatozással. A bank havonta írja jóvá a kamat egy hónapra eső részét. 2021. január 1-jén a bank nagyvonalú, 4,8%-os éves kamatozású ajánlatot kínál fel a szülőknek június 30-ig, amelyet ők el is fogadnak.

a) Mennyi pénz gyűlt össze egész forintra kerekítve, miután 2020. december 31-én a bank jóváírta a kamatot? **(3 pont)**

b) Mennyi pénz gyűlt össze egész forintra kerekítve, miután 2021. június 30-án a bank jóváírta a kamatot? **(4 pont)**

c) Bence szép bizonyítványt vitt haza, így szülei beváltják ígéretüket. Ráadásul egy bizonyítványosztási akció keretében a kerékpárboltokban 15%-os kedvezménnyel lehet biciklit vásárolni. Mennyibe került az árleszállítás előtt az a bicikli, amelyet Bence szülei meg tudnak venni a félretett pénzükből 2021. június 30-án, miután a bank jóváírta a kamatot? (A bicikli eredeti árát ezresekre kerekítve adja meg!) **(3 pont)**

B

Az alábbi három feladatból kettőt kell megoldani.

16. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $7 \cdot (\sin x - \cos x) \cdot \cos x \cdot \sin 2x = 0;$ **(9 pont)**

b) $3^{2x+2} - 28 \cdot 3^{x} = -3.$ **(8 pont)**

17. Hajni készül a szóbeli érettségire. Magyarból, angolból és informatikából fog szóbelizni középszinten, matematikából és történelemből emelt szinten. Szeretne minél hamarabb túllenni a feleleten.

a) Ha az osztály 32 tanulója közül véletlenszerűen választják ki, hogy melyikük hányadiknak felel, akkor mekkora a valószínűsége annak, hogy ő kezdi az érettségit? (**2 pont**)

b) Hajni szeretné, hogy barátnőjével, Ritával együtt legyenek túl az érettségin. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ők ketten lesznek a két első felelő? (**4 pont**)

Magyarból 21, angolból 18, informatikából 16 tétel van, matematikából és történelemből 20-20. Van 3 olyan magyartétel, 3 olyan angoltétel, 2 olyan informatikatétel és 2 olyan történelemtétel, amelyekben Hajni bizonytalannak érzi magát, ezért örülne, ha nem ezeket húzná. Minden tantárgyból egy tételt húz.

c) Mekkora a valószínűsége, hogy szerencséje lesz, azaz mind az öt tárgyból csak olyan tételt húz, amelyet szeretne? (**5 pont**)

d) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a teljes érettségije során pontosan egy olyan tételt húz, amelyet nem akar? (**6 pont**)

18. Körbe akarjuk biciklizni a Balatont. A Balatoni Körút hossza kb. 210 km. Úgy tervezzük, hogy mindennap 10 km-rel többet teszünk meg, mint előző nap.

a) Hány km-t tekerjünk első nap, ha 6 napra tervezzük a túrát? (**3 pont**)

b) Hány napig fog tartani a kör, ha első nap 60 km-t tekerünk? (**3 pont**)

Egy másik baráti társaság is körbetekeri a Balatont. Ők az alapján tervezik meg az utat, hogy melyik településen találnak maguknak kedvező áron szálláshelyet. Révfülöpről indulva az általuk kiszemelt nyaralók közti távolságok a következők: Révfülöp – 32 km – Balatonfüred – 31 km – Balatonkenese – 41 km – Balatonföldvár – 46 km – Balatonmáriafürdő – 28 km – Balatongyörök – 32 km – Révfülöp.

Hányféle út lehetséges, ha Révfülöpről indulnak, és ha egy nap

c) legfeljebb 70 km-t; (**3 pont**)

d) legalább 70 km-t; (**3 pont**)

e) legfeljebb 90 km-t (**5 pont**)

akarunk tekerni? (Nem kell minden szálláshelyen aludni.)

3. FELADATSOR

I. rész

1. Határozza meg a következő másodfokú egyenlet megoldásait a valós számok halmazán!
$21 - 7x + 2x^2 = 6x$ **(2 pont)**

2. Kati pénztárcájában 300 Ft van, egyenlő számú 5 és 20 forintosokban. Hány darab pénzérme van Kati pénztárcájában? **(2 pont)**

3. Az y-nak hányadik hatványa az alábbi kifejezés ($y \neq 0$)?
$$\frac{\left(y^4\right)^{-3} \cdot y^{18}}{y^3}$$ **(2 pont)**

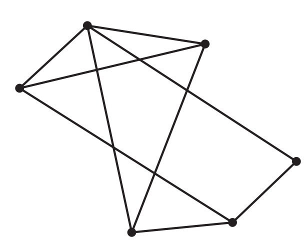
4. Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz és melyik hamis! **(2 pont)**
a) Minden trapéz paralelogramma.
b) Minden paralelogramma trapéz.
c) Nincs olyan háromszög, amelynek a súlypontja a háromszögön kívül van.
d) A négyzetnek 8 szimmetriatengelye van.

5. Adja meg 20^5 és 30^3 legnagyobb közös osztóját! **(2 pont)**

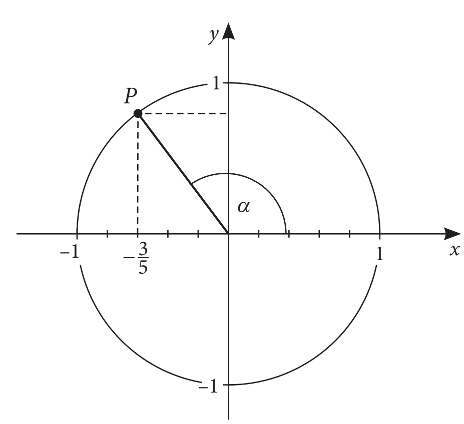
6. Egy gömb alakú karácsonyfadísz térfogata 555 cm^3. Belefér-e a 10 cm élhosszúságú kocka alakú díszdobozba? Válaszát indokolja! **(3 pont)**

7. Határozza meg az $x \mapsto \log_{2018} x$ függvény zérushelyét! A függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza. **(2 pont)**

8. Egy középiskola Kosár Kupájára hat csapat jelentkezett. A csapatok között eddig lejátszott meccseket szemlélteti az ábra. Hány mérkőzés van még hátra, ha minden csapat minden csapattal egy mérkőzést játszik? **(2 pont)**



9. A mellékelt ábrán lévő P pont abszcisszája $-\frac{3}{5}$. Határozza meg P pont ordinátáját és az α szög nagyságát! **(3 pont)**



10. Egy kör egyenlete $(x-3)^2+(y+4)^2=4$. Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely a megadott körrel koncentrikus, és a sugara 12 egység! (**2 pont**)

11. Egy osztályban három csoportban folyik az angol nyelv tanítása. Az év végi jegyek átlaga az első csoportban $4\frac{1}{6}$, a második csoportban 4, a harmadik csoportban 4,3 volt. Az első csoportban 12, a másodikban 13, a harmadikban 10 diák tanulja a nyelvet. Határozza meg az osztály év végi átlagát angol nyelvből! (**3 pont**)

12. Egy település lakossága 5600 fő. Az elkövetkezendő években a lakosok száma évről évre 5%-kal csökken. Hány év eltelte után lesz a lakosok száma 4000-nél kevesebb? (**3 pont**)

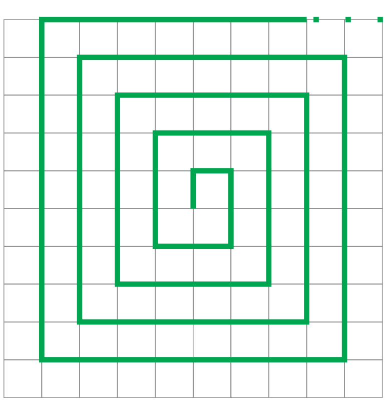
II. rész

A

13.
a) Ábrázolja az $f:[-1;3[\to \mathbf{R}\ x\mapsto 2x^2-4x-6$ függvényt! (**4 pont**)
b) Adott az e egyenes két pontja: $P(0;-2)$ és $Q(-1;0)$. Írja fel az e egyenes egyenletét! (**2 pont**)
c) A g függvény az a lineáris függvény, melynek értelmezési tartománya $[-1;3[$, két helyettesítési értéke pedig $g(0)=-2$ és $g(-1)=0$. Adja meg a g függvény hozzárendelési szabályát! (**2 pont**)
d) Adja meg azokat az x valós számokat, amelyekre $f(x)<g(x)$! (**4 pont**)

14. Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!
a) $\sqrt[4]{(x-2)^4}=25$; (**4 pont**)
b) $\dfrac{2\cdot\log_2(x-1)-3}{\log_2(3x-3)}=1.$ (**7 pont**)

15. Egy középület falát az ábra szerinti labirintussal díszítik. A falba apró szögeket vernek, és ezekhez feszítik ki a színes huzalt. Középről indulva az első szakasz 12 cm, a következő is 12 cm, a harmadik és negyedik 24 cm, a következő kettő 36 cm, és így tovább. Az ábra mutatja a labirintus középső részét, ez még folytatódik a leírt szabály szerint.



a) Középről indulva hányadik szakasz lesz az első olyan, amelyik hosszabb, mint 2 m? (**3 pont**)
b) Milyen hosszú a teljes huzal, ha az utolsó szakasz hossza különbözik az előtte lévőtől, és az utolsó darab 252 cm hosszú? (**6 pont**)
c) Milyen irányban haladt az utolsó darab: balról jobbra, jobbról balra, lentről felfelé vagy fentről lefelé, ha az utolsó szakasz hossza különbözik az előtte lévőtől, és az utolsó darab 252 cm hosszú? Válaszát indokolja! (**4 pont**)

B.

Az alábbi három feladatból kettőt kell megoldani.

16. Egy szabályos sokszögnek 25-tel kevesebb átlója van, mint a nála kettővel nagyobb oldalszámú szabályos sokszögnek.

a) Melyek ezek a sokszögek? (**4 pont**)

Egy szabályos 14-szög köré írható körének sugara 10 cm, egyik csúcsa *P*.

b) Határozza meg a leghosszabb és a legrövidebb átló hosszát! (**7 pont**)

c) Mekkora szöget zár be egymással a *P*-ből húzható leghosszabb és legrövidebb átló? (**6 pont**)

17. Egy középiskola biciklis táborában mindennap háromféle túrát indítottak. A „kis" túrára leginkább a kezdő bicajosok jelentkeztek, vagy azok, akik előző nap nagyon elfáradtak. A „közepes" túrán már nagyobb távolságokat kellett megtenni és nehezebb terepen, a „nagy" túrán indulóknak már napi 100-110 km-t is kellett tekerni, nem egyszer dimbes-dombos vidéken.

54 olyan bicajos volt, aki legalább egyszer vállalta a nagy túra kihívását, és 84-en vettek részt kis túrán a tábor alatt. A kis túrán vagy nagy túrán részt vevőknek a 15%-a nagy túrán és kis túrán is részt vett.

a) Hány olyan biciklis volt, aki részt vett kis túrán, de nagy túrán nem? (**4 pont**)

A táborban volt 10 olyan ember, aki mindhárom túrát kipróbálta, és 12 olyan, aki csak a közepes túrát. A közepes túrázók közül 70-en más túrán is részt vettek. A közepes túrán indulóknak a fele kis túrán is indult.

b) Hány olyan résztvevője volt a tábornak, aki közepes túrán és nagy túrán is részt vett? (**6 pont**)

2017-ben is megszervezték ezt a tábort. Akkor 8 olyan gyerek volt, aki mindhárom típusú túrán részt vett. 10 olyan gyerek, aki volt kis túrán is és nagy túrán is, 29 olyan, aki közepes túrán is és nagy túrán is, 44 olyan, aki kis túrán is és közepes túrán is. 56 gyerek vett részt kis túrán, 37 gyerek vett részt nagy túrán, 93 gyerek vett részt közepes túrán.

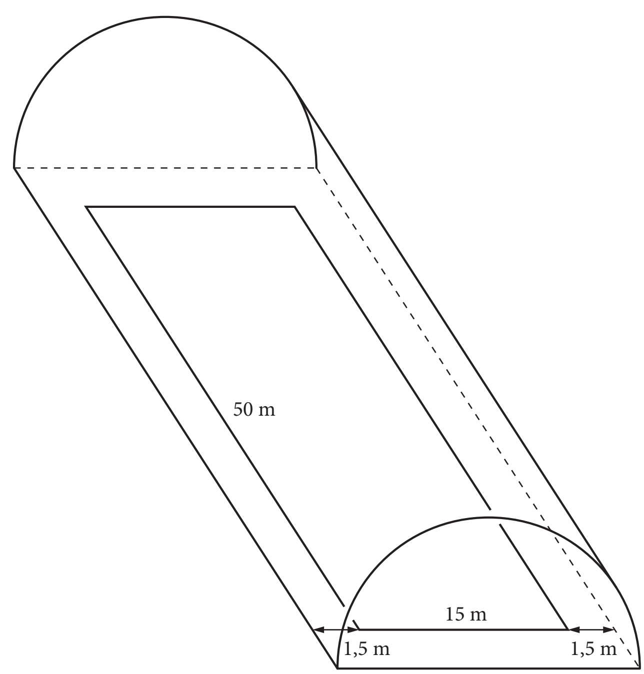
c) Ha 2017-ben a túrákon részt vevők közül 2 gyereket véletlenszerűen kiválasztunk, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy mindketten pontosan két típusú túrán vettek részt? (**7 pont**)

18. Egy úszómedence 15 m széles, 50 m hosszú, és a hosszabb oldala mentén a vízmélység 170 cm-ről egyenletesen nő 250 cm-ig.

a) Mennyi víz fér a medencébe? (**6 pont**)

b) Télen a medence fölé az ábra szerint egy félhenger alakú sátrat húznak, amelynek két végét függőleges síkú félkörökkel zárják le. A félhenger sugara 9 m, hossza 54 m. Hány négyzetméter anyagot kellett venni a sátor elkészítéséhez, ha a hulladék a felhasznált anyag 15%-a volt? (**7 pont**)

c) A medencében 8 úszósávot alakítottak ki. Egy alkalommal 6-an érkeznek az uszodába. Hányféleképpen foglalhatják el az úszósávokat? (**4 pont**)



4. FELADATSOR

I. rész

1. Oldja meg a valós számok halmazán az egyenletet!

$\frac{x-5}{3}-3x=\frac{5-3x}{8}$ **(3 pont)**

2. Adott a derékszögű koordináta-rendszerben két pont: $A(4; -2)$ és $B(0; 4)$. Adja meg a felezőmerőlegesük egyenletét! **(3 pont)**

3. Egy számtani sorozat második tagja -42; differenciája 3. Mennyi az első tíz tag összege? **(2 pont)**

4. Milyen valós számokra nincs értelme a $\frac{\sin 2x}{\sin x}$ kifejezésnek? Válaszát indokolja! **(3 pont)**

5. Adja meg az $[1; 4]$ intervallumon értelmezett $f(x)=|x|+3$ függvény legkisebb és legnagyobb értékét! **(2 pont)**

6. Hány éle van annak az ötpontú gráfnak, melynek minden pontjának fokszáma kettő? **(2 pont)**

7. Egy pénzérmét egymás után háromszor feldobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy először fejet dobunk, utána kétszer írást? **(2 pont)**

8. Mennyi a kifejezés pontos értéke?

$2^{5-\log_2 5}$ **(2 pont)**

9. Egy rombusz átlói 40 cm és 32 cm hosszúak. Milyen hosszú a rombusz oldala? Válaszát két tizedesjegyre kerekítve adja meg! **(3 pont)**

10. Mennyivel nagyobb az 1 egység sugarú gömb felszíne, mint az 1 egység oldalélű kocka felszíne? **(3 pont)**

11. Igaz vagy hamis?

a) Van olyan valós szám, amely igazzá teszi a következő egyenletet: $\frac{1}{x}=\sqrt{x}+\frac{1}{2}$.

b) Egy pozitív valós szám hármas alapú logaritmusa pozitív.

c) Két véges halmaz uniójának elemszáma nem lehet kisebb, mint a két halmaz elemszámának összege. **(2 pont)**

12. Hány olyan tízes számrendszerbeli pozitív egész szám van, amely 4 jegyű, 5-tel osztható, és minden számjegye különböző? **(3 pont)**

II. rész

A

13. Egy turistacsoport érkezik egy étterembe. Az ebédnél 15-en rendelnek levest, húszan főételt.

a) A szakács a rendelést hallva elgondolkodik azon, vajon hányan rendelhettek levest és főételt is. Milyen határok között van azoknak a száma, akik mindkét fogást rendelték? Válaszát indokolja! **(4 pont)**

Süteményt 15-en rendelnek, kávét húszan. A vendégek 60%-a kért süteményt, de lehet, hogy van olyan vendég, aki nem kért kávét sem és süteményt sem.

b) Legfeljebb a vendégek hány százaléka rendelt kávét is és süteményt is? Legalább a vendégek hány százaléka rendelt kávét is és süteményt is? Válaszát indokolja! **(6 pont)**

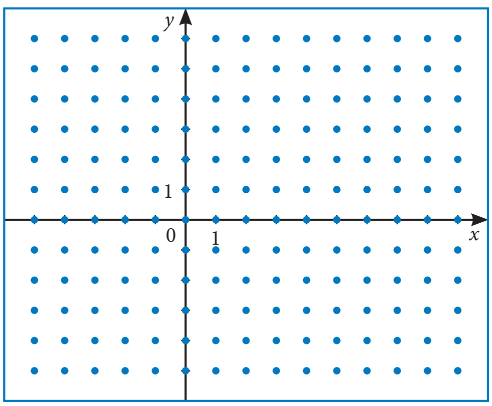
14. Andrásnak tavaly több volt a fizetése, mint Bélának. András 11 havi fizetése volt annyi, mint Béla egész éves keresete. Idén január elsejétől mindketten fizetésemelést kaptak, amely a szerződésük szerint minden újabb év január elsejétől érvényes. Így Andrásnak 2%-kal, míg Bélának 3%-kal nő minden év január elsején a fizetése.

a) Ha megmarad ez a növekedési ütem, akkor hány év múlva fordul elő először, hogy Béla fizetése nagyobb lesz, mint Andrásé? (**8 pont**)

b) András cégénél 26-an dolgoznak, a dolgozók átlagfizetése 293 000 peták (az ország pénznemében). Felvesznek a céghez egy informatikust 352 000 peták és egy gazdasági ügyintézőt 333 000 peták fizetéssel. Mennyi lesz ekkor a fizetések átlaga a cégnél? (**4 pont**)

15. Egy elektromos panel kivezetési pontjai egy derékszögű koordináta-rendszer egész koordinátájú rácspontjai. A tervező megrajzolja azt a három egyenest, melynek egyenletei

$x + 10y = 47$; $8x - y = 52$ és $x + y = 2$.



a) Határozza meg az egyenesek által közrezárt háromszög területét! (**6 pont**)

b) Azokba a rácspontokba, amelyek a háromszög kerületére esnek, izzókat szerelnek. Hány izzó kerül a panelre? (**2 pont**)

c) Ezek közül az izzók közül véletlenszerűen felvillan két izzó. Mennyi a valószínűsége, hogy a felvillanó izzók nincsenek a háromszög egy közös oldalegyenesén? (**6 pont**)

B

Az alábbi három feladatból kettőt kell megoldani.

16. Adott egy 11 számból álló adathalmaz, melynek két eleme: 0,342 és 0,940. A számokat vizsgálva Klári rájön, hogy a számok éppen a sin 0°, sin 10°, sin 20°, sin 30°, sin 40°, sin 50°, sin 60°, sin 70°, sin 80°, sin 90°, sin 100° számok 3 tizedesjegyre kerekített értékei.

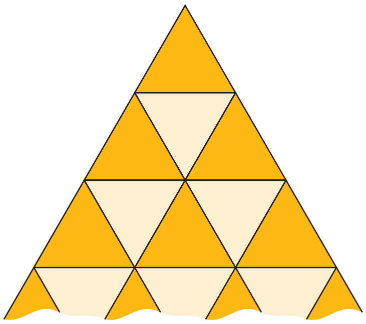
a) Határozza meg a tizenegy szám átlagát, mediánját, móduszát és terjedelmét! (**6 pont**)

Egy háromszög mindhárom szöge különböző, és tudjuk róluk, hogy nagyságuk a 10° egész számú többszöröse.

b) Hányféleképpen választhatunk ki a 0°, 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70°, 80°, 90°, 100° közül három különbözőt úgy, hogy egy háromszög szögeit adják meg? (A kiválasztás sorrendjétől eltekintünk.) (**6 pont**)

c) Ezek közül a háromszögek közül mekkora a kerülete annak, amelynek szögei 40°, 60° és 80° nagyságúak, és leghosszabb oldala 12 cm? (**5 pont**)

17. Díszítőmintát készítenek egy falfelületre, egybevágó szabályos háromszögekből. A háromszögek oldalai 14 cm hosszúak. Ezzel borítanak be egy háromszög alakú felületet, az ábra szerint. A minta legfelső sorában csak egy darab háromszög van, a legalsó sorban pedig 73.



a) Összesen hány háromszögből áll a minta? (**6 pont**)

b) Alulról számítva hányadik sorban helyezhetik el a feliratot, ha arra a legalacsonyabban fekvő sorra szeretnék tenni, amelynek alsó éle legalább 5 m széles? (**4 pont**)

c) Milyen magas a minta? (**4 pont**)

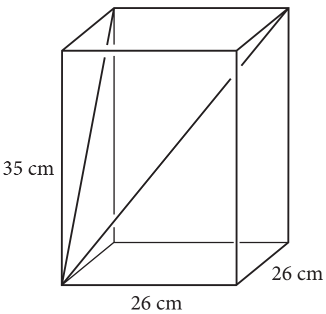
d) A mintát kétféle színű háromszögekből készítik, ahogy azt az ábra mutatja. Melyik színű háromszögből van több, és mennyivel? (**3 pont**)

18. Egy négyzet alapú egyenes hasáb alapélei 26 cm hosszúak, magassága 35 cm.

a) Mekkora szöget zár be egy oldallap két lapátlója egymással? (**4 pont**)

b) Mekkora szöget zár be a közös csúcsból induló testátló és lapátló, ha a lapátló az egyik oldallapra illeszkedik? (**7 pont**)

c) A test csúcsai közül véletlenszerűen kiválasztunk kettőt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott csúcsok távolsága nagyobb, mint 35 cm? (**6 pont**)

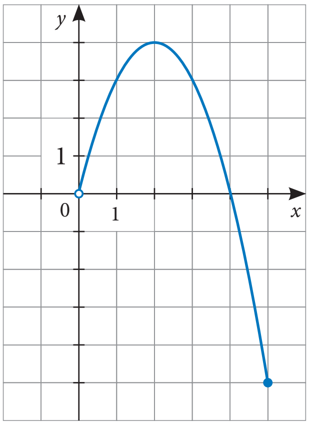


5. FELADATSOR

1. rész

1. A játékboltban leáraztak egy plüssfigurát. A 41%-os leárazás után az ára 19,88 euró lett. Mennyibe került a plüssfigura eredetileg? Válaszát euróban megadva, két tizedesjegyre kerekítse! **(2 pont)**

2. **a)** Adja meg a grafikonjával jellemzett másodfokú függvény hozzárendelési szabályát!
b) Adja meg a függvény értelmezési tartományát!
c) Adja meg a függvény értékkészletét!
(3 pont)



3. Oldja meg a cos $x = 0{,}5$ egyenletet a valós számok halmazán! **(2 pont)**

4. Egy iskolai röplabdabajnokságon minden csapat minden csapattal egy mérkőzést játszott (körmérkőzés). Összesen 105 mérkőzés zajlott le. Hány csapat indult a bajnokságon? **(3 pont)**

5. Legyen **a**(2; −5) és **b**(1; 4). Adja meg **a** + **b** és **a** · **b** értékét! **(2 pont)**

6. Egy tizenkét fős nyelvcsoportban négyen sosem csinálnak leckét, a többiek pedig rendszeresen csinálnak leckét. Ha a nyelvtanár egy órán három gyereket kérdez ki a leckéből, mekkora a valószínűsége, hogy mindhárman írtak leckét? **(3 pont)**

7. Egy gráfban 4 csúcs van. Az egyes csúcsokból 3; 2; 2; 1 él indul. Rajzoljon meg egy ilyen gráfot! **(2 pont)**

8. Mi az állítások logikai értéke: igaz vagy hamis?
A) Van olyan irracionális szám, amelyik egész szám.
B) Minden háromszög magasságpontja a háromszögön belül található.
C) A legkisebb prímszám páros, és kisebb, mint kettő.
D) A négyzet átlói felezik egymást vagy harmadolják egymást.
(3 pont)

9. Tagadja a következő állítást: „Mindenkinek van egy alma.” **(2 pont)**

10. Egyszerűsítse az alábbi kifejezést:

$\frac{x-x^2}{x-1} \quad (x \neq 1)$ **(2 pont)**

11. Egy villanypózna magasságát szeretnénk megmérni. Az internetről megtudjuk, hogy a mai napon, deleléskor a nap 40°-os szögben süt (a napsugárnak a vízszintessel bezárt szöge 40°). Ekkor megmérve az oszlop árnyékát azt 6,7 méternek találjuk. Milyen magas az oszlop? Válaszát méterben megadva, egy tizedesjegyre kerekítse! **(4 pont)**

12. Mi az alábbi kifejezés értelmezési tartománya?

$\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ **(2 pont)**

II. rész

A.

13. Péterék egyhetes biciklitúrára készülnek. Az egyhetes túrán összesen 525 km-t fognak biciklizni. Abban állapodnak meg, hogy az egymást követő napokon az előző naphoz képest mindig 10%-kal több utat tesznek meg.

a) Hány kilométert kell megtenniük az első és mennyit az utolsó napon? **(7 pont)**

b) Péter régi biciklijének kereke 24″-os (24 collos – 1 coll kb. 2,54 cm) átmérőjű volt. Az ehhez a mérethez vásárolt sebességmérőt áttette az új, 27″-os kerekű biciklijére, de nem állította át az új méretre. Meglepődve tapasztalta, hogy habár a műszer 20 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-s átlagsebességet jelzett, mégis több mint 20 km-t tett meg egy óra alatt. Számolja ki, hogy mennyi volt Péter átlagsebessége! A sebességmérő úgy számolja az átlagsebességet, hogy megszámolja, hányat fordult a bicikli kereke, ezt megszorozza annak a keréknek a kerületével, amit beállítottunk, és az így kapott távolságot elosztja az eltelt idővel. **(5 pont)**

14. Két település, *Kázmérváros* és *Hubafalva* között egyenes autópályát építenek. A térképre helyezett koordináta-rendszerben *Kázmérváros* központjának koordinátái $K(0; 4)$, *Hubafalváé* $H(9; 1)$.

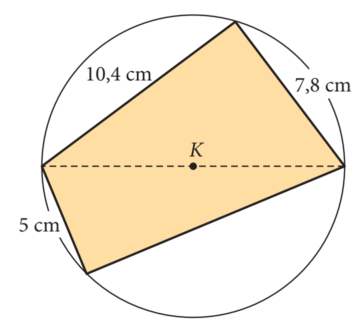
a) Egy harmadik település, *Rajmundvár* a koordináta-rendszer $R(1; -3)$ pontjában található. Legalább milyen hosszú bekötőútra van szükség, hogy a városból ki lehessen hajtani az autópályára? (A koordináta-rendszerben egy egység 4 km-nek felel meg.) **(8 pont)**

b) A három települést összekötő körgyűrű is épül, melynek középpontja a koordináta-rendszer $C(4; 1)$ pontja. A körgyűrű mindhárom települést érinti. Egy apró telek a koordináta-rendszer $T(8{,}5; -1)$ pontjában található. A körgyűrűn belül vagy kívül van a telek? **(4 pont)**

15.

a) Mekkora az ábrán látható körbe írt négyszög kerülete és területe? **(5 pont)**

b) Egy 6,5 centiméter sugarú kört az egyik 12 cm hosszúságú húrja két körszeletre oszt. Mekkora a kisebbik körszelet területe? **(7 pont)**



B.

Az alábbi három feladatból kettőt kell megoldani.

16. Szulamit egy alkalommal sorba rendezte a szuperhős figuráit. Meglepődve tapasztalta, hogy éppen minden harmadik figura volt gonosz szereplő (tehát a többi jó), és éppen minden ötödik figura nem tetszett neki (tehát a többi tetszett). Az utolsó figura egy gonosz karakter volt, aki nem tetszett neki.

a) Hány szuperhősfigurája van Szulamitnak, ha tudjuk, hogy 12 olyan van köztük, aki gonosz és nem tetszik neki? **(4 pont)**

b) Igaz-e, hogy ha ezt a tizenkettőt (aki gonosz és nem tetszik neki) kivennénk a sorból, akkor csupa olyan maradna benn, aki jó és tetszik neki? Válaszát indokolja! **(4 pont)**

c) Hány figurát kell kiválasztanunk, hogy biztosan legyen köztük két jó vagy két gonosz? Válaszát indokolja! **(3 pont)**

d) Ha kivesszük azokat, akik gonoszak, és azokat is, akik nem tetszenek Szulamitnak, akkor hány figura marad bent? **(4 pont)**

e) Véletlenszerűen kiválasztva egy figurát Szulamit szuperhősfigurái közül, mekkora annak a valószínűsége, hogy az nem gonosz? **(2 pont)**

17. Egy 2009-es újságcikkben olvashatjuk a következőket:

„A főpolgármesteri hivatal megbízásából ma reggel a város két pontján forgalomszámlálást végzett a Fővárosi Közterület-felügyelet. A gyorsfelmérés alapján megállapítható, hogy az érintett budapestiek közel fele komolyan vette a szmogriadó riasztási fokozatát, és nem használta páratlan rendszámú autóját.

[...] A forgalomszámlálás szerint hétfőn reggel a Dózsa György úton egy óra alatt 2000 személyautó közlekedett, ebből 1300 páros, 700 páratlan rendszámmal. Az Alkotás úton ugyanezen idő alatt 1400 autó haladt, közülük 900 páros, 500 pedig páratlan rendszámmal."

(Szmogriadó esetén az autóval közlekedőket arra szólítják fel, hogy páros napokon a páros számra végződő, páratlan napokon pedig a páratlan számra végződő rendszámú autókat használják. A többiek számára a tömegközlekedési eszközök ingyenesen használhatók.)

a) Mekkora volt a relatív gyakorisága a páros rendszámokkal közlekedőknek a Dózsa György úton és mekkora az Alkotás úton? Válaszát százalékalakban, két tizedesjegyre kerekítse! **(3 pont)**

b) Tekintsük a páros rendszámmal közlekedők relatív gyakoriságát országosan 65%-nak. Mekkora a valószínűsége, hogy öt egymást követő autóból pontosan három rendszáma lesz páros? **(4 pont)**

c) Az újságcikkben említett hétfőn a páros rendszámú autók tulajdonosait nem érinti a szmogriadó, az csak a páratlan rendszámú autók tulajdonosaira vonatkozik. Az elemzők olyan modell alapján számolnak, mely szerint az autótulajdonosok fele páratlan rendszámú. A Dózsa György úton végzett felmérés alapján a páratlan rendszámú autósok közül hányan tartották be ezen feltevések szerint a rendelkezést? **(4 pont)**

d) A felmérés során öt másik útszakaszon számolták egy óra alatt a páratlan rendszámú autókat. A kapott számértékek: 220, 208, 310, 225, 265 voltak. Adja meg ezen öt szám átlagát, móduszát, mediánját és szórását! **(6 pont)**

18. Egy dísztál alakja szabályos ötszög alapú egyenes hasáb, melynek alapélei 12 cm-esek, magassága pedig 18 cm.

a) Hány dl víz fér a dísztálba? **(7 pont)**

A dísztálba vizet töltünk, majd beleejtünk egy 6 cm átmérőjű tömör gömböt, amely teljesen elsüllyed a vízben.

b) Mennyivel emelkedik meg a vízszint? **(6 pont)**

A 25 °C -os szobában a tálba 50 °C-os vizet töltünk. A víz elkezd hűlni, hőmérséklete t perc múlva a következő összefüggés alapján számolható: $T(t) = 25 + 25 \cdot k^t$, ahol t az eltelt idő percben mérve, k a lehűlési tényező ($k < 1$), amely egy mértékegység nélküli szám, T pedig a tea hőmérséklete °C-ban mérve. Megfigyelést teszünk, miszerint a víz hőmérséklete 15 perc elteltével 35 °C-os.

c) Mekkora k értéke? A választ két tizedesjegy pontossággal adja meg! **(4 pont)**

Néhány feladat végeredménye

1. lecke: 1. 11 cm, 5575 cm^3, 7238 cm^3, 77%, illetve 10 cm, 4189 cm^3, 7238 cm^3, 58%. **2.** 1985 kJ (458 kcal) és 1391 kJ (321 kcal) közötti. **3. b)** 10 620 cm^3, 10,6 kg, és 25,64 cm, 6,5 kg és 26 cm, 12 000 cm^3.

2. lecke: 1. 9,8 cm és 8 cm. **2. a)** 5 cm. **b)** 4,58 cm és 3 cm. **3.** 5843 km.

3. lecke: 1. a) 4,5 cm. **b)** 123%. **2. a)** 283 cm^2. **b)** 131 cm^2. **3.** 27,53 m. **4.** 2768 m^2.

4. lecke: 1. 15,2 cm^2; 28,3 cm^2; 34,2 cm^2. **2. a)** $\frac{1}{215}$. **b)** $\frac{1}{26}$. **c)** $\frac{1}{7}$. **d)** $\frac{8}{19}$. **3. a)** 12 cm; 9 cm; 7,5 cm. **b)** 531 cm^2; 9-szerese. **c)** 810 cm^2; 27-szerese.

5. lecke: 1. a) 11 700 cm^3. **b)** 6; 8; 8; 10; 6; 10; 10; 12. **c)** 300 cm^2; 162,5 cm^2; 78 cm^2. **d)** $2A + 12B + 12C$; $4A + 12B + 6C$; $6A + 8B + 8C$; $6A + 8B + 8C$; $6A + 12B + 4C$; $12A + 6B + 6C$; $12A + 8B + 4C$; $12A + 10B + 4C$. **2. a)** 73,43 m^2; 62,57 m^2. **b)** 30 raklap. **c)** 546 000 forint. **d)** 24 raklap.

6. lecke: 1. a) 9 cm^2; 7 cm^2; 9 : 7. **b)** 27 cm^3; 21 cm^3; 9 : 7. **c)** 54 cm^2; 43 cm^2; 1,26. **2. b)** 11,24 cm^2, 1,5 cm^3. **d)** 0,61.

7. lecke: 1. a) 5 átló; 2,24; 3; 3,16; 2,83; 2,24 (cm). **b)** 20 átló; 4-féle hosszúság. **c)** 5 átló; 3,74; 4,24; 4,36; 4,12; 3,74 (cm). **d)** 40 testátló; 4-féle hosszúság. **2.** 3 cm, 2,24 cm, 1,339, 53,3°; 3 cm, 3 cm, 1, 45°; 3 cm, 3,16 cm, 0,9494, 43,5°; 3 cm, 2,83 cm, 1,06, 46,7°. **3. a)** 11,8 cm. **b)** $\alpha = 57{,}2°$. **c)** $\varepsilon = 65{,}6°$. **d)** $\varepsilon = 180° - 2\alpha$. **e)** igaza van. **f)** 32,79°.

8. lecke: 1. a téglalap oldalai 2,5 cm és 3 cm, illetve 5 cm és 6 cm. **2. a)** 200,75 cm^2; 165,4 cm^3. **b)** 116,0 cm^2; 95,57 cm^3. **3. a)** 68,57 cm^2, 41,35 cm^3. **b)** 43,38 cm^2, 23,8 cm^3. **4. a)** 4,774 liter. **b)** 23,7 cm.

9. lecke: 1. $3{,}9 \cdot 10^7$ m^3. **2.** 47 ember. **3. a)** 8,6 cm. **b)** 3,7 cm. **c)** 3,5 mm.

10. lecke: 1. a) igen. **b)** 10 cm, 10 cm, 14,1 cm és 45°, 45°, 90°, illetve 10 cm, 14,1 cm, 17,3 cm és 90°, 54,7°, 35,3°. **d)** 241 cm^2. **e)** 166,7 cm^3. **f)** 7,1 cm. **2. a)** legnagyobb az ötoldalúé, legkisebb a háromoldalúé. **b)** legnagyobb a háromoldalúé, legkisebb az ötoldalúé. **3. c)** 6-féle tetraéder.

11. lecke: 1. a) 324 cm^2; 216 cm^3. **b)** 27,9°. **2. a)** 5 cm; 624 cm^3. **b)** 22,6°. **c)** 25,7°. **d)** 789 cm^3. **3. a)** 74,5 cm; 336 cm^2. **b)** 31,6°; 58,4°; 90°.

12. lecke: 1. a) mindegyik. **b)** $5 \cdot \sqrt{2}$ cm; $5 \cdot \sqrt{3}$ cm; $5 \cdot \sqrt{2}$ cm. **d)** 85,4 cm^2. **e)** 41,7 cm^3. **f)** 90°, 45°, 35,3°, 45°. **4. a)** $12 \cdot \sqrt{2}$ cm. **c)** 576 cm^3.

13. lecke: 1. a) 159 cm^2. **b)** 132,5 cm^3. **c)** 45,2°. **2.** 67,4°. **3. a)** 92,8°. **b)** 9,24 dm^3. **c)** 260,7°. **d)** 33 dm^2.

14. lecke: 1. $\approx$ 1,9 m^3. **2. a)** 1551 cm^2; 1787 cm^2; 2965 cm^2; 3672 cm^2. **b)** 2262 cm^3; 3393 cm^3; 9048 cm^3; 12 441 cm^3. **3. a)** 603,2 cm^3 $\approx$ 6 dl. **b)** 29,7%; 12,5%; 57,8%. **d)** 13,3 cm.

15. lecke: 1. a) 256 cm^2, 144 cm^2. **b)** 683 cm^3, 288 cm^3, 395 cm^3. **c)** 348 cm^2, 558 cm^2. **2.** 4,2 cm^3; 29,3 cm^3; 79,6 cm^3. **3. a)** 12 cm. **b)** 608 cm^3.

16. lecke: 1. a) 4115 mm^3. **b)** 1517 $\frac{kg}{m^3}$. **2. a)** 126,3 dm^3. **b)** 80,4 dm^3. **c)** 19,7 kg. **3.** *B*-nek a legnagyobb, *A*-nak a legkisebb.

17. lecke: 1. Bence számításai: **a)** 3 : 7. **b)** 20 cm. **c)** $\frac{9}{49}$. **d)** $\frac{40}{49}$. **e)** 15,71 dm^2. Dönci számításai: **a)** 110 cm. **b)** 15 cm. **c)** 17,5 cm; 7,5 cm; 20 cm. **d)** 19,24 dm^2; 3,53 dm^2. **e)** 15,71 dm^2. **2. a)** 136,2 cm^2; 272,4 cm^2. **b)** 5,1 cm és 3,4 cm; illetve 10,2 cm és 6,8 cm. **c)** 4,8 cm; 276 cm^3; illetve 3,8 cm; 874 cm^3.

18. lecke: 1. b) 24 cm; 25 cm; 30 cm. **c)** sárgának. **d)** 28,5 dm^2; 27,2 dm^2; 29,7 dm^2. **2.** 3,9 m; 3,8 m; 3,9 m. **3. a)** 650 cm^2. **b)** 1812 cm^3 $\approx$ 1,8 l. **c)** 778 cm^3 $\approx$ 0,8 l. **4. a)** 65,1 mm. **b)** 33,4 cm^2.

19. lecke: 1. a) 21,3 cm. **b)** 2661 cm^2; 7959 cm^3. **c)** 62,8°. **2. a)** 71,4 cm^2. **b)** 97,2°.

20. lecke: 1. b) 26 m. **c)** 243 238 m^3. **d)** 15 861 m^2. **2.** igen.

21. lecke: 1. a) 54,8 kg. **b)** 187,25 dm^2. **2.** 1,203 cm^3. **3. a)** 2,47 dm^3. **b)** 1,16 dm^3. **4. a)** 1484 cm^3. **b)** 783 cm^2. **5. a)** 60 cm^3. **b)** 8,3 l. **c)** 5494 cm^2.

22. lecke: 1. a) 2,8 m^3. **b)** 240 db. **2. a)** 311 m^3. **b)** 247,4 m^2. **3. a)** 74 cm. **b)** 39 dm^3. **4. a)** 2,22 cm^2. **b)** 2,44 cm^2.

23. lecke: 1. $3{,}04 \cdot 10^{16}$ m^3; 2%. **2. a)** 24,74 dm. **b)** 1 : 3. **c)** 19,9 dm. **d)** 64,8°. **e)** 71,6°. **3.** igen. **4. a)** 940,12 cm^2. **b)** 18 cm; 14,6 cm; 1688 cm^3. **c)** 71,4°.

24. lecke: 4. a) $x \mapsto \frac{6}{x}$. **b)** $x \mapsto 4 - \frac{4}{x}$. **c)** $x \mapsto 2^{x-1}$. **5. a)** 0; −1; 0; 1. **b)** −12; −5; 0; 3; 4; 3; 0; −5; −12; −21. **c)** $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{6}{7}$.

25. lecke: 2. a) igaza. **b)** 17 711; 4181. **c)** a 20. napon. **3. b)** $16\sqrt{2}$ cm. **c)** 32 cm^2. **d)** $56 + 24\sqrt{2}$ cm. **e)** 124 cm^2. **4. b)** 100; 250 000.

26. lecke: 1. a) 1; 0,5; 0,01. **b)** 5; 8; 20. **2. a)** 0,4; 1,7; 5,1. **b)** 8; 278; 670. **c)** 4; 16; 1200; 77. **5. a)** 1; 0; −1; 0; 0; 1. **b)** 3.

27. lecke: 1. a) n. **b)** n. **c)** $2n$. **d)** $3n - 2$. **2. a)** 3, 6; 9; 12, 15. **b)** 1; 8; 27; 64; 125. **c)** 3; 9; 27; 81; 243. **d)** 0; ≈ 0,63; 1; ≈ 1,26; ≈ 1,46. **3. a)** 3; 2; 0; −4; −12; −28; −60; −124. **b)** $\sqrt{3}$; 5; $2+5\sqrt{3}$; $17+2\sqrt{3}$; $8+17\sqrt{3}$; $53+8\sqrt{3}$; $26+53\sqrt{3}$; $161+26\sqrt{3}$. **4. a)** 5; 7; 9; 11; 13; 15; $a_n = 3 + 2n$. **b)** 8; 4; 2; 1; 0,5; 0,25; $b_n = 2^{4-n}$. **c)** 3; 1; −2; −3; −1; 2.

28. lecke: 1. a) 7; 2; −3; −8; −13; −18. **b)** −5. **2. a)** 6; 13; 20; 27; 34; 41; 48; 55; 62; 69. **b)** 122; −43. **3.** mértani sorozat. **4. a)** 1000; 100, 10, 1; 0,1; 0,01. **b)** 2; 0,5.

29 lecke: 1. a) 34. **b)** 2. **c)** 186. **d)** 958. **2. a)** 21. **b)** −29. **c)** 14; 28. **3. a)** 67. **b)** 80. **c)** 105. **4. a)** 4. **b)** −10. **c)** 14. **d)** 2. **5.** 52.

30. lecke: 1. a) 1476. **b)** 340. **c)** 795. **3.** mind 0. **4.** igen; 15 darab, 180 cm, 325 darab, 14 láda.

31. lecke: 1. 60,75; ≈ 691,98; ≈ 303 014. **2.** 59. **3. a)** 13,2 millió Ft. **b)** az 5. évben. **4. a)** 12; $\frac{4}{3}$; ≈ 0,6758. **b)** −12; $-\frac{4}{3}$; ≈ −0,6758.

32. lecke: 1. 146,25; ≈ 2039,94; ≈ 909 006. **2. a)** 49. **b)** 0. **c)** 0. **d)** 49. **3.** ≈ 12 023 627 Ft. **4.** 15 624; 10 416.

33. lecke: 1. 17. **2. a)** 62. **b)** 24. **3. a)** 1,9375; ≈ 1,998; ≈ 1,99994; ≈ 1,999998. **b)** ≈ 1,938; ≈ 1,998; ≈ 2; ≈ 2. **4.** 294 cm; 1184 cm²; 684 cm². **5. b)** 18 155 forint.

34. lecke: 1. a) −14; 2,5. **b)** −28; 1,75. **3.** 10. **4.** ≈ 43 millió Ft. **5. a)** 10,24%. **b)** ≈ 5,24%. **c)** ≈ 20,9%.

35. lecke: 1. a) 33; 29,3; 27; 30,3. **c)** 32,4 és 25,3. **2. a)** 36. **b)** 31. **c)** 26. **3. a)** 23; 18; 19. **b)** 0,3.

36. lecke: 1. b) 120; 108; 96; 84; 114; 78. **c)** relatív gyakoriságok: 0,2; 0,18; 0,16; 0,14; 0,19; 0,13. módusz: 7. medián: 9. átlag: 9,33. **e)** 98,3%. **2.** 96; 86; 77; 67; 92; 64. **3.** 31%; 13%; 8%; 15%; 33%.

37. lecke: 1. 159,6; 31,92; 13,44; 121,8; 4,2; 88,2 (Ft). **2. a)** 2000–2002 és 2011–2012. **b)** nincs. **d)** 390%-kal.

38. lecke: 1. a) 5,2; 5,2. **c)** 2,03; 0,93.

39. lecke: 1. b) 3,49. **c)** 4. **d)** 4. **e)** 5. **f)** 1,35. **g)** 1,57. **2. a)** 2; 197. **b)** 50,5. **c)** 69,7.

40. A) lecke: 1. a) 3. **b)** 2,7. **2. a)** 6; 6. **b)** 1,3; 3,7. **3. a)** 3,49. **b)** 1,57. **4.** 2,51.

40. B) lecke: 3. Bence minden jegye 4-es.

41. lecke: 1. 14,8. **2.** 68 mm. **c)** 36,8 mm. **d)** 79%, illetve 75%. **3. a)** 88%. **b)** 14,5 mm. **c)** nem.

42. lecke: 1. a) pl.: 296; 197; 349; 173; 248; 302; 284; 151. **b)** 15,1%. **c)** 15,1%. **d)** 26,1%.

43. lecke: 1. a) 222; 222; 0; 0; 0. **b)** igaz. **c)** igaz. **d)** hamis. **3. d)** 3; 3; 3. **e)** 0,83; 1,12. **4. b)** 3000; 2570; 5570. **c)** 43,9; 40,0; 19; 16. **5. b)** 36 (g). **c)** medián 36; módusz 37.

44. lecke: 1. b) $A = C$. **2. a)** $A \subset B$; $C \subset B$; $E \subset B$; $A \subset D$; $C \subset D$. c) $A \setminus B = \{\ \}$. **4. a)** 512. **b)** 32. **c)** 4. **d)** 4096. **5.** véges: $\mathbf{N} \setminus \mathbf{Z}$. **6.** véges: $H \cap K$ és $L \setminus K$ és $H \cap L$. **7. a)** 10. **b)** 16. **c)** 11. **d)** 8.

45. lecke: 1. a) Igaz. **b)** Hamis. **c)** Igaz. **d)** Igaz. **2. a)** 14 tanulónak. **b)** 7 tanulónak. **c)** 2240. **d)** 19. **3.** $n \geq -8$ és $n < 10$. **4. a)** $A \cup B$. **b)** $A \setminus B = A$. **c)** $A \cap B$ (= ∅). **6.** A: Igaz; B: Hamis; C: Hamis.

46. lecke: 1. 8! = 40 320 (permutáció). **2. a)** 5. **b)** 10. **c)** 15. **3.** 21 és 45. **4. a)** 9^5. **b)** 5^5. **c)** $4 \cdot 5^4$. **d)** $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$. **5.** 126. **6. a)** $\binom{140}{9}$. **b)** $\binom{140}{7} \cdot \binom{10}{2}$. **c)** 0. **d)** 10. **7. a)** $\binom{5}{3} \cdot \binom{85}{2}$. **b)** $\binom{5}{3} \cdot \binom{85}{2} + \binom{5}{4} \cdot \binom{85}{1} + 1 = 36\,126$.

47. lecke: 1. a) 36. **b)** 30. **c)** Nem. **2.** 720. **3. a)** 31. **b)** 242. **4.** $\binom{34}{2} \cdot \binom{32}{28}$. **5. a)** 6. **b)** 12.

48. lecke: 1. a) 0,0853. **b)** 0,240. **c)** 0,672. **d)** 0,496. **2. a)** 324 ezer. **b)** bevásárlóközpont. **c)** 23 640; 21 500; 15 860. **4. a)** 22 803. **b)** gyakoriságok: 0;2734; 2798; 2244; 1822; 2001. **c)** 0,51. **d)** 0,59. **e)** 0,67. **f)** 0,22.

49. lecke: 1. a) $\frac{13}{60}$. **b)** $\frac{13}{40}$. **c)** $\frac{61}{120}$. **2. a)** 0,255. **b)** 0,490. **c)** 0,166. **d)** 0,509. **e)** 0,491. **3. a)** 18. **b)** $\frac{1}{3}$. **c)** $\frac{5}{9}$. **d)** $\frac{4}{9}$. **e)** $\frac{4}{9}$. **4.** 48; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{7}{16}$; $\frac{17}{48}$. **5. a)** 30. **b)** $\frac{15}{36}$. **6. a)** $\frac{6}{216}$. **b)** $\frac{120}{216}$. **c)** $\frac{90}{216}$. **d)** $\frac{6}{216}$.

50. lecke: 1. a) 0,61. **b)** 0,39. **c)** legalább 139-szer. **2. a)** $2{,}09 \cdot 10^{-7}$. **b)** 0,00335. **c)** 0,000082. **d)** 0,9993. **3.** $\frac{271}{1000}$. **4.** 0,0742.

51. lecke: 1. b) 0,11; 0,89. **2. a)** 0,41. **b)** 0,20. **c)** 0,43. **d)** 0,57.

52. lecke: 1. a) 66; 28; 169. **2.** 7. **3.** 420; $\frac{3}{70}$. **4.** 2; 4 19.

53. lecke: 1. ≈ 740 ezer Ft. **2.** ≈ 21 év. **3.** 96. **4. a)** az első. **b)** a második. **5.** számtani: a), b), d); mértani: c), e). **6. a)** ≈ 2,5 millió Ft. **b)** ≈ 253 ezer Ft. **c)** ≈ 10%. **d)** ≈ 16 óra.

54. lecke: 5. $\mathbf{R} \setminus \{0; -1\}$. **6. a)** $]0; \infty[$. **b)** $]-\frac{4}{3}; \infty[$. **c)** $]-\infty; 7[$. **d)** $\mathbf{R} \setminus \{7\}$. **e)** $[2; \infty[$. **f)** $\mathbf{R} \setminus \{0{,}7\pi + k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}$.

55. lecke: 1. $-\frac{2}{9}$. **2. a)** −0,7. **b)** 0; 6. **3.** {0,5}. **4. a)** $x \in \mathbf{Z}$. **b)** nincs megoldás. **c)** 3. **d)** ±5. **e)** ±6. **5. a)** 3; 2,5. **b)** $k \cdot \frac{\pi}{2}$; $k \in \mathbf{Z}$.

56. lecke: 1. a) $\left]-\infty; -\frac{9}{4}\right[\cup\ ]2; \infty[$. **b)** $]-4; 4[\cup\ ]4; \infty[$. **2.** legalább 11 oldalú. **3. a)** $]-\infty; 0] \cup [3{,}5; \infty[$. **b)** $[0; 3{,}5]$. **c)** $\mathbf{R} \setminus \{0; 3{,}5\}$. **d)** $]-\infty; 0] \cup [3{,}5; \infty[$. **4. a)** $x \leq -2$. **b)** $x \in \mathbf{R}$. **c)** $x \leq -12$ vagy $x \geq 12$. **5. a)** $x \geq -\frac{3}{4}$. **b)** $x > -2$. **c)** $x < -2$ vagy $x > 3$.

57. lecke: 1. a) −0,5; 4. **b)** ≈ 0,72; ≈ 2,78. **c)** 1; 2. **d)** 2. **e)** −1. **2. a)** −8; −4. **b)** $\frac{4}{3}$. **c)** $[-3; \infty[$. **d)** $]-\infty; 4]$. **e)** nincs megoldás. **f)** 3. **g)** $x = \frac{4}{3}$ és $y \in \mathbf{R}$ vagy $y = 8$ és $x \in \mathbf{R}$. **3. a)** -3; 6. **b)** 1; 2. **c)** 2.

58. lecke: 1. b) 20 perc. **2.** 16 mm; 30 mm. **3.** Kutyaeledel: 500 Ft. Macskaeledel: 150 Ft. **4.** 12 kg; 200Ft. **5. a)** 32 cm; 112,5 cm. **b)** 68 cm; 127,5 cm; 4335 cm^2.

59. lecke: 1. a) (6; 4). **b)** $(-0{,}5;\ 2{,}4)$. **c)** $(-1{,}5;\ -1)$. **2.** (2; 3). **3.** 10 szoba; 28 diák. **4.** (3; 2); (6; 5).

5. $x \in \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ vagy } \frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\right\}$ és

$y \in \left\{\frac{\pi}{3} + 2l\pi \text{ vagy } \frac{2\pi}{3} + 2l\pi;\ l \in \mathbf{Z}\right\}$.

60. lecke: 1. 7; 8. **2. a)** $-\frac{1}{3}$. **b)** 0,5. **3.** 28,9; 8. **4. a)** 10. **b)** 25. **c)** 0,5. **5. a)** 1. **b)** $\approx 3{,}275$. **c)** 1. **d)** 7. **e)** 0,1. **f)** -2; 3. **g)** 16.

61. lecke: 1. a) 1 perc. **b)** 40°. **c)** 11 perc. **d)** 13°. **2. a)** 2,4 és -3. **b)** -7. **3. a)** $x \mapsto 3x + 2$. **b)** $x \mapsto -0{,}5x$. **c)** $x \mapsto 1{,}5x - 4$. **d)** $x \mapsto 2x + 6$. **e)** $x \mapsto 7 - 2x$. **4.** 0; 0 és 6; 3; 2 és 4. **5.** $x \mapsto x^2 + 6x + 8$. **6. b)** $M = \{-3; 1\}$. **d)** $]-3; 1[$.

62. lecke: 4. a) $M = \{-3; 0\}$. **b)** $M = [-3; 0]$. **5. a)** $M = \{1; -2\}$; **b)** $M = \{4; -0{,}5\}$. **6. a)** $[0; \infty[$. **b)** $[0; \infty[$. **c)** $]-\infty; 4]$. **7.** $[-6; -5[\cup]-5; 2]$.

63. lecke: 2. c) 0; 1; $\log_2 3$; 2. **d)** $2\sqrt{2}$. **4. a)** 0,5; 2. **b)** $]0{,}5; +\infty[$; $]0; 2[$. **c)** $]0{,}5; 2[$.

64. lecke: 4. a) 76 km. **b)** $\approx 7{,}1$ km.

65. lecke: 3. a) 0 V. **b)** 191 V. **c)** 325 V. **5.** 3.

66. lecke: 1. számtani: a_n és c_n, mértani: b_n. **2. a)** 7. **b)** 22. **c)** 7. **3. a)** $-0{,}5$. **b)** -120; 60; -30; 15; $-7{,}5$; 3,75; összeg: $-78{,}75$. **4. a)** 2. **b)** 4. **c)** 10 300. **d)** 12; 10. **e)** igen, 80., igen 400. **5.** 30. **6. a)** egy; 1536 és 0,25. **b)** kettő; 192 és 0,5, illetve -192 és $-0{,}5$.

67. lecke: 1. 9. **2.** 21,25 cm^2; 30 cm; $\approx 33{,}33\%$-a. **3.** 153,8%-a. **4.** $\approx 6{,}596 \cdot 10^{36}$. **5.** 1418,3. **6.** 21.

68. lecke: 1. a) 19,11 cm^2. **b)** 9,92 cm^2. **c)** 6,01 cm^2. **d)** 11,55 cm^2. **2. a)** 84 cm^2. **b)** 7 cm és 24 cm. **c)** 16,3° és 73,7°. **3. a)** 6-féle. **b)** 45,8°; 67,1°; 67,1° és 29,0 cm^2. **4. a)** 115°; 122°; 123°. **b)** 7,24 cm és 8,64 cm. **c)** 28,2 cm^2. **5. a)** 2,4 m. **b)** 2,8 m.

69. lecke: 1. hamis: *a)*, *b)*. **2. a)** 10 cm és 24 cm. **b)** 120 cm^2. **3. a)** 24. **b)** 82,1 cm, 533 cm^2. **c)** 252. **4.** 56,6 cm^2. **5.** $\sqrt{2} : 1$. **6.** 4 kör. A sugaruk: 2 cm; 4 cm; 5 cm; 7 cm. Középpontjuk: (4; 0), (2; 0), (7; 0), (5; 0). **7. a)** 16 cm. **b)** 56,1°. **c)** 203 cm^2.

70. lecke: 1. 17 cm vagy 31 cm. **2. a)** 60°; 300°. **b)** 29,3 cm^2 és 989 cm^2. **3. a)** 108 cm; 631 cm^2. **b)** 60°; 60° és 120°; 120°. **c)** 11,7 cm. **4.** 180 000 m^2. **5. d)** 45,2° és 134,8°. **e)** 9,23 cm. **6. a)** 2,63 cm és 3,75 cm. **b)** 4,93 cm^2. **c)** 16,5 cm^2. **d)** 2,54 cm^2.

71. lecke: 1. a) 18,3 cm. **b)** 13 és fél évig. **2. a)** felére, 50%-kal. **b)** negyedére, 75%-kal. **c)** 0,729-szeresére, 27,1%-kal. **d)** 1,331-szeresére, 33,1%-kal. **3.** 3360 m^2. **4. a)** 0,014 cm^3; 283 cm^2. **b)** 2,15.

72. lecke: 1. a) 14 cm; 35,4 cm; 35,4 cm; 48 cm; 61,3°; 61,3°, 118,7°; 118,7°. **c)** 54,1 dm^2; 25,7 dm^2. **2. a)** 15-öt. **b)** harmadrésze. **c)** 31:30. **3.** 24,7 l. **4. a)** 14; 24; 36. **b)** 52 dm^2. **c)** 27 dm^3.

73. lecke: 1. a) 10 cm. **b)** $5 \cdot \sqrt{2}$ cm $\approx 7{,}07$ cm. **c)** 0 cm.

3. a) $\sqrt{2}$. **b)** $\left(\frac{-\sqrt{3}-1}{2}; \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}; \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

c) $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD}$ és $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$. **4. a)** $(4; -3)$ és $(-2; 5)$. **b)** 5 és $\sqrt{29} \approx 5{,}39$. **c)** -23. **d)** 149°. **e)** 1; 1; 0; 25; 29. **5. a)** van. **b)** nincs. **6. a)** (5; 2) és (2, 1). **b)** $\mathbf{a} = (-3; -1)$. **7. a)** 22,7. Az oldalak: 5,657; 7,81 és 9,22. **b)** 57,5°; 84,8°; 37,7°. **c)** 22,0.

74. lecke: 1. 120°. **2.** $-\frac{\sqrt{3}}{4} \approx -0{,}433$. **3.** $\pm\frac{4}{5}$; $\pm\frac{4}{3}$; $\pm\frac{3}{4}$.

4. a) $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $-\frac{\pi}{3} + 2l\pi$; $(k, l \in \mathbf{Z})$.

b) $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$; $\frac{11\pi}{6} + 2l\pi$; $(k, l \in \mathbf{Z})$.

c) $\frac{\pi}{12} + k\pi$; $\frac{11\pi}{12} + l\pi$; $(k, l \in \mathbf{Z})$.

d) $\frac{\pi}{4} + k\pi$; $(k \in \mathbf{Z})$.

5. $\{-4{,}37; -1{,}91; 1{,}91; 4{,}37\}$.

6. $\left\{-2\pi; -\pi; 0; \pi; 2\pi; -\frac{5\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\}$.

7. $\left\{k\pi; \pm\frac{\pi}{3} + 2l\pi; k, l \in \mathbf{Z}\right\}$.

75. lecke: 1. a) 2,44 cm; 4,34 cm; 2,44 cm. **b)** 52,5°. **c)** $-6{,}45$; $-5{,}95$. **2. a)** (2,5; 4,5). **b)** (3; 6). **c)** 5,10; 4,47; 9,06; 3,16. **3. a)** 7,62. **b)** (0,5; 3,5). **c)** $\left(\frac{5}{3}; 3\right)$. **d)** $\mathbf{v} = (7; -3)$. **e)** $(21; -9)$; $(2{,}8; -1{,}2)$; $(0; 0)$; $\left(-\frac{7}{8}; \frac{3}{8}\right)$. **f)** (3; 7). **g)** (4; 2); $(-3; 5)$; $(7; -3)$; $(-7; 3)$; (0,5; 3,5); (0,5; 3,5). **4. a)** 5. **b)** (4; 3) vagy $(-4; -3)$. **5. a)** $g(x) = 3x + 11$. **b)** $g(x) = x^2 + 4x + 9$. **c)** $g(x) = \sin(x + 2) + 5$. **6. a)** $(1; -3)$. **b)** (2; 6).

76. lecke: 1. b) (3; 0). **c)** $\left(2; \frac{5}{3}\right)$. **d)** $\overrightarrow{SM} = 2 \cdot \overrightarrow{FS}$; $\overrightarrow{FS} = \left(-1; \frac{5}{3}\right)$; $\overrightarrow{SM} = \left(-2; \frac{10}{3}\right)$. **2.** (5; 9). **3. a)** $(-2; -11)$; $(22; -3)$. **b)** 22,8; 33,1 és 25,3. **c)** 43,5°. **d)** 288.

77. lecke: 1. például: (4; 1); $(1; -1)$; $(2; -3{,}6)$; (3; 1), illetve $(1; -4)$, (1; 1); (3,6; 2), $(1; -3)$. **2. a)** $y = 2x - 5$. **b)** $y = -0{,}5x + 2{,}5$. **c)** $x - 3y = 0$. **3.** $(-7, 2)$.

4. a) $3x + y = -4$. **b)** $(-1{,}5; 0{,}5)$. **c)** $(0; -4)$. **d)** $x - 3y = 2$.

5. a) $x - y = 2$. **b)** $2x - y = 9$. **c)** $x + 4y = 1$. **d)** $\left(\frac{37}{9}; -\frac{7}{9}\right)$. **e)** $2x - y = 3$. **f)** $x + 4y = 10$. **g)** $\left(\frac{22}{9}; \frac{17}{9}\right)$.

78. lecke: 1. a) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 20$. **b)** $(-3; 0)$ és $(5; 0)$. **2. a)** $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+2)^2 = 31{,}25$. **3.** 6,5 egység sugarú kört; 1 pontot; üres halmazt. **4. c)** $3x - 4y = -30$. **d)** $(-10; 0)$. **e)** 15. **5.** Kettő: $(-3; 2)$ és $(-3; -8)$.