Korom Pál

Matematika

gyakorló feladatlapok

11

OFI

A kiadvány 2018. 10. 26-tól tankönyvi engedélyt kapott a TKV/3482-9/2018. számú határozattal.

A tankönyv megfelel az 51/2012. (XII. 21.) EMMI-rendelet:
3. sz. melléklet: Kerettanterv a gimnáziumok 9–12. évfolyama számára 3.2.04.;
4. sz. melléklet: Kerettanterv a gimnáziumok 7–12. évfolyama számára 4.2.04.;
5. sz. melléklet: Kerettanterv a gimnáziumok 5–12. évfolyama számára 5.2.04.;
14. sz. melléklet: Kerettanterv a szakgimnáziumok 9–12. évfolyama számára
megnevezésű kerettanterv előírásainak és az érettségi vizsga
követelményeinek [40/2002. (V. 24.)].

Lektorok: Füleki Lászlóné, Beck Zsuzsa

Az ábrákat készítette: dr. Fried Katalin

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban kirendelt szakértők:
dr. Várady Ferenc, Zarubay Attila

ISBN 978-963-19-6458-5

Eszterházy Károly Egyetem
3300 Eger, Eszterházy tér 1.
Tel.: (+36-1) 460-1873
Fax: (+36-1) 460-1822
E-mail: kiado@ofi.hu

A kiadásért felel: dr. Liptai Kálmán rektor
Raktári szám: NT-16302/F
Felelős szerkesztő: Tóthné Szalontay Anna
Műszakiiroda-vezető: Horváth Zoltán Ákos
Műszaki szerkesztő: Orlai Márton
Grafikai szerkesztő: Görög Istvánné
Terjedelem: 15,45 (A/5) ív
Tömeg: 310 gramm
1. kiadás, 2019

Készült a Gyomai Kner Nyomda Zrt.-ben, 2019-ben
Magyar Könyvkiadók és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja

Az igazgatóság elnöke Balla László
Vezérigazgató Erdős Tamás
Telefon: 66/887-400

Tartalom

Bevezető

A feladatlap-gyűjtemény elsősorban a középiskolai matematika tananyag gyakorlására készült. A tematikus sorrendben felépülő feladatlapok segítik az órai munkát, a szakköri, illetve korrepetáló foglalkozást, az önálló gyakorlást vagy a középszintű matematika érettségire való felkészülést.

A feladatlapok a 11. évfolyamos kerettanterv tananyagát követik.

A feladatlapok feldolgozását két fontos egység segíti. Az első egységcsoport a minden nagyobb téma előtt a témához kapcsolódó elméleti emlékeztető. Ezek a részek az adott témához tartozó definíciókat, tételeket, illetve a fontosabb eljárásokat, módszereket tartalmazzák. A másik alapvető egység pedig a feladatlap-gyűjtemény végén található megoldások, amelyek az eredményeken túl az azokhoz vezető fontosabb lépéseket is magukban foglalják.

A feladatlap-gyűjtemény készítésekor elsődleges cél volt, hogy lehetőleg minden feladatot a feladatlap oldalain oldjon meg a tanuló.

1. feladatlap

Másodfokúra visszavezethető egyenletek

EMLÉKEZTETŐ

másodfokú egyenlet megoldóképlete: Az $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ alakú másodfokú egyenlet megoldóképlete:

$$x_{1;2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

a megoldások alakjai: A végtelen számú tizedesjegyre vezető változó értékét megadhatjuk pontosan és kerekítve is.

– **pontos érték:** A végtelen szakaszos tizedes törtet egyszerűsített tört alakban $\left(0,\dot{3}=\frac{1}{3}\right)$, az irracionális számot pedig a megfelelő művelet megtartásával $\left(1,4142\ldots=\sqrt{2};\ 0,2071...=\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$ írjuk le.

– **kerekített érték:** Nagy pontosságú számoló eszköz, például számológép, segítségével kiszámoljuk az eredményt, majd a megadott számú értékes jegyig kerekítjük a kapott értéket. Például $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ kerekített értéke három értékes jegy esetén 0,207; de $\sqrt{1200}=34,6410...$ kerekített értéke három értékes jegy esetén 34,6. (Nem 34,641, mert ez a kerekítés öt értékes számjegyet tartalmaz. Az értékes jegyek és a tizedesjegyek száma nem feltétlenül egyezik meg.)

$ax^{2n}+bx^n+c=0$ **alakú egyenlet megoldása:** Az $y=x^n$ új változót vezetjük be, és az $ay^2+by+c=0$ másodfokú egyenlet már megoldható. Amennyiben az y változónak léteznek megoldásai $(y_1;y_2)$, akkor az $y_1=x^n$, $y_2=x^n$ egyenleteket még meg kell oldani. Például az $x^4-3x^2+2=0$ egyenlet az $y=x^2$ új változó bevezetésével $y^2-3y+2=0$ másodfokú egyenletté alakítható át, amelynek a megoldásai: $y_1=1$ és $y_2=2$. Az $x^2=y_1=1$ egyenlet megoldásai: $x_{1;2}=\pm 1$. Az $x^2=y_2=2$ egyenlet megoldásai: $x_{3;4}=\pm\sqrt{2}$. Így az eredeti egyenlet megoldásai a valós számhalmazon: $-\sqrt{2};\ -1;\ 1;\ \sqrt{2}$.

másodfokúnál magasabb fokú egyenlet megoldása: Általános megoldóképlete a harmadfokú és a negyedfokú egyenletnek van, de ezeket a megoldóképleteket a középiskolában nem tanuljuk. A másodfokú egyenleteknél magasabb fokú egyenletek megoldásainál a feladatok jellegzetességeit „kell" észrevenni, például bizonyos tagok hiányoznak ***(hiányos egyenlet)***, vagy az együtthatók nagyon speciálisak, valamely azonosságra emlékeztetnek, vagy kiemelhetők. A megoldási „trükkök" jelentős részének az az alapja, hogy az egyenletet alacsonyabb fokú egyenletekre (például első- vagy másodfokúra) vezetjük vissza. A továbbiakban csak néhány módszert tekintünk át.

$x^n=p$ **alakú egyenlet megoldása:** A megoldása páratlan n esetén, p értékétől függetlenül $x=\sqrt[n]{a}$, páros n esetén, amennyiben $p\geq 0$, $x_{1;2}=\pm\sqrt[n]{p}$.

új változó bevezetése: Sok esetben a változó bonyolultabb kifejezése helyett érdemes új változót bevezetni, majd az új változó megoldásai után kiszámolni az eredeti változó értékeit. Például $(x^2+3x-2)\cdot(x^2+3x)=8$ egyenletnél bevezetjük az $y=x^2+3x-2$ új változót. Ekkor az $y\cdot(y+2)=8$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek megoldásai $y_1=-4$; $y_2=2$. A kapott értékeket behelyettesítve az új változó helyére, az $-4=x^2+3x-2$ és a $2=x^2+3x-2$ egyenletekhez jutunk, amelyeknek megoldásai: $x=-2;\ -1;\ 1;\ -4$.

az egyenlet nullára redukálása és szorzattá alakítása: Sok esetben érdemes az egyenletet ***nullára redukálni*** (ekkor az egyenlet egyik oldalán csak a 0 szerepel), mert a másik oldal szorzattá alakításakor a tényezők az eredeti egyenleteknél kisebb fokszámú kifejezések lesznek, és figyelembe véve, hogy egy szorzat akkor és csak akkor lehet 0, ha valamelyik tényezője nulla, ezek a tényezők kisebb fokszámú egyenletek lesznek. Például az $x^3+3x^2-4x-12=0$ egyenletből csoportosítva lehet kiemelni $x^2(x+3)-4(x+3)=0$. További kiemelés után az egyenlet alakja $(x^2-4)\cdot(x+3)=(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x+3)=0$. Az $x-2=0$, $x+2=0$ és $x+3=0$ egyenletek megoldásai $x_1=2$; $x_2=-2$; $x_3=-3$.

FELADATOK

1.1. Számold ki négy értékes számjegy pontossággal a következő egyenletek megoldásait!

a) $x^3 = -1{,}728$;

b) $x^3 = 3$;

c) $b^4 = 4$;

d) $(3y)^4 = 104$;

e) $x^5 = \sqrt[3]{34} \cdot \sqrt[4]{102}$;

f) $a^6 = 10\sqrt{3} + 2$.

1.2. Oldd meg az alábbi egyenleteket a racionális számok halmazán!

a) $2x^4 - 23x^2 - 144 = 0$;

b) $8x^6 - 217x^3 + 27 = 0$;

c) $x^8 - 25x^4 + 144 = 0$;

d) $10x^{10}-15x^{5}-25=0.$

1.3. Oldd meg az alábbi negyedfokú egyenleteket! Hány megoldást találsz?

a) $x^4-25x^2=0;$

b) $x^4-29x^2+100=0;$

c) $x^4-21x^2-100=0;$

d) $x^4+4x^2=0;$

e) $x^4+29x^2+100=0.$

1.4. Új változó bevezetésével oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\left(x^2+9x+15\right)\left(x^2+9x+17\right)=3;$

b) $\left(x^2 - x - 3\right)\left(x^2 - x - 5\right) = 3;$

c) $\dfrac{15}{x^2 + 3x + 5} + x^2 + 3x + 5 = 8;$

d) $\dfrac{105}{2x^2 + 2x + 3} + 2x^2 + 2x + 3 = 22.$

1.5. Szorzattá alakítással oldd meg a következő egyenleteket!

a) $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0;$

b) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0;$

c) $x^4 - 4x^2 - x^2 + 4 = 0;$

d) $x^4 - 16x^2 - 9x^2 + 144 = 0.$

1.6. Erzsi egy egynél nagyobb irracionális számra gondolt. Ha a szám négyzetéhez hozzáadunk egyet és négyzetre emeljük, akkor a gondolt szám négyzetének négy és félszeresét kapjuk. Melyik számra gondolt Erzsi?

1.7. *a)* Melyek azok a számok, amelyeknek a harmadik hatványa megegyezik az eredeti számmal?

b) Melyek azok a számok, amelyeknek a negyedik hatványa megegyezik az eredeti számmal?

c) Melyek azok a számok, amelyeknek a negyedik hatványa egyenlő a második hatványuk kétszeresével?

2. feladatlap

Másodfokú egyenletrendszerek

EMLÉKEZTETŐ

másodfokú egyenletrendszer megoldása: A másodfokú egyenletrendszer megoldásánál sok esetben használhatjuk az elsőfokú egyenletrendszer megoldásánál használható módszereket: az egyik ismeretlen kifejezését és a másik egyenletbe való behelyettesítését, vagy ha lehetőség van rá, az egyenlő együtthatók módszerét.

másodfokú egyenletrendszer megoldása új ismeretlenek bevezetésével: Sok esetben a változók bizonyos kifejezései helyett új ismeretleneket vezethetünk be, és az így kapott kétismeretlenes egyenletrendszer már megoldható, és az új változók értékeinek ismeretében már az eredeti egyenletrendszer megoldásai is megadhatók. Például $\begin{cases} 3(x+y)-xy=7 \\ -(x+y)+2xy=31 \end{cases}$. Az új ismeretlenek $u=x+y,\ v=x\cdot y$ bevezetése után az egyenletrendszer $\begin{cases} 3u-v=7 \\ -u+2v=31 \end{cases}$ alakú lett. Az egyenletrendszer megoldása $u=9=x+y$, $v=20=x\cdot y$. Az új egyenletrendszert például $y=9-x$ behelyettesítéssel oldhatjuk meg. Ekkor a megoldáspárok: $x_1=5$, $y_1=4$; $x_2=5$, $y_2=4$.

FELADATOK

2.1. Oldd meg a következő egyenletrendszereket a valós számok halmazán!

a) $\begin{cases} x+y=6 \\ xy=8 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x-y=-3 \\ xy=4 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x+2y=7 \\ xy=4 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2x-3y=15 \\ xy=-6 \end{cases}$.

2.2. Oldd meg a következő egyenletrendszereket a valós számok halmazán!

a) $\begin{cases} x^2+y^2=50 \\ x+y=8 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x-3y+xy=11 \\ x-y=9 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 + 2y = 43 \\ 2x - y = 13 \end{cases}.$

2.3. Új változók bevezetésével oldd meg következő egyenletrendszereket! (Az eredmény nem csak egész vagy racionális szám lehet!)

a) $\begin{cases} (x+y)^2 + 3xy = 79 \\ (x+y)^2 - 2xy = 29 \end{cases};$

b) $\begin{cases} 5(x+y) - xy = 20 \\ 2(x+y)^2 - (x+y) + xy = 556 \end{cases};$

c) $\begin{cases} x + y + xy = 9 \\ (x+y)xy = 20{,}25 \end{cases};$

d) $\begin{cases} (x-y)^2 - xy = 4 \\ 2(x-y)^2 + 3xy = 68 \end{cases}.$

2.4. Egy derékszögű háromszög területe 58,8 cm^2, átfogója 18,2 cm. Mekkora a két befogója?

3. feladatlap

Racionális kitevőjű hatványok

EMLÉKEZTETŐ

a hatványozásról tanultak: Az a^n ($a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$) hatványon $n \geq 2$ esetén olyan n tényezős szorzatot értünk, amelynek minden tényezője a. Megállapodás szerint $a^1 = a$, valamint $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$. Negatív kitevő esetén $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$).
a hatványozás azonosságai: $a,\ b \in \mathbb{R};\ m,\ n \in \mathbb{N}^+$.

1. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$; 2. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, $b \neq 0$; 3. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; 4. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a \neq 0$; 5. $(a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m$.

$a^{\frac{1}{n}}$ **racionális kitevőjű hatvány:** Az $a^{\frac{1}{n}}$ $(n > 1)$ jelenti azt a pozitív számot, amelynek n-edik hatványa a nemnegatív szám, vagyis $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$. Mivel az $a^{\frac{1}{n}}$ meghatározása pontosan megegyezik a $\sqrt[n]{a}$ meghatározásával, így elmondhatjuk, hogy $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, ahol a bal oldali kifejezést ***hatványalaknak***, a jobb oldali kifejezést pedig ***gyökalaknak*** nevezzük.

racionális kitevőjű hatvány: Az $a^{\frac{p}{q}}$ $\left(a > 0;\ p \in \mathbb{Z};\ q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right)$ jelenti azt a pozitív számot, amelynek q-adik hatványa a^p nemnegatív szám, vagyis $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^p$. A gyakorlatban jól használható azonosság az $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ $\left(a > 0;\ p \in \mathbb{Z};\ q \in \mathbb{N} \text{ és } q \geq 2\right)$, ahol a bal oldali kifejezést ***hatványalaknak,*** a jobb oldali kifejezést ***gyökalaknak*** nevezzük.

FELADATOK

3.1. Számítsd ki a hatványok pontos értékét!

a) $16^{\frac{1}{4}} =$ *b)* $27^{\frac{1}{3}} =$ *c)* $625^{\frac{1}{4}} =$

d) $0{,}125^{\frac{1}{3}} =$ *e)* $0{,}00001^{\frac{1}{5}} =$ *f)* $0{,}0625^{\frac{1}{4}} =$

3.2. Számítsd ki a hatványok pontos értékét!

a) $32^{-\frac{1}{5}} =$ *b)* $125^{-\frac{2}{3}} =$

c) $64^{-\frac{5}{6}} =$ *d)* $\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} =$

e) $\left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}} =$ *f)* $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{3}{4}} =$

3.3. A gyökalakban megadott kifejezéseket alakítsd át hatványalakúvá! ($a \geq 0;\ b > 0.$)

a) $\sqrt[3]{5^2} =$ *b)* $\sqrt[4]{5} =$

c) $\sqrt{5^3} =$

d) $\sqrt[5]{\left(\frac{5}{7}\right)^2} =$

e) $\sqrt[12]{a^5} =$

f) $\sqrt[11]{\left(\frac{a}{b}\right)^3} =$

3.4. A gyökalakban megadott kifejezéseket alakítsd át hatványalakúvá úgy, hogy a kitevőben ne legyen negatív szám! ($a \geq 0$; $b > 0$.)

a) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{5}\right)^{-4}} =$

b) $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}} =$

c) $\sqrt[5]{\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}} =$

3.5. A hatványalakban megadott kifejezéseket alakítsd át gyökalakúvá! ($a \geq 0$; $b > 0$.)

a) $7^{\frac{3}{4}} =$

b) $5^{\frac{1}{3}} =$

c) $a^{\frac{5}{2}} =$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{5}} =$

e) $0{,}1^{\frac{1}{2}} =$

f) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{4}} =$

3.6. A hatványalakban megadott kifejezéseket alakítsd át gyökalakúvá úgy, hogy a kitevőben ne legyen negatív szám! ($a \geq 0$; $b > 0$.)

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{5}} =$

b) $\left(\frac{5}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} =$

c) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{2}} =$

3.7. A hatványozás azonosságainak alkalmazásával hozd egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket, majd add meg őket gyökalakban!

a) $3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{5}{4}} =$

b) $4^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{3}{4}} \cdot 4^{\frac{5}{12}} =$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{5}{4}} =$

d) $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{3}{5}} =$

e) $3^{\frac{3}{5}} : 3^{\frac{1}{4}} =$

f) $5^{\frac{2}{3}} : 5^{\frac{1}{2}} =$

g) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{5}} : \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} =$

h) $a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{2}{5}} =$

3.8. A hatványozás azonosságainak alkalmazásával hozd egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket, majd add meg őket gyökalakban!

a) $\left(\sqrt[4]{10^3} \cdot 10^{\frac{2}{5}}\right)^3 =$

b) $\left(\frac{\sqrt{2} \cdot 2^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[4]{2^3}}\right)^2 =$

c) $\left(\frac{a^{\frac{3}{10}} \cdot \sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[4]{a}}\right)^4 =$

d) $\sqrt{a^{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt[3]{a^{\frac{3}{5}}} =$

e) $\sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[5]{2^{\frac{1}{6}}}}} =$

f) $\frac{a \cdot \sqrt[3]{a\sqrt[4]{a^3}}}{\sqrt[5]{a^2}} =$

4. feladatlap

Exponenciális függvények

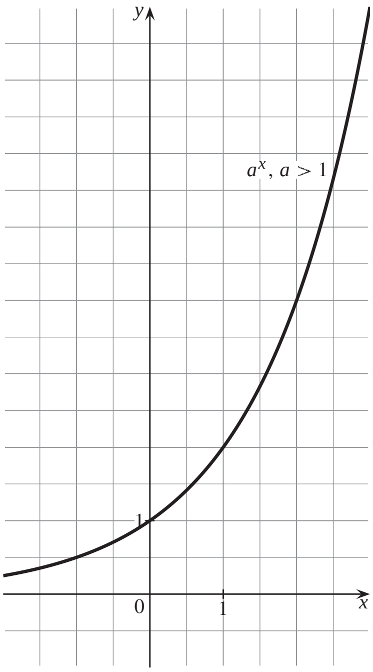
EMLÉKEZTETŐ

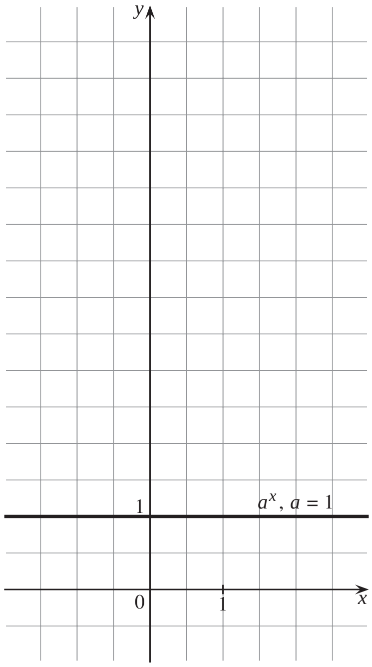
***a* alapú exponenciális függvény:** Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto a^x \quad (a > 0)$ függvényt a alapú exponenciális függvénynek nevezzük. Az alaptól függően a függvénynek három típusa lehetséges:

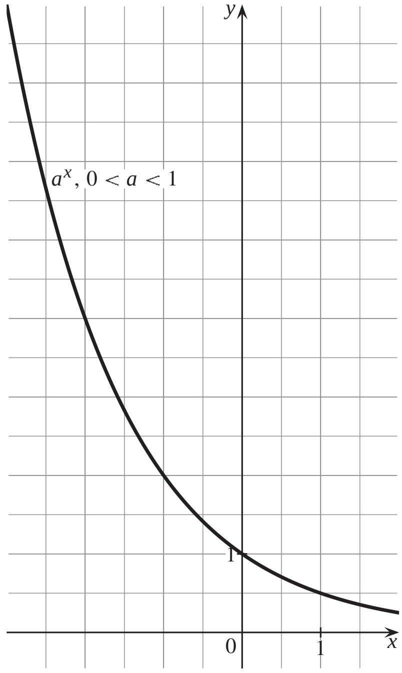
1. $a > 1$ esetén az exponenciális függvény szigorúan monoton növekedő;

2. $a = 1$ esetén az exponenciális függvény az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$ konstans függvény;

3. $0 < a < 1$ esetén az exponenciális függvény szigorúan monoton csökken.







FELADATOK

4.1. A függvénytranszformációkkal kapcsolatos ismereteid segítségével ábrázold az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2^{x+2} - 1$ függvényt, és a grafikon alapján válaszolj a következő kérdésekre!

a) Mi az értékkészlete a függvénynek?

b) Mi a zérushelye a függvénynek?

c) Hol metszi a függvény az y tengelyt?

d) Pontja-e a grafikonnak a $(-3; -0{,}5)$ koordinátájú pont?

4.2. A függvénytranszformációkkal kapcsolatos ismereteid segítségével ábrázold az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x \mapsto 1{,}5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$ függvényt, és a grafikon alapján válaszolj a következő kérdésekre!

a) Mi az értékkészlete a függvénynek?

b) Monotonitás szempontjából milyen a függvény?

c) Milyen függvényérték tartozik az $x = 2$ helyhez?

d) Hol veszi fel a függvény a 2 értéket?

4.3. A függvénytranszformációkkal kapcsolatos ismereteid segítségével ábrázold az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x \mapsto -4^{\frac{1}{2}x} + 2$ függvényt, és a grafikon alapján válaszolj a következő kérdésekre!

a) Mi az értékkészlete a függvénynek?

b) Monotonitás szempontjából milyen a függvény?

c) Milyen tartományban pozitív a függvény?

d) Az $x = 2$ helyen milyen értéket vesz fel a függvény?

4.4. A függvénytranszformációkkal kapcsolatos ismereteid segítségével ábrázold az

$f: [-2;1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2} \cdot 4^{x+1} - 4$ függvényt, és a grafikon alapján válaszolj a következő kérdésekre!

a) Mi az értékkészlete a függvénynek?

b) Az alábbi pontok közül melyek illeszkednek a grafikonra?

$A(0{,}5;0)$;

$B(0;2)$;

$C(-0{,}5;-3)$;

$D(-1{,}5;-3{,}25)$.

4.5. A függvénytranszformációkkal kapcsolatos ismereteid segítségével ábrázold és jellemezd az

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^{x} - 1$ függvényt!

Értelmezési tartomány:

Értékkészlet:

Zérushely:

Növekedés:

Csökkenés:

Szélsőértékek:

Páros:

Páratlan:

Periódus:

4.6. Adott a függvény paraméteres alakja és a grafikonjának egy pontja. Számítsd ki a függvény paraméterét, és ábrázold a függvényt!

a) $f(x) = a \cdot 2^x + 1$ és $P(0;3)$;

b) $g(x) = 2^{x+b} - 1$ és $Q(1;0)$;

c) $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + c$ és $R(2;0)$.

5. feladatlap

Logaritmus fogalma

EMLÉKEZTETŐ

b pozitív szám a alapú logaritmusa: A b pozitív szám a ($a > 0$ és $a \neq 1$) alapú logaritmusának nevezzük azt a kitevőt, amelyre az a alapot emelve a b számot kapjuk. Például a $\log_2 3$ (ejtsd 2-es alapú logaritmus 3) jelenti azt a kitevőt, amelyre 2-t emelve 3-at kapunk, vagyis $2^{\log_2 3} = 3$.

10-es alapú logaritmus: Mivel az általunk használt számrendszer alapja 10, ezért a 10-es alapú logaritmust ($\log_{10} b$) megkülönböztetett módon, $\lg b$ -vel jelöljük. Például $\lg 2$; $\lg 0{,}6$.

a alapú hatvány a alapú logaritmusa: Az a^n hatvány a alapú logaritmusa pont a hatvány kitevője (n), mert a logaritmus definíciója alapján a-t n-re kell emelni, hogy a^n-t kapjunk. $\log_a a^n = n$. Például $\log_5 5^4 = 4$, mert 5-öt a 4. hatványra kell emelni, hogy 5^4-t kapjunk. $\log_2 32 = 5$, mert $2^5 = 32$.

az a szám a alapú logaritmusa: $\log_a a = 1$. Az a szám a alapú logaritmusa 1, mert $a^1 = a$.

az 1 tetszőleges alapú logaritmusa: $\log_a 1 = 0$. Az 1-nek akármilyen alapú logaritmusát vesszük, akkor 0-t kapunk, mert bármely pozitív szám 0. hatványa 1. Például $\log_3 1 = 0$, $\lg 1 = 0$.

FELADATOK

5.1. A logaritmus fogalma alapján add meg a következő kifejezések pontos értékét!

a) $2^{\log_2 5} =$

b) $10^{\lg 6} =$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 7} =$

d) $9^{\log_9 10} =$

e) $10^{\lg\frac{5}{3}} =$

f) $\left(\frac{10}{7}\right)^{\log_{\frac{10}{7}}\frac{7}{10}} =$

5.2. Határozd meg a következő logaritmusokat!

a) $\log_2 8 =$

b) $\log_3 9 =$

c) $\log_5 125 =$

d) $\log_2 2 =$

e) $\log_3 3 =$

f) $\log_5 5 =$

g) $\log_2 16 =$

h) $\log_3 1 =$

i) $\log_5 1 =$

5.3. Határozd meg a következő logaritmusokat!

a) $\log_2 \frac{1}{2} =$

b) $\log_3 \frac{1}{9} =$

c) $\log_5 \frac{1}{125} =$

d) $\log_2 0{,}25 =$

e) $\log_3 \frac{1}{27} =$

f) $\log_5 0{,}2 =$

g) $\log_2 0{,}125 =$

h) $\log_3 \frac{1}{81} =$

i) $\log_5 0{,}04 =$

5.4. Számítsd ki a következő kifejezésék pontos értékét!

a) $\lg 100 =$

b) $\lg 10\,000 =$

c) $\lg 0{,}01 =$

d) $\lg 0{,}000\,01 =$

e) $\lg(0{,}01\cdot 100) =$

f) $\lg\sqrt{0{,}01} =$

5.5. Határozd meg a következő logaritmusokat! ($a,\ b,\ c,\ d,\ m,\ n > 0,\ \ a \neq 1,\ \ b \neq 1,\ \ c \neq 1,\ \ d \neq 1.$)

a) $\log_2 2^n =$

b) $\log_3 3^m =$

c) $\log_a a^3 =$

d) $\log_b b^{-1} =$

e) $\log_c c^{\frac{1}{2}} =$

f) $\log_d d^{-\frac{3}{2}} =$

5.6. Számítsd ki a következő logaritmusos kifejezések pontos értékét! ($a > 0,\ \ a \neq 1.$)

a) $\log_2 \dfrac{1}{2^6} =$

b) $\lg \dfrac{1}{10^{12}} =$

c) $\log_2 \sqrt{2} =$

d) $\lg \sqrt[3]{10^2} =$

e) $\log_2 \dfrac{1}{\sqrt[4]{2^5}} =$

f) $\lg \dfrac{1}{\sqrt[4]{10^3}} =$

g) $\log_a \sqrt[12]{a^{11}} =$

h) $\log_a \dfrac{1}{\sqrt[9]{a^8}} =$

5.7. Oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán! ($x > 0.$)

a) $\log_2 x = 7;$

$x =$

b) $\log_{12} x = 2;$

$x =$

c) $\lg x = 4;$

$x =$

d) $\log_2 x = -1;$

$x =$

e) $\log_a x = 1$;

$x =$

f) $\log_a x = 3$;

$x =$

g) $\log_5 x = \frac{1}{2}$;

$x =$

h) $\log_5 x = -\frac{3}{4}$;

$x =$

i) $\lg x = -\frac{5}{3}$.

$x =$

5.8. Oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán! ($x > 0$, $x \neq 1$.)

a) $\log_x 64 = 6$;

$x =$

b) $\log_x 64 = 3$;

$x =$

c) $\log_x 64 = 2$;

$x =$

d) $\log_x 64 = 1$;

$x =$

e) $\log_x 625 = 4$;

$x =$

f) $\log_x 625 = 2$;

$x =$

g) $\log_x \frac{1}{2} = -1$;

$x =$

h) $\log_x \frac{1}{4} = -2$;

$x =$

i) $\log_x \frac{1}{9} = -2.$

$x =$

5.9. Számítsd ki a logaritmus definíciója és a hatványozás azonosságainak segítségével a következő kifejezések pontos értékét! $(x > 0,\quad x \neq 1.)$

a) $2^{2+\log_2 5} =$

b) $5^{1+\log_5 6} =$

c) $5 \cdot 2^{3-\log_2 5} =$

d) $7^{1-\log_7 3} =$

e) $5^{2\cdot\log_5 3} =$

f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3\cdot\log_{\frac{1}{2}} 5} =$

5.10. Számológép segítségével határozd meg a következő logaritmusok közelítő értékét három értékes jegy pontossággal!

a) $\lg 2{,}11 =$

b) $\lg 11{,}5 =$

c) $\lg 4{,}63 =$

d) $\lg 0{,}276 =$

e) $\lg 0{,}25 =$

f) $\lg 0{,}3 =$

5.11. Számológép segítségével oldd meg a következő egyenleteket három értékes jegy pontossággal!

a) $\lg x = 0{,}52;$

$x =$

b) $\lg x = 2{,}6;$

$x =$

c) $\lg x = 3{,}23;$

$x =$

d) $\lg x = -0{,}34;$

$x =$

e) $\lg x = -1{,}67;$

$x =$

f) $\lg x = -1{,}88.$

$x =$

6. feladatlap

Logaritmus azonosságai

EMLÉKEZTETŐ

szorzat logaritmusa: Szorzat logaritmusa a tényezők logaritmusának összegével egyenlő. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$, ahol $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ és $a \neq 1$. Például $\lg 123\,000 = \lg 1{,}23 \cdot 10^5 = \lg 1{,}23 + \lg 10^5 = \lg 1{,}23 + 5$.

tört logaritmusa: Tört logaritmusát megkapjuk, ha a számláló logaritmusából a nevező logaritmusát levonjuk. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, ahol $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ és $a \neq 1$. Például $\lg 0{,}000\,123 = \lg \frac{1{,}23}{10^4} = \lg 1{,}23 - \lg 10^4 = \lg 1{,}23 - 4$.

hatvány logaritmusa: Hatvány logaritmusa egyenlő a kitevő és a hatványalap logaritmusának szorzatával. $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$, ahol $n \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $a > 0$ és $a \neq 1$. Például $\lg 2^5 = 5 \cdot \lg 2$.

áttérés új logaritmusalapra: Egy szám új alapú logaritmusának és a régi alap új alapú logaritmusának hányadosa egyenlő a szám régi alapú logaritmusával. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, ahol $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$. Például $\log_2 5 = \frac{\lg 5}{\lg 2}$.

nem tízes alapú logaritmusok közelítő értékének kiszámítása: Tízes alapú logaritmusra való áttéréssel számológéppel kiszámíthatjuk a nem tízes alapú kifejezések közelítő értékét. Például $\log_2 5 = \frac{\lg 5}{\lg 2} = \frac{0{,}699}{0{,}301} = 2{,}322$.

FELADATOK

6.1. Számítsd ki a következő kifejezések pontos értékét!

a) $\lg 8 + \lg 125 =$

b) $\log_{12} 3 + \log_{12} 6 + \log_{12} 8 =$

c) $\log_5 35 + \log_5 75 - \log_5 21 =$

d) $\log_4 60 - \log_4 3 - \log_4 5 =$

6.2. Számítsd ki a következő kifejezések pontos értékét! $(x, a > 0)$.

a) $\lg(30x) + \lg\frac{100}{3x} =$

b) $\log_2(2a) + \log_2\frac{4}{a} =$

c) $\log_5(25x) - \log_5\frac{x}{5} =$

d) $\log_4\frac{a}{8} - \log_4\frac{a}{2} =$

6.3. Számítsd ki a következő kifejezések pontos értékét!

a) $\log_6 2^5 + \log_6 3^5 =$

b) $\log_{12} 3^3 + \log_{12} 2^6 =$

c) $\log_5 1000 - \log_5 2^3 =$

d) $\log_4 8^6 - \log_4 2^6 =$

6.4. Határozd meg *x* értékét!

a) $\lg x = \frac{1}{3}\lg 27 - \frac{2}{3}\lg 8 + 2\lg 5;$

$x =$

b) $\lg x = \frac{1}{2}\lg 6 + \frac{1}{2}\lg 8 - \lg\sqrt{3};$

$x =$

c) $\log_3 x = 3\log_3 5\sqrt[3]{2} - 2\log_3 5;$

$x =$

d) $\lg x = 3\lg 2 - 2\lg 3 + \frac{1}{2}\lg 36.$

$x =$

6.5. Számítsd ki a következő kifejezések pontos értékét!

a) $5^{\log_5 6 - \log_5 3} =$

b) $11^{\log_{11} 42 + \log_{11} 21 - \log_{11} 1764} =$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}} 5{,}4 - \log_{\frac{2}{3}} 0{,}6 + \log_{\frac{2}{3}} 0{,}05} =$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2\log_{\frac{3}{4}} 5 - \log_{\frac{3}{4}} 2 - \log_{\frac{3}{4}} \frac{5}{4}} =$

6.6. Számológép segítségével számítsd ki a következő kifejezések közelítő értékét három értékes jegy pontossággal!

a) $\log_2 6 =$

b) $\log_{0,5} 5{,}6 =$

c) $\log_{\frac{4}{3}} \frac{9}{11} =$

d) $\log_{12} 0{,}012 =$

6.7. Számológép segítsége nélkül számítsd ki a következő kifejezések közelítő értékét, ha tudjuk, hogy $\log_2 3 = 1{,}585$!

a) $\log_2 6 =$

b) $\log_2 9 =$

c) $\log_2 12 =$

d) $\log_2 18 =$

7. feladatlap

Logaritmusfüggvény

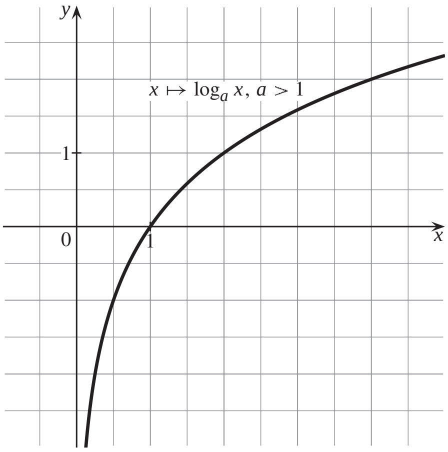
EMLÉKEZTETŐ

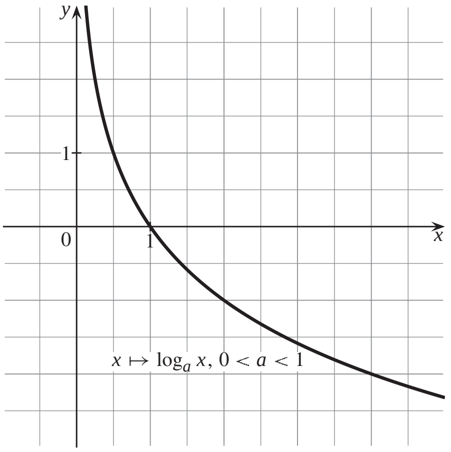
logaritmusfüggvény: Az $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) függvényt a alapú logaritmusfüggvénynek nevezzük.

Az alaptól függően a függvénynek két típusa lehetséges:

1. $a > 1$ esetén a logaritmusfüggvény szigorúan monoton nö;

2. $0 < a < 1$ esetén az logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökken.





a logaritmusfüggvény értelmezési tartománya: A logaritmusfüggvényben lévő kifejezés csak pozitív lehet. A függvény értelmezési tartományát ezen feltétel alapján határozhatjuk meg. Például $f(x) = \log_2(2x-3)$ szögfüggvényben lévő kifejezés pozitív $(2x-3>0)$, ha $x > 1{,}5$.

FELADATOK

7.1. Mely valós *x*-ekre értelmezhetők a következő kifejezések:

a) $\lg 2x$;

b) $\lg(2x+4{,}5)$;

c) $\log_3(-x)$;

d) $\lg x^2$;

e) $\log_2(1-x)$;

f) $\log_{0,5}(-x)^2$;

g) $\lg\left(x^2-4x+3\right)$;

h) $\lg\left(x^2+3x+2\right)$.

7.2. Ábrázold közös koordináta-rendszerben az $\mathbb{R}^+$ halmazon értelmezett alábbi függvényeket!

a) $x \mapsto \log_2 x$;

b) $x \mapsto \log_3 x$;

c) $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x$;

d) $x \mapsto \log_{\frac{1}{3}} x$.

7.3. A függvénytranszformációkkal kapcsolatos ismereteid segítségével ábrázold és jellemezd az $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \log_2 x - 1$ függvényt!

Értelmezési tartomány:

Értékkészlet:

Zérushely:

Növekedés:

Csökkenés:

Szélsőértékek:

Páros:

Páratlan:

Periódus:

7.4. A függvénytranszformációkkal kapcsolatos ismereteid segítségével ábrázold és jellemezd az $f\colon]-2;\infty[\to \mathbb{R},\ \ x \mapsto \log_{\frac{1}{2}}(x+2)-1$ függvényt!

Értelmezési tartomány:

Értékkészlet:

Zérushely:

Növekedés:

Csökkenés:

Szélsőértékek:

Páros:

Páratlan:

Periódus:

7.5. A függvénytranszformációkkal kapcsolatos ismereteid segítségével ábrázold az $f\colon]0,5;\infty[\to \mathbb{R},\ \ x \mapsto 2\log_2(x-0,5)+1$ függvényt, és a grafikon alapján válaszolj a következő kérdésekre!

a) Mi az értékkészlete a függvénynek?

b) Az alábbi pontok közül melyek illeszkednek a grafikonra?

$A(1;-1)$;

$B(0,5;0,5)$;

$C(0;2)$;

$D(4,5;5)$.

8. feladatlap

Exponenciális egyenletek

EMLÉKEZTETŐ

exponenciális egyenlet: Exponenciális egyenletről beszélünk, ha az ismeretlen a kitevőben fordul elő. Például $2^{-3x^2+4}=1$.

az alapegyenlet megoldása: Az exponenciális alapegyenlet $a^x=b$ alakú, ahol $a,b\in\mathbb{R}^+$. Az egyenletet megoldhatjuk pontosan és közelítő módon.

Amennyiben a jobb oldalon álló b kifejezés átírható a bal oldalon szereplő a alap valamely hatványára, úgy megkaphatjuk x pontos értékét, mert az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelműségéből következik, hogy a kitevők egyenlők.

Például $2^{x+3}=8=2^3$, vagyis $x+3=3$, innen $x=0$.

Amennyiben a jobb oldal nem írható fel hatványalakban, úgy vegyük mindkét oldal 10 alapú logaritmusát: $\lg a^x=\lg b$, alkalmazva a megfelelő azonosságot $x\cdot\lg a=\lg b$, innen $x=\dfrac{\lg b}{\lg a}$, amely közelítő érték tetszőleges pontossággal meghatározható.

Fontos szabály az exponenciális egyenletek megoldásánál: törekedni kell az egyenletek megoldásának pontos megadására! Amennyiben ez nem lehetséges, akkor következik a közelítő megoldás alkalmazása.

FELADATOK

8.1. Add meg a következő exponenciális egyenletek pontos megoldását!

a) $2^x=8$;

b) $3\cdot2^x=96$;

c) $2^{2x-3}=16$;

d) $(2)^{3^x}=512$;

e) $5^{2x-4}=0{,}2$;

f) $2^{x^2-3x+4}=4$;

g) $3^{x^2-4x+3}=1$;

h) $4^{(x+1)(x-2)}=1$;

i) $3^x=-9$;

j) $4^{2x}=0$.

8.2. Add meg a következő exponenciális egyenletek pontos megoldását!

a) $2^x = 3^x$;

b) $3 \cdot 2^{x-2} = 2 \cdot 3^{x-2}$;

c) $5^{2x} = 7^{3x}$;

d) $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^5$;

e) $\left(\frac{4}{9}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{16}{81}$;

f) $2^x \cdot 5^x = 1000$.

8.3. Oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $3^x + 3^{x+1} = 12$;

b) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 28$;

c) $2^{x+3} - 3^x = 3^{x+1} - 2^x$;

d) $2^{2x+1} + 4^{x+1} - 4^{x-1} = 92$.

8.4. Oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$;

b) $3^{2x} + 2 \cdot 3^x - 3 = 0$;

c) $10^x + 10 \cdot 10^{-x} = 11$;

d) $2^{2x} - 8 \cdot 2^x = 0$;

e) $2 \cdot 4^x + 2^x - 1 = 0$;

f) $3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$.

8.5. Oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $3^x = 12;$

b) $5\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} = 4;$

c) $2^{x+3} - 2^{x+1} + 2^x = 5;$

d) $2^{2x} - 8 \cdot 2^x + 15 = 0.$

9. feladatlap

Logaritmusos egyenletek

EMLÉKEZTETŐ

logaritmusos egyenlet: Olyan egyenlet, amelyben az ismeretlen logaritmusfüggvényben fordul elő.

logaritmusos alapegyenlet megoldása: Az $\log_a x = b$ alakú egyenlet a logaritmusos alapegyenlet. Az egyenlet megoldása $x = a^b$. Például $\lg x = 2$ egyenlet megoldása $x = 10^2 = 100$.

az $\log_a x = \log_a b$ alakú egyenlet megoldása: Mivel ***csak az egyenlő számok logaritmusa egyenlő***, ezért az egyenlet megoldása $x = b$. A kiemelt szövegrészletet ennél a lépésnél fel kell tüntetni! Például $\lg(x+3) = 2\lg(x+1)$ egyenlet esetén. (Kikötés: $x > -1$) Az egyenlet átalakítása után $\lg(x+3) = \lg(x+1)^2$, mivel csak az egyenlő számok logaritmusa egyenlő, ezért $(x+3) = (x+1)^2$. A másodfokú egyenlet megoldásai: -2; 1, melyek közül csak az 1 megoldása az eredeti egyenletnek.

feltétel (vagy kikötés): A logaritmusfüggvényben lévő kifejezés csak pozitív lehet. Több logaritmusfüggvényt tartalmazó egyenlet esetén több egyenlőtlenség közös megoldása adja meg az egyenlet értelmezési tartományát. Az értelmezési tartományt az egyenlet megoldása előtt érdemes meghatározni. Sok esetben előre kiderülhet, hogy nincs az egyenletnek megoldása, vagy a lehetséges megoldások közül kiszűrhetjük a hamisakat.

Például 1. $\lg(x-1) + \lg(-x) = 1$ egyenletnek nincs megoldása, mivel $x - 1 > 0$ és $-x > 0$ egyenlőtlenségrendszernek nincs közös megoldása ($x > 1$ vagy $x < 0$).

2. A $\lg(x-2) - \lg(x+1) = 1$ egyenlet értelmezési tartománya az $x - 2 > 0$, $x + 1 > 0$ egyenlőtlenségrendszer közös megoldása, az $x > 2$. Az egyenletet megoldva: $\lg\frac{x-2}{x+1} = 1$, $\frac{x-2}{x+1} = 10$, …, $x = -\frac{4}{3}$. Az így kapott megoldás nem esik bele az egyenlet értelmezési tartományába, így nem megoldás, hamis gyök.

ellenőrzés: A megoldások visszahelyettesítése az eredeti egyenletbe, egy másik lehetséges szűrési módja a hamis megoldásoknak.

FELADATOK

9.1. Oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán! (Ne felejtsd el a feltételeket!)

a) $\lg x = \lg 15;$

b) $\lg x = 2;$

c) $\lg x = -1;$

d) $\lg(-x) = -1;$

e) $\lg \frac{x}{x+1} = 1;$

f) $\lg(3x-1) = \lg(x+1).$

9.2. Oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\log_6 x = 1 + \log_6 3;$

b) $\log_6 x = 1 - \log_6 3;$

c) $\lg(x-5) = 2 - \lg 5;$

d) $\lg 2x = 1 + \lg 3.$

9.3. Oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\log_2(x-5) + \log_2(x+2) = 3;$

b) $\log_4 x + \log_4(x-3) = 2.$

9.4. Oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\log_2(3x-1) = \log_2(3-x);$

b) $\log_2(3x-1) - \log_2(2x+2) = 0;$

c) $\frac{\log_2(2x-1)}{\log_2(x+1)} = 1;$

d) $\frac{\log_2(2x-5)}{\log_2(x+1)} = 1.$

9.5. Oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\log_4 \log_3 \log_2 x = 0;$

b) $\log_4 \log_3 \lg x = 1$;

c) $\log_3 \left(\log_2 (\log_5 x + 2) + 7\right) = 2$;

d) $\log_5 \left(\lg(\log_2 x - 0{,}9) + 6\right) = 1$.

9.6. Oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\lg^2 x - 11 \cdot \lg x + 10 = 0$;

b) $\lg^2 x - \lg x - 2 = 0$;

c) $6 \lg^2 x + \lg x - 2 = 0$;

d) $2 \log_2^2 x + \log_2 x - 1 = 0$.

9.7. Oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\lg x^2 = \lg (x+6)$;

b) $\lg \left(x^2 + 6x\right) = \lg (x - 6)$;

c) $2 \lg x = \lg (2x + 3)$;

d) $2 \lg (x - 1) = \lg (-x + 7)$.

9.8. Oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\lg (x - 2) + \lg (x + 1) = 1$;

b) $\log_2 (x + 9) + \log_2 (x + 3) = 4$;

c) $\log_3 \left(3x^2 + 4x + 5\right) = 2$;

d) $\log_2 \left(x^2 + x + 6\right) = 3$.

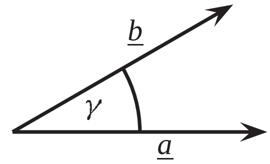
Trigonometria alkalmazása

10. feladatlap

Két vektor skaláris szorzata

EMLÉKEZTETŐ

két vektor skaláris szorzata: Két vektor skaláris szorzatán a két vektor abszolút értékének és hajlásszögük koszinuszának szorzatát értjük. $\underline{a}\cdot\underline{b}=|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|\cdot\cos\gamma$. (Ez egy valós szám.)



FELADATOK

10.1. Adott a két vektor abszolút értéke és hajlásszöge, számítsd ki a skaláris szorzatukat!

	$\lvert\underline{a}\rvert$	$\lvert\underline{b}\rvert$	γ	$\underline{a}\cdot\underline{b}$
a)	4,5	1,2	30°	
b)	0	10	15°	
c)	2,4	5,25	120°	
d)	4	0	85°	
e)	2	5	90°	
f)	1	6	60°	
g)	4	1	135°	
h)	4	6	0°	
i)	4	6	180°	

10.2. Az előző feladat segítségével válaszolj az alábbi kérdésekre!

a) Milyen esetben lehet a skaláris szorzat 0?

b) Milyen esetben lesz a skaláris szorzat negatív?

c) Milyen esetben pozitív a skaláris szorzat?

d) Ha az $\underline{a}$ vektor egységvektor, akkor mit jelent a $|\underline{b}|\cdot\cos\gamma$ szorzat?

e) Milyen közbezárt szög esetén lesz maximális a két vektor skaláris szorzata?

f) Milyen közbezárt szög esetén lesz minimális a két vektor skaláris szorzata?

10.3. A táblázat egy-egy sorában két vektor skaláris szorzata és a szorzat tényezői szerepelnek. Töltsd ki a táblázat üresen maradt celláit!

	$\lvert\underline{a}\rvert$	$\lvert\underline{b}\rvert$	γ	$\underline{a}\cdot\underline{b}$
a)	2	3		6
b)	5	4		–10
c)	6		120°	−4
d)		9	50°	5,65

10.4. Mekkora munkavégzés árán lehet 20 N nagyságú erővel elhúzni egy ládát 10 m úton, ha az erő 30°-os szöget zár be az elmozdulással?

10.5. Egy paralelogramma AB oldala 11 egység hosszúságú, a két oldal által közbezárt szög 56°. Tudjuk, hogy $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=20$. Mekkora a másik oldal?

10.6. Egy rombusz oldala 6 egység hosszúságú, a két oldal által közbezárt szöge 72°. Mekkora a közös csúcsból induló két oldalvektor skaláris szorzata?

10.7. A következő paralelogrammákról döntsd el, hogy melyik rombusz, melyik téglalap, melyik négyzet!

	$a = \lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	$b = \lvert\overrightarrow{AD}\rvert$	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$	A négyszög típusa
a)	3	3	4	
b)	4	5	0	
c)	6	2	-4	
d)	4	4	0	

11. feladatlap

Két vektor skaláris szorzata koordináta-rendszerben

EMLÉKEZTETŐ

két vektor skaláris szorzata: Két koordinátáikkal megadott vektor skaláris szorzata egyenlő a megfelelő koordináták szorzatának összegével. Ha $\underline{a}(a_1;a_2)$ és $\underline{b}(b_1;b_2)$, akkor $\underline{a}\cdot\underline{b} = a_1b_1 + a_2b_2$. Például $\underline{a}(2;-1)$ és $\underline{b}(3;2)$ esetén a két vektor skaláris szorzata $\underline{a}\cdot\underline{b} = 2\cdot 3 + (-1)\cdot 2 = 4$.

Fontos tudnivaló, hogy egy vektor önmagával vett skaláris szorzata az pont a vektor abszolút értékének négyzetével egyenlő. $\underline{a}\cdot\underline{a} = a_1\cdot a_1 + a_2\cdot a_2 = a_1^2 + a_2^2 = |\underline{a}|^2$. Vagyis a vektor hossza (abszolút értéke) egyenlő az önmagával vett skaláris szorzatának a négyzetgyökével. $|\underline{a}| = \sqrt{\underline{a}\cdot\underline{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

FELADATOK

11.1. Adott $\underline{a}(2;-1)$, $\underline{b}(2;4)$ és $\underline{c}(-3;0)$ vektor. Számold ki a következő műveletek eredményeit!

a) $\underline{a}\cdot\underline{b} =$

b) $\underline{a}\cdot(\underline{b}+\underline{c}) =$

c) $\underline{b}\cdot(2\cdot\underline{a}+\underline{c}) =$

d) $(\underline{a}-\underline{b})\cdot(\underline{a}+\underline{c}) =$

11.2. Határozd meg a két vektor hosszát, skaláris szorzatát és hajlásszögét!

	$\underline{a}(a_1;a_2)$	$\lvert\underline{a}\rvert$	$\underline{b}(b_1;b_2)$	$\lvert\underline{b}\rvert$	$\underline{a}\cdot\underline{b}$	$\cos\gamma$	γ
a)	$(3;4)$		$(-5;12)$				
b)	$(0;5)$		$(8;6)$				
c)	$(-1;-6)$		$(3;-0{,}5)$				
d)	$(5;-2)$		$(1;2{,}5)$				

11.3. Adott a derékszögű háromszög három csúcspontja. A skaláris szorzat segítségével határozd meg, hogy az *A* csúcsnál található-e derékszög!

	$A(a_1;a_2)$	$B(b_1;b_2)$	$C(c_1;c_2)$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$	Derékszögű-e?
a)	$(0;0)$	$(4;3)$	$(-1{,}5;2)$				
b)	$(0;0)$	$(-3;-2)$	$(-2;6)$				
c)	$(1;1)$	$(4;-3)$	$(5;4)$				

11.4. Mely *x* érték esetén zár be a két vektor derékszöget egymással?

a) $\underline{a}(2;-3)$ és $\underline{b}(5;x)$;

b) $\underline{a}(3;-2)$ és $\underline{b}(5-x;x)$;

c) $\underline{a}(2;-3x)$ és $\underline{b}(6;x)$;

d) $\underline{a}(x;-3)$ és $\underline{b}(x;-12)$.

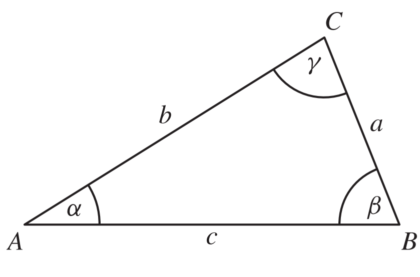
12. feladatlap

Szinusztétel

EMLÉKEZTETŐ

szinusztétel: Egy háromszögben két oldal aránya egyenlő a velük szemben lévő szögek szinuszának arányával.

$\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$; $\frac{a}{c}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$; $\frac{b}{c}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$.



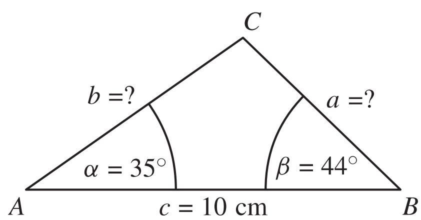
szinusztétel használata: A szinusztételt érdemes használni, ha a háromszögben adott

– két szög (a harmadik már kiszámolható) és egy oldal;

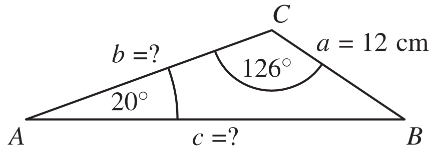
– két oldal és az egyikkel szemközti szög. (Ha a nagyobb oldallal szemközti szög az ismeretlen, vigyázni kell, mert a háromszög tompaszögű is lehet.)

FELADATOK

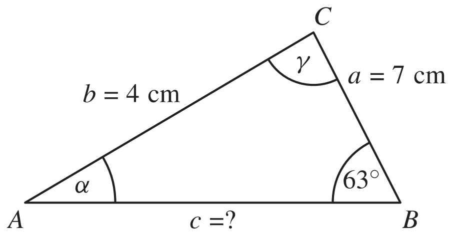
12.1. A háromszög egyik oldala 10 cm, a rajta fekvő két szög $35°$ és $44°$. Mekkora a háromszög másik két oldala?



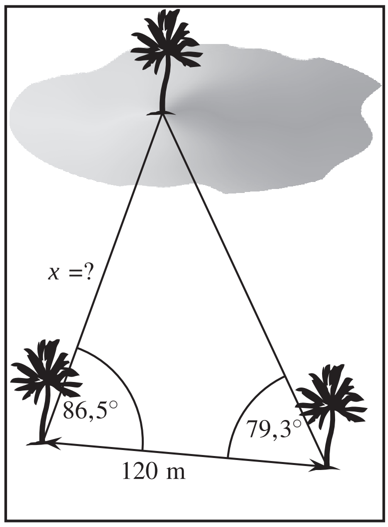
12.2. Adott a háromszög két szöge, $20°$ és $126°$. A kisebb szöggel szemközti oldal 12 cm nagyságú. Mekkora a másik két oldal?



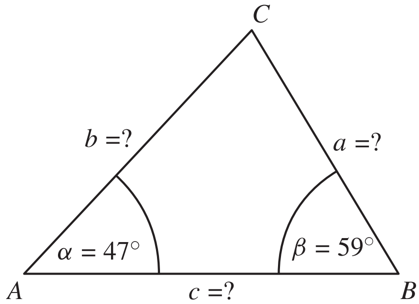
12.3. Egy háromszög két oldala 7 cm és 4 cm. A nagyobb oldallal szemközti szög $63°$. Mekkora a másik két szög és a harmadik oldal?



12.4. Egy szigeten a hajótörött a következőképpen akarta lemérni, hogy a szemközti sziget legnagyobb pálmafája milyen messze van. Kijelölt a saját szigetén egymástól 120 méterre lévő két pálmafát, és mind a kettőnél megmérte a másik pálmafa és a szomszédos sziget pálmafája által bezárt szöget. $86{,}5°$ és $79{,}3°$ adódott. Milyen messze volt a $86{,}5°$-os szög csúcsában lévő pálmafa a másik szigeten lévő pálmafától?



12.5. A háromszög kerülete 30 cm, két szöge pedig $47°$ és $59°$. Mekkora a háromszög három oldala?



12.6. A háromszög szögeinek aránya $3:4:5.$ A legnagyobb szöggel szemközti oldal 20 cm. Mekkora a másik két oldal?

13. feladatlap

Koszinusztétel

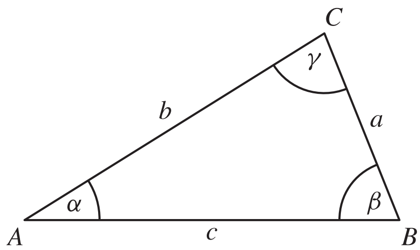
EMLÉKEZTETŐ

koszinusztétel: Egy háromszög egyik oldalának négyzetét megkapjuk, ha a másik két oldal négyzetösszegéből kivonjuk a két oldal és a közbezárt szög koszinuszának kétszeres szorzatát. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$

koszinusztétel használata: A koszinusztételt érdemes használni, ha a háromszögben adott

– két oldal és az általuk közbezárt szög;

– három oldal.



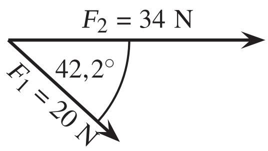
FELADATOK

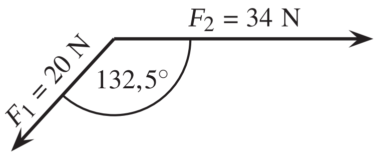
13.1. Egy háromszög két oldala 10 cm, 20 cm, az oldalak által közbezárt szög $42°.$ Mekkora a harmadik oldal?

13.2. Egy háromszög három oldala 12 cm, 15 cm és 18 cm. Mekkorák a háromszög szögei?

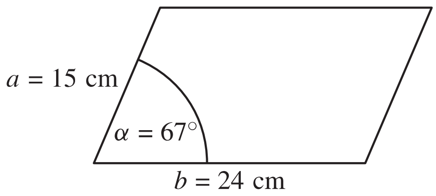
13.3. Egy pontszerű testre 20 N és 34 N nagyságú erő hat. Mekkora a két erő eredője, ha a vektorok által bezárt szög

a) 42,2°; *b)* 132,5°?



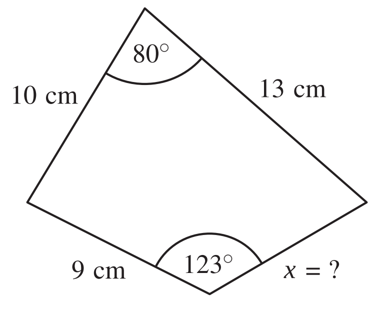


13.4. Mekkorák a 15 cm és 24 cm oldalú paralelogramma átlói, ha az oldalak által közbezárt szög 67°?



13.5. Egy háromszög két oldalának aránya $3:5$, a két oldal által közrezárt szög $60°$. Mekkorák a háromszög oldalai, ha a háromszög kerülete 30 cm?

13.6. Mekkora az ábrán látható négyszög ismeretlen oldala?



14. feladatlap

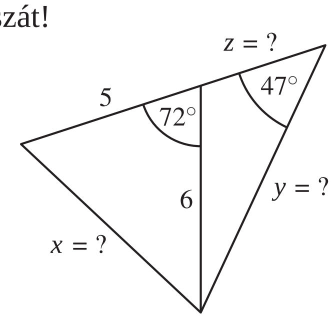
Vegyes feladatok szinusz- és koszinusztétel alkalmazására

FELADATOK

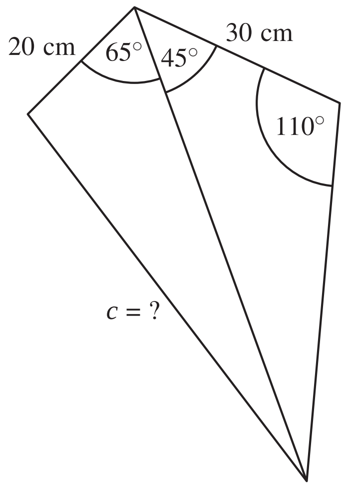
14.1. Egy háromszög két oldala 8 cm és 13 cm, a két oldal által közbezárt szög $36°\,24'$. Mekkora az ismeretlen oldal és a másik két szög?

14.2. Egy háromszög egyik oldala 34 cm. Az oldalon fekvő két szög $42°\,42'$ és $56°\,12'$. Milyen hosszú az oldalhoz tartozó súlyvonal?

14.3. Az ábra adatai alapján határozd meg az ismeretlen szakaszok hosszát!



14.4. Az ábra adatai alapján határozd meg x értékét!



15. feladatlap

Sokszögekre vonatkozó vegyes feladatok

EMLÉKEZTETŐ

háromszög területe: A háromszög területe az alábbi összefüggésekkel számolható ki:

- $t = \dfrac{a \cdot m_a}{2}$;
- $t = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$;
- $t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$;
- $t = r \cdot s$;
- $t = \dfrac{abc}{4R}$,

ahol s a háromszög kerületének a fele: $s = \dfrac{a+b+c}{2}$, R a háromszög köré írható kör sugara, r a háromszögbe írható kör sugara.

FELADATOK

15.1. A háromszög 8 cm és 11 cm-es oldala által közbezárt szöge $35°$. Mekkora a háromszög kerülete, területe?

15.2. A háromszög kerülete 36 cm, oldalainak aránya $2:3:4$. Mekkora a háromszög területe? Mekkora a háromszög köré és a háromszögbe írható kör sugara?

15.3. A háromszög egyik oldala 13 cm. A rajta fekvő két szög $38°$ és $95°$. Mekkora a háromszög kerülete, területe? Mekkora a háromszög köré és a háromszögbe írható kör sugara?

15.4. Egy trapéz két alapja 13 cm, 8 cm. A 6 cm-es szár a hosszabb alappal $60°$-os szöget zár be. Mekkora a trapéz kerülete és területe?

15.5. A paralelogramma oldalai 15 cm és 12 cm, és az egyik közbezárt szög $56° 48'$. Mekkora a paralelogramma területe?

15.6. A rombusz oldala 6 cm, az egyik szöge $42° 24'$. Mekkora a területe?

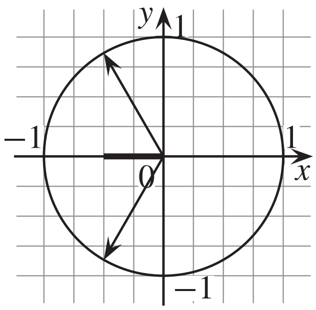
16. feladatlap

Trigonometrikus egyenletek 1.

EMLÉKEZTETŐ

legegyszerűbb trigonometrikus egyenletek: Négyféle legegyszerűbb trigonometrikus egyenletet különböztetünk meg: $\sin x = a$; $\cos x = a$; $\operatorname{tg} x = a$; $\operatorname{ctg} x = a$. Az egyenleteknek a valós megoldásait keressük, tehát a szögeket minden esetben radiánban kell megadni! Az egyenletek megoldásának fontos közös vonása, hogy ha van megoldásuk, akkor végtelen sok megoldásuk van.

– A $\sin x = a$ és $\cos x = a$ egyenleteknek csak $-1 \le a \le 1$ esetén van megoldásuk. Például a $\sin x = -1{,}2$ egyenletnek nincs megoldása.



– A $\sin x = a$ és $\cos x = a$ egyenletek megoldásánál a periódus 2π. Például $\cos x = -0{,}5$. Az egységkörben tüntessük fel az első koordinátát (koszinusz jelentése), és ábrázoljuk a hozzá tartozó egységvektorokat! A 0,5 értékhez tatozó hegyesszög $\frac{\pi}{3}$. Az első egységvektorhoz tartozó megoldások $x_1 = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. A másik megoldás $x_2 = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$.

– A $\operatorname{tg} x = a$; $\operatorname{ctg} x = a$ egyenleteknél minden a esetén van megoldás, és a függvények periódusa π. Például $\operatorname{tg} x = -5{,}43$. A megoldás $x = -1{,}389 + k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Fontos, hogy a $\operatorname{tg} x$ és a $\operatorname{ctg} x$ függvénynél mindig ki kell kötni, hogy mely x-re értelmezett a függvény!

FELADATOK

16.1. Oldd meg a következő trigonometrikus egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

b) $\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$;

c) $\operatorname{tg}\left(3x+\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{3}$;

d) $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{4}\right)=-1$.

16.2. Oldd meg a következő trigonometrikus egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sin x=\cos x$;

b) $\sin 2x=-\cos 2x$;

c) $3\sin x=2\cos x$;

d) $3\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

16.3. Oldd meg a következő trigonometrikus egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sin 2x=\sin x$;

b) $\cos 2x=\cos x$.

16.4. Oldd meg a következő trigonometrikus egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sin 2x=\cos x$;

b) $\cos 2x=\sin x$.

17. feladatlap

Trigonometrikus egyenletek 2.

FELADATOK

17.1. Oldd meg a következő trigonometrikus egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\left(\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0;$

b) $\cos^2 x - 2\cos x + 1 = 0;$

c) $\operatorname{tg}^2 x - 3 = 0.$

17.2. Oldd meg a következő trigonometrikus egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0;$

b) $2\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 1 = 0.$

17.3. Oldd meg a következő trigonometrikus egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sin^2 x - \cos^2 x + \sin x = 0;$

b) $\cos^2 x - \sin^2 x + \cos x - 2 = 0;$

c) $-2\cos^2 x + 3\sin x = 0;$

d) $-2\sin^2 x - 3\cos x + 3 = 0.$

17.4. Oldd meg a következő trigonometrikus egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sin x + \cos x = 1;$

b) $3\cos x - 4\sin x = 4.$

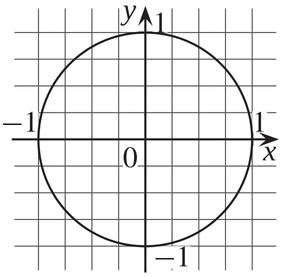
18. feladatlap

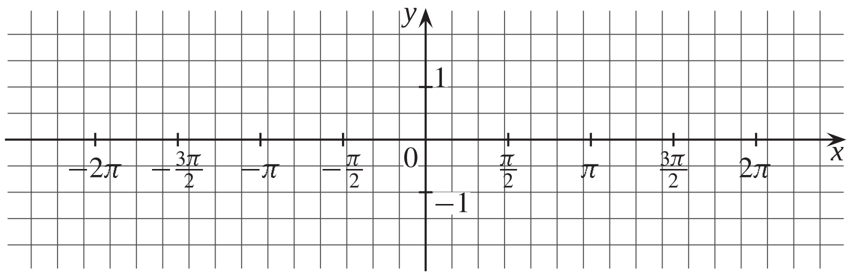
Trigonometrikus egyenlőtlenségek

FELADATOK

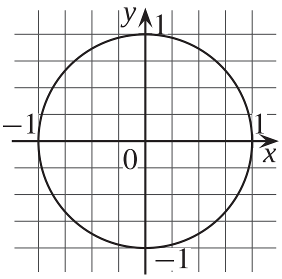
18.1. Az egységkör vagy a grafikon segítségével oldd meg a következő trigonometrikus egyenlőtlenségeket!

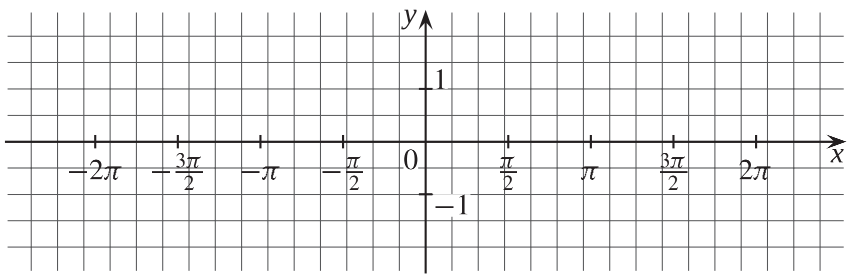
a) $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$;



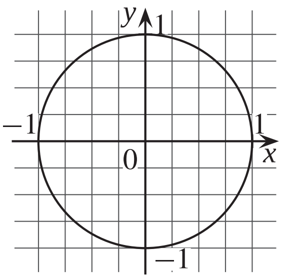


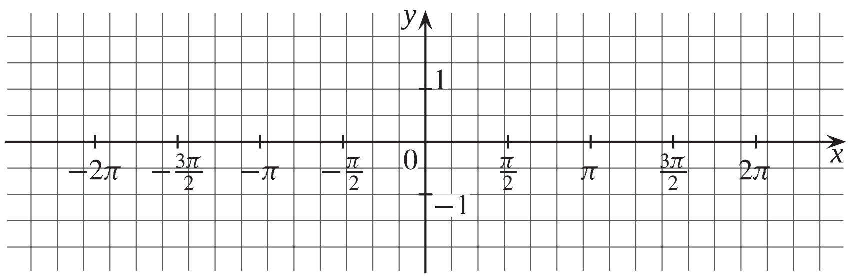
b) $\sin x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$;



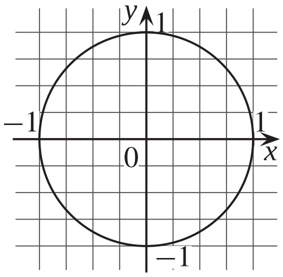


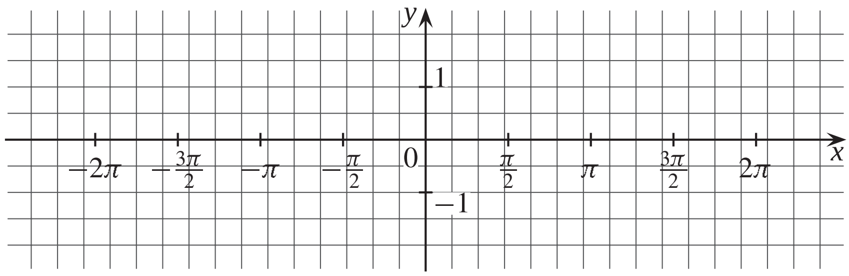
c) $\cos x \le -\frac{1}{2}$;





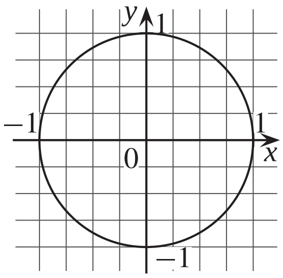
d) $\cos x \geq 0.$

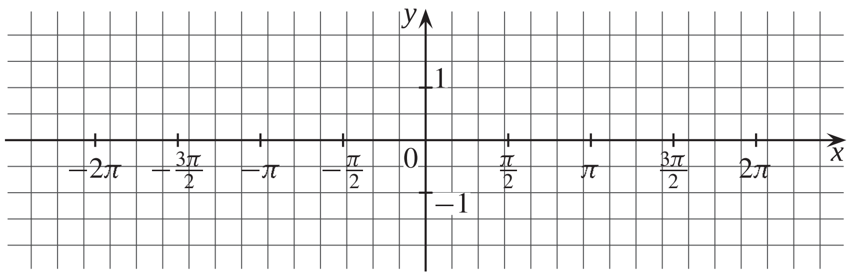




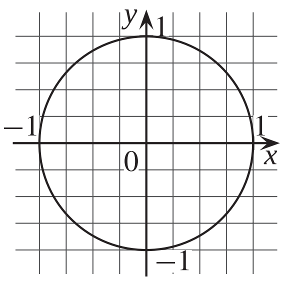
18.2. Az egységkör vagy a grafikon segítségével oldd meg a következő trigonometrikus egyenlőtlenségeket!

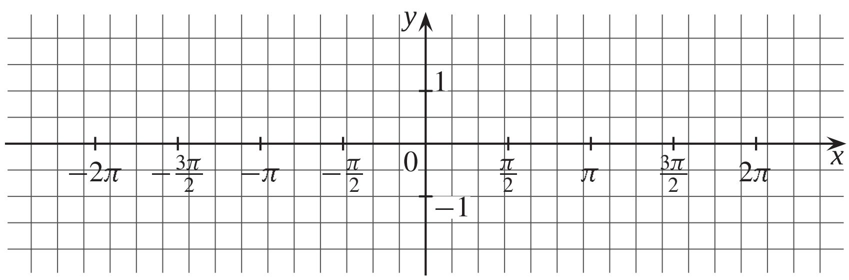
a) $-\frac{1}{2} < \sin x \leq \frac{1}{2};$





b) $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$

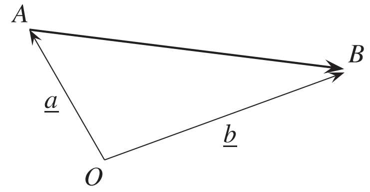




19. feladatlap

Helyvektor, vektor, osztópont

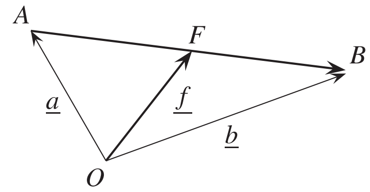
EMLÉKEZTETŐ



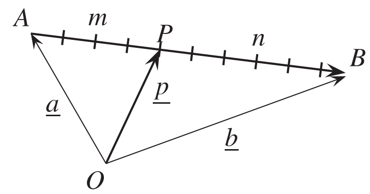
adott pont helyvektora: A koordináta-rendszer origójából az adott pontba mutató vektor. Az adott pont helyvektor koordinátái megegyeznek az adott pont koordinátáival. Jelölése: $\underline{a} = \overrightarrow{OA}$, a pont betűjelének kisbetűs megfelelője.

szakaszra írt vektor: A szakasz végpontjaiba mutató helyvektorok különbsége. Amerre mutat, annak a pontnak a helyvektora lesz a „kisebbítendő” vektor. $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$.

szakasz hosszának kiszámítása: A szakaszra felírt vektor hossza megegyezik a szakasz hosszával. $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$, ahol a végpontokba mutató helyvektorok koordinátái $\underline{a}(x_A; y_A)$, $\underline{b}(x_B; y_B)$.

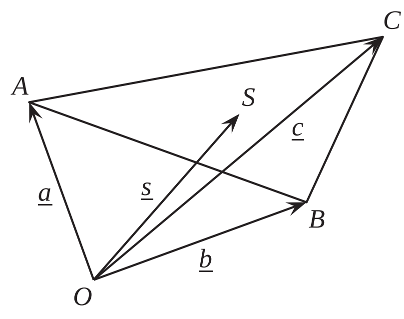


felezőpont: Az AB szakasz F felezőpontjába mutató $\underline{f}$ helyvektor koordinátáit az $\underline{f} = \frac{\underline{a}+\underline{b}}{2}$ összefüggéssel számolhatjuk ki, ahol $\underline{a}$ az A pontba, $\underline{b}$ pedig a B pontba mutató helyvektor. Például az $A(2;-1)$ és $B(-5;-3)$ végpontú szakasz felezőpontjának helyvektora $\underline{f} = \frac{\underline{a}+\underline{b}}{2} = \frac{(2;-1)+(-5;-3)}{2} = \left(\frac{2+(-5)}{2}; \frac{(-1)+(-3)}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}; -2\right)$.



osztópont: Az AB szakaszt $m:n$ arányban felosztó pont $\underline{p}$ helyvektorának koordinátáit a $\underline{p} = \frac{n\cdot\underline{a}+m\cdot\underline{b}}{m+n}$ összefüggéssel számolhatjuk ki, ahol $\underline{a}$ az A pontba, $\underline{b}$ pedig a B pontba mutató helyvektor. Például az $A(2;-1)$ és $B(-5;-3)$ végpontú szakasz A-hoz közelebbi harmadolópontjának helyvektora

$$\underline{p} = \frac{n\cdot\underline{a}+m\cdot\underline{b}}{m+n} = \frac{2\cdot(2;-1)+1\cdot(-5;-3)}{1+2} = \left(\frac{4+(-5)}{3}; \frac{(-2)+(-3)}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}\right).$$



háromszög súlypontja: A háromszög S súlypontjába mutató $\underline{s}$ helyvektor az $\underline{s} = \frac{\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}}{3}$ összefüggéssel számolható ki, ahol $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ rendre a háromszög A, B és C csúcspontjába mutató helyvektorok. Például az $A(2;-1)$, $B(5;-4)$ és $C(10;-10)$ háromszög súlypontjának koordinátái $\underline{s} = \frac{\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}}{3} =$

$$= \frac{(2;-1)+(5;-4)+(10;-10)}{3} = \left(\frac{2+5+10}{3}; \frac{(-1)+(-4)+(-10)}{3}\right) = \left(\frac{17}{3}; -5\right).$$

FELADATOK

19.1. A koordinátasíkon adott a következő négy vektor: $A(2;-1)$, $B(-3;-2)$, $C(-3;0)$ és $D(1;5)$. Számítsd ki a következő vektorok koordinátáit és hosszát!

a) $\overrightarrow{CA} =$

$|\overrightarrow{CA}| =$

b) $\overrightarrow{AB} =$

$|\overrightarrow{AB}| =$

c) $\overrightarrow{CD} =$

$|\overrightarrow{CD}| =$

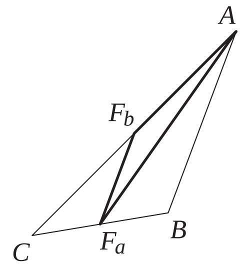
d) $\overrightarrow{BD} =$

$|\overrightarrow{BD}| =$

19.2. Adott az $A(4;-1)$, $B(0;2)$, $C(1;0)$ háromszög. Mekkora a háromszög kerülete?

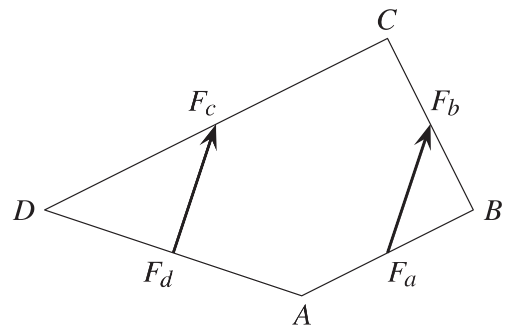
19.3. Adott az $A(4{,}6;-3{,}4)$, $B(0;5{,}2)$, $C(-1;1{,}4)$ háromszög. Határozd meg az oldalfelező pontok koordinátáit!

19.4. Adott az $A(4;3)$, $B(1;-2)$, $C(-5;-6)$ háromszög. Határozd meg az AF_bF_a háromszög kerületét!



19.5. Határozd meg az $A(4;2)$, $B(1;-4)$, $C(-5;-7)$ csúcspontú háromszög súlyvonalhosszainak összegét!

19.6. *a)* Határozd meg a $A(5;2)$, $B(9;4)$, $C(7;8)$, $D(-1;4)$ csúcspontú négyszög $\overrightarrow{F_aF_b}$ és $\overrightarrow{F_cF_d}$ középvonal-vektorainak a koordinátáit!



$\overrightarrow{F_aF_b} =$

$\overrightarrow{F_cF_d} =$

b) Az *a)* pont eredményei alapján indokold, hogy az $F_aF_bF_cF_d$ négyszög paralelogramma!

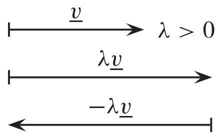
19.7. Egybeesik-e az $A(-2;-2)$, $B(6;-2)$, $C(1;9)$ háromszög és az $E(5;3)$, $F(-3;2)$, $G(3;-1)$ háromszög súlypontja?

19.8. Írd fel az $A(-4;7)$, $B(11;-23)$ végpontú szakasz harmadoló- és ötödölőpontjainak a koordinátáit!

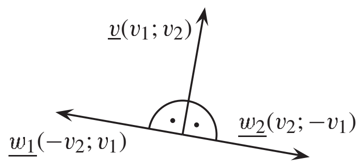
20. feladatlap

Párhuzamos és merőleges vektorok

EMLÉKEZTETŐ



$\underline{v}$ **vektorral párhuzamos vektor megadása:** Ha egy $\underline{v}(v_1;v_2)$ vektort megszorzunk egy pozitív λ számmal, akkor a vektorral párhuzamos, vele egyirányú, a vektor hosszához képest λ-szoros hosszúságú vektort kapunk. Például ha a $\underline{v}(3;-1)$ vektorral párhuzamos, vele egyirányú, de kétszeres hosszúságú vektort szeretnénk kapni, akkor a $\underline{v}$ vektort 2-vel kell megszorozni, így a keresett vektor $2\underline{v}=(6;-2)$. Amennyiben a vektor irányát meg szeretnénk fordítani, úgy a $\underline{v}$ vektort negatív számmal kell megszorozni.



$\underline{v}$ **vektorra merőleges vektor megadása:** A $\underline{v}(v_1;v_2)$ vektor koordinátáit megcseréljük és az egyik előjelét megváltoztatjuk,. akkor az eredeti vektorra merőleges és vele egyenlő hosszúságú vektort kapunk. Két ilyen vektor lehetséges: $(-v_2;v_1)$ vagy $(v_2;-v_1)$.

FELADATOK

20.1. Add meg az $\underline{a}(2;-1)$ vektorral párhuzamos vektor koordinátáit, ha az
a) egyirányú vele és háromszoros hosszúságú;

b) egyirányú vele és fele olyan hosszú;

c) ellentétes irányú és két és félszeres hosszúságú;

d) ellentétes irányú és a hossza $\frac{4}{3}$-szoros!

20.2. *a)* Hova mutat az a vektor, amely a $P(-2;1)$ pontból indul és egyirányú az $\underline{a}(2;-1)$ vektorral, csak négyszer olyan hosszú?

b) Hova mutat az a vektor, amely a $P(-2;1)$ pontból indul és ellentétes irányú az $\underline{a}(2;-1)$ vektorral, de a hossza 1,4-szeres?

20.3. Egy paralelogramma csúcsai $A(-2;2)$, $B(3;3)$, $C(2;5)$. Határozd meg a negyedik csúcsot, ha a CD oldal párhuzamos az AB oldallal!

20.4. Egy trapéz egyik alapjának csúcsai $A(-2;2)$, $B(3;3)$. Melyek a trapéz másik két csúcsának koordinátái, ha a másik, kétszeres hosszúságú alap felezőpontja $F(1;5)$?

20.5. Határozd meg a $\underline{v}$ vektorra merőleges vektorokat!

	$\underline{v}$	$\underline{w}_1$ (pozitív irányú forgatott)	$\underline{w}_2$ (negatív irányú forgatott)
a)	$(2;-5)$		
b)	$(5;4)$		
c)		$(-1;-2)$	
d)			$(0;3)$

20.6. A négyzet szimmetria-középpontja $O(2;3)$, az egyik csúcspontja $A(-1;5)$. Határozd meg a négyzet többi csúcspontját pozitív körüljárási irány szerint!

20.7. A rombusz szimmetria-középpontja $O(2;3)$, a nagyobb átlója kétszerese a rövidebb átlójának. Az rövidebb átlóhoz tartozó egyik csúcspont $A(4;6)$. Határozd meg a rombusz többi csúcspontját pozitív körüljárási irány szerint!

20.8. A négyzet két szomszédos csúcspontja pozitív körüljárási irány szerint $A(1;1)$, $B(-2;4)$. Mi a koordinátája a másik két csúcspontnak és szimmetria-középpontnak?

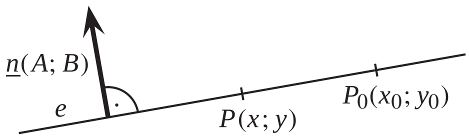
21. feladatlap

Egyenes

EMLÉKEZTETŐ

az egyenes normálvektora: Egyenes normálvektorának tekintünk bármely nem nullvektort, amely az egyenesre merőleges.

az egyenes normálvektoros alakja: Ha adott az egyenes egy $\underline{n}(A;B)$ normálvektora és egy $P_0(x_0;y_0)$ pontja, akkor az egyenes normálvektoros egyenlete a következő alakú: $Ax+By=Ax_0+By_0$.

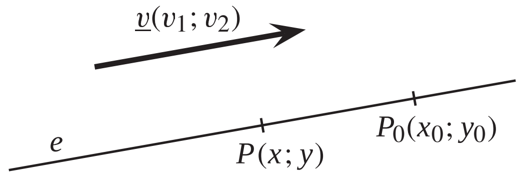


Például a $P_0(-5;3)$ ponton átmenő $\underline{n}(-2;1)$ irányvektorú egyenes egyenlete $-2\cdot x+1\cdot y=-2\cdot(-5)+1\cdot 3=13$, vagyis $-2x+y=13$.

az egyenes irányvektora: Egyenes irányvektorának tekintünk bármely nem nullvektort, amely az egyenessel párhuzamos.

az egyenes irányvektoros alakja: Ha adott az egyenes egy $\underline{v}(v_1;v_2)$ irányvektora és egy $P_0(x_0;y_0)$ pontja, akkor az egyenes irányvektoros egyenlete a következő alakú:

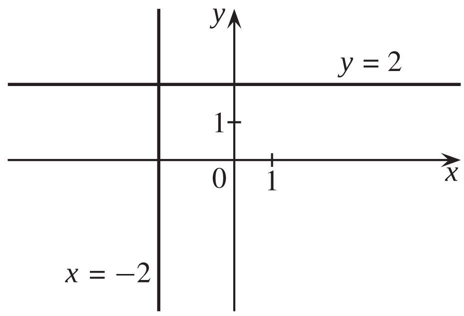
$v_2x-v_1y=v_2x_0-v_1y_0$.



Például a $P_0(-5;4)$ ponton átmenő $\underline{v}(2;-3)$ irányvektorú egyenes egyenlete $-3\cdot x-2\cdot y=-3\cdot(-5)-2\cdot 4=7$, vagyis $-3x-2y=7$.

a koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenesek: Az x tengellyel párhuzamos egyenes normálvektora az y tengellyel párhuzamos, $\underline{n}(0;B)$ alakú, így a normálvektoros egyenlete $By=By_0$. Például $y=2$ vagy $-3y=2{,}7$ egyenes az x tengellyel párhuzamos, és $\underline{n}(0;1)$, illetve $\underline{n}(0;-3)$ a normálvektoruk. Az $y=0$ egyenletű egyenes maga az x tengely.

Az y tengellyel párhuzamos egyenes normálvektora az x tengellyel párhuzamos, $\underline{n}(A;0)$ alakú, így a normálvektoros egyenlete $Ax=Ax_0$. Például $x=-2$ vagy $-2x=7$ egyenes az y tengellyel párhuzamos, és $\underline{n}(1;0)$, illetve $\underline{n}(-2;0)$ a normálvektoruk. Az $x=0$ egyenletű egyenes maga az y tengely.



FELADATOK

21.1. Az egyenes egyenletéből állapítsd meg az egyenes egy normál- és egy irányvektorát!

	Egyenes egyenlete (e)	Normálvektora $(\underline{n}_e)$	Irányvektora $(\underline{v}_e)$
a)	$2x-3y=-6$		
b)	$-2x-y=4$		
c)	$x+0{,}6y=1$		
d)	$-y+x=11$		

21.2. Írd fel az egyenes egyenletét, ha adott egy normálvektora és egy pontja!

	Normálvektora $\left(\underline{n}_e\right)$	Az egyenes egy pontja $P_0(x_0;y_0)$	Egyenes egyenlete (e)
a)	$\underline{n}(2;4)$	$P_0(1;3)$	
b)	$\underline{n}(5;0)$	$P_0(-1;0)$	
c)	$\underline{n}(-2;-3)$	$P_0(2;-3)$	
d)	$\underline{n}(1;-1)$	$P_0(0;0)$	

21.3. Írd fel az egyenes egyenletét, ha adott egy irányvektora és egy pontja!

	Irányvektora $\left(\underline{v}_e\right)$	Egy normálvektora $\left(\underline{n}_e\right)$	Az egyenes egy pontja $P_0(x_0;y_0)$	Egyenes egyenlete (e)
a)	$\underline{v}(2;4)$		$P_0(1;3)$	
b)	$\underline{v}(5;0)$		$P_0(-1;0)$	
c)	$\underline{v}(-2;-3)$		$P_0(2;-3)$	
d)	$\underline{v}(1;-1)$		$P_0(0;0)$	

21.4. Írd fel az A és B pontokon átmenő egyenes egyenletét!

	A	B	Egy irányvektora $\left(\underline{v}_e\right)$	Egy normálvektora $\left(\underline{n}_e\right)$	Egyenes egyenlete (e)
a)	$(2;4)$	$(-2;-4)$			
b)	$(0;0)$	$(-1;3)$			
c)	$(0;-4)$	$(1;0)$			
d)	$(-1;1)$	$(2{,}5;-3{,}2)$			

21.5. Írd fel az AB szakaszra merőleges és az A ponton átmenő egyenes egyenletét!

	A	B	Egy normálvektora $\left(\underline{n}_e\right)$	Egyenes egyenlete (e)
a)	$(4;-1)$	$(-1;-1)$		
b)	$(2;-3)$	$(-3;1)$		
c)	$(0;-3)$	$(4;0)$		
d)	$(-1{,}5;3)$	$(2{,}5;-3{,}2)$		

21.6. Írd fel az AB szakasz felezőmerőlegesének az egyenletét!

	A	B	Felezőpont (F)	Egy normálvektora ($\underline{n}_e$)	Egyenes egyenlete (e)
a)	$(1;-1)$	$(1;1)$			
b)	$(1;-3)$	$(3;-1)$			
c)	$(0;-2)$	$(5;0)$			
d)	$(-1{,}5;2)$	$(-2{,}5;-3{,}2)$			

22. feladatlap

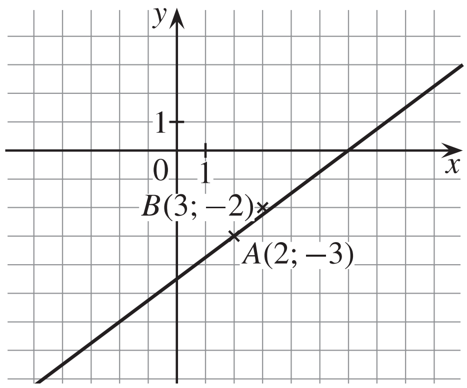
Egyenes és pont

EMLÉKEZTETŐ

pont illeszkedése az egyenesre: A sík egy adott pontját akkor és csak akkor tartalmazza az adott egyenes, ha az egyenes egyenletébe behelyettesítve a pont koordinátáit, egyenlőséget kapunk. Például az $A(2;-3)$ pont illeszkedik a $3x-4y=18$ egyenletű egyenesre, mert koordinátáinak behelyettesítése után, $3\cdot(2)-4\cdot(-3)=6+12=18$, egyenlőséget kapunk. A $B(3;-2)$ pont nem illeszkedik a $3x-4y=18$ egyenletű egyenesre, mert a koordinátáinak behelyettesítése után, $3\cdot(3)-4\cdot(-2)=9+8=17\neq 18$, nem kapunk egyenlőséget.

abszcissza: Egy pont x koordinátája.

ordináta: Egy pont y koordinátája.



FELADATOK

22.1. A felsoroltak közül hány egyenesnek pontja az $A(2;-1{,}5)$? Karikázd be a megfelelő egyenesek betűjelét!

e: $2x-3y=7{,}5$;

f: $x-y=3{,}5$;

g: $2x-2{,}5y=7{,}25$;

h: $3x=6$.

22.2. A felsoroltak közül mely pontok találhatók a $-\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y=-\frac{3}{2}$ egyenesen? Karikázd be a megfelelő pontok betűjelét!

$A\left(1;-\frac{3}{2}\right)$; $B(-1;3)$; $C\left(\frac{3}{5};-\frac{9}{5}\right)$; $D\left(\frac{7}{4};-1\right)$.

22.3. Hol metszi az x tengelyt és az y tengelyt a következő egyenes?

	Egyenes	x tengelymetszet	y tengelymetszet
a)	$2{,}5x+3{,}2y=-8$		
b)	$-1{,}2x+2{,}4y=4{,}8$		
c)	$x+2y=6$		
d)	$0{,}4x-0{,}6y=1{,}8$		

22.4 Adott az e: $\frac{3}{2}x-\frac{1}{3}y=2$ és az f: $-\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y=3$ egyenes. Mennyivel nagyobb az f egyenes $\frac{1}{3}$ abszcisszájú pontjának ordinátája az e egyenes $-\frac{1}{3}$ abszcisszájú pontjának ordinátájánál?

23. feladatlap

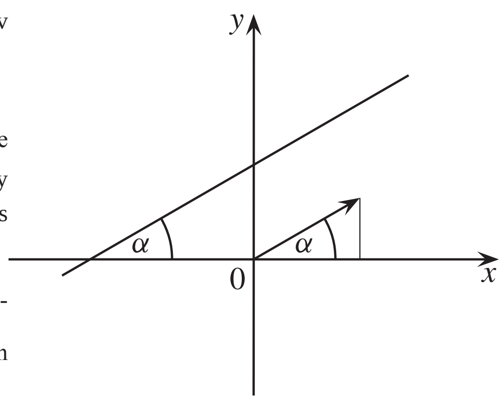
Egyenes iránytényezős egyenlete

EMLÉKEZTETŐ

egyenes irányszöge: Az a forgásszög, melyet az egyenes az x tengely pozitív irányába mutató félegyenesével zár be.

egyenes iránytényezője: $m = \operatorname{tg}\alpha$.

az egyenes iránytényezős egyenlete: Az egyenes iránytényezős egyenlete $y=mx+b$ alakú, ahol m az egyenes iránytényezője, b pedig az y tengely és az egyenes metszéspontja. Az y tengellyel párhuzamos egyenesnek nincs iránytényezős egyenlete.



a normálvektor és az iránytényező közötti kapcsolat: Az egyenes normálvektoros alakjából levezethető az $y=-\frac{A}{B}x+b$ iránytényezős alak. Innen leolvashatjuk, hogy $m=-\frac{A}{B}$. Például ha egy egyenes normálvektora $\underline{n}(3;2)$, akkor az iránytényezője $m=-\frac{3}{2}$.

az irányvektor és az iránytényező közötti kapcsolat: Az egyenes irányvektoros alakjából levezethető az $y=\frac{v_2}{v_1}x+b$ iránytényezős alak. Innen leolvashatjuk, hogy $m=\frac{v_2}{v_1}$. Például ha egy egyenes irányvektora $\underline{v}(-1;3)$, akkor az iránytényezője $m=-3$.

FELADATOK

23.1. Adott az egyenes irányszöge és az y tengelymetszet. Írd fel az egyenes iránytényezős egyenletét!

	α	$P_0(0;b)$	m	$y=mx+b$
a)	$30°$	$(0;-2)$		
b)	$45°$	$(0;1)$		
c)	$135°$	$(0;0)$		

23.2. Az egyenes iránytényezős egyenlete alapján add meg az egyenes egy irányvektorát és egy normálvektorát!

	$y=mx+b$	$\underline{v}$	$\underline{n}$
a)	$y=\frac{3}{2}x+2$		
b)	$y=-\frac{2}{5}x+1$		
c)	$y=\frac{1}{3}x-6$		
d)	$y=6$		

23.3. Az egyenes normálvektoros alakjából állapítsd meg az egyenes iránytangensét és az irányszögét!

	$Ax+By=Ax_0+By_0$	m	α
a)	$2x-5y=-2$		
b)	$-2x-y=20$		
c)	$3x+2y=20$		

23.4. Mekkora szöget zár be az x tengellyel a $2x+3y=1$ egyenes?

23.5. Mekkorák a $e\colon\ -x+2y=0$ egyenes, az $f\colon\ -2x+y=-4$ egyenes és az x tengely által határolt háromszög belső szögei?

23.6. Számítsd ki, hogy mekkora szöget zár be az $A(-2;4)$ és a $B(3;-3)$ pontokon áthaladó egyenes az y tengellyel!

24. feladatlap

A párhuzamosság és merőlegesség feltétele

EMLÉKEZTETŐ

párhuzamosság feltétele: 1. Két egyenes (e és f) párhuzamos, ha a normálvektoraik párhuzamosak, vagyis a vektorok megfelelő koordinátáinak aránya egyenlő. $\frac{A_e}{A_f}=\frac{B_e}{B_f}$.

2. Két egyenes (e és f) párhuzamos, ha az irányvektoruk párhuzamos, vagyis a vektorok megfelelő koordinátáinak aránya egyenlő.

$\frac{v_{e_1}}{v_{f_1}}=\frac{v_{e_2}}{v_{f_2}}$.

3. Két (e és f) egyenes párhuzamos, ha az iránytényezőjük egyenlő: $m_e=m_f$.

merőlegesség feltétele: 1. Két egyenes (e és f) merőleges egymásra, ha a normálvektoruk merőleges egymásra, vagyis a vektorok skaláris szorzata 0. $\underline{n}_e\cdot\underline{n}_f=0$.

2. Két egyenes (e és f) merőleges egymásra, ha az irányvektoruk merőleges egymásra, vagyis a vektorok skaláris szorzata 0. $\underline{v}_e\cdot\underline{v}_f=0$.

3. Két (e és f) egyenes merőleges egymásra, ha az iránytényezőjük szorzata -1. $m_e\cdot m_f=-1$.

FELADATOK

24.1. Döntsd el, hogy az alábbi egyenesek közül melyek párhuzamosak egymással és melyek merőlegesek egymásra!

a: $5x-2y=3$;

b: $-x+0{,}4y=2$;

c: $-x-2{,}5y=3$;

d: $14x+35y=-55$;

e: $0{,}6x-0{,}25y=9$;

f: $-5x-12y=9$.

Egymással párhuzamos egyenesek:

Egymásra merőleges egyenesek:

24.2. Add meg a p paramétert úgy, hogy az egyenes párhuzamos, illetve merőleges legyen az $x+5y=2$ egyenletű egyenessel!

a) $3x+py=3$; *b)* $px-2y=3$; *c)* $-10x+2y=p$.

Párhuzamos:

$p=$ $p=$ $p=$

Merőleges:

$p=$ $p=$ $p=$

24.3. *a)* Határozd meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a $P(1;4)$ ponton és párhuzamos a $2x-5y=15$ egyenessel!

b) Határozd meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a $P(1;4)$ ponton és merőleges a $2x-5y=15$ egyenesre!

24.4. *a)* Határozd meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a $P(-1;4)$ ponton és párhuzamos az $y=-\frac{3}{2}x+1$ egyenessel!

b) Határozd meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a $P(-1;4)$ ponton és merőleges az $y=-\frac{3}{2}x+1$ egyenesre!

25. feladatlap

Két egyenes metszéspontja

EMLÉKEZTETŐ

két egyenes metszéspontja: Két egyenes metszéspontjának koordinátáit úgy számolhatjuk ki, hogy a két egyenes egyenletéből álló egyenletrendszert megoldjuk.

FELADATOK

25.1. Határozd meg a két egyenes metszéspontját!

a) e: $2x-3y=2$,

f: $x-y=2$.

b) e: $y=\dfrac{3}{2}x+5{,}6$,

f: $-2x+3y=8{,}05$.

c) e: $3x-2y=11$,

f: $-2x+3y=1$.

d) e: $2x-3y=6$,

f: $4x+3y=6$.

25.2. Határozd meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az $x+2y=5$ és a $2x+y=2$ egyenesek metszéspontján és irányvektora $\underline{v}(2;-1)$!

25.3. Határozd meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a $2x+y=3$ és a $-x+3y=-5$ egyenesek metszéspontján és a $P(1;0)$ ponton!

25.4. Egy négyszög csúcsai pozitív körüljárás szerint $A(-3;-1)$, $B(2;-3)$, $C(5;3)$, $D(-6;5)$. Határozd meg az átlók metszéspontját!

25.5. A háromszög a oldalegyenesének egyenlete $12x+5y=54$; b oldalegyenesének egyenlete $x+y=1$; c oldalegyenesének egyenlete $-4x+3y=10$. Mekkora a háromszög kerülete?

26. feladatlap

Pont és egyenes távolsága

EMLÉKEZTETŐ

egyenes és pont távolságának kiszámolása: A $P_0(x_0;y_0)$ pont távolsága az $Ax+By+c=0$ egyenletű egyenestől: $d=\left|\frac{Ax_0+By_0+c}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$. Például a $P_0(2;-1)$ pont távolsága a $3x+4y-7=0$ egyenestől $d=\left|\frac{Ax_0+By_0+c}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|=\left|\frac{3\cdot2+4\cdot(-1)-7}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|=$ $=\frac{|-5|}{5}=1.$

párhuzamos egyenesek távolsága: Ha két párhuzamos egyenes egyenlete $Ax+By+c_1=0$ és $Ax+By+c_2=0$, akkor a távolságuk kiszámolható a $d=\frac{|c_2-c_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ összefüggéssel. Például a $3x+4y-7=0$ egyenletű egyenes távolsága a $3x+4y+3=0$ egyenletű egyenestől $d=\frac{|c_2-c_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|3-(-7)|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|10|}{5}=2.$

FELADATOK

26.1. Milyen távol van a $2x+y=5$ egyenestől az $A(-3;1)$ és a $B(3;-1)$ pont?

26.2. A háromszög csúcsai $A(-1;2)$, $B(2;5)$ és $C(3;-2)$. Mekkora az A csúcshoz tartozó magasság, és mekkora a területe a háromszögnek?

26.3. Mekkora az e: $3x-4y=3$ és az f: $-3x+4y=2$ egyenletű egyenesek távolsága?

26.4. Adott az e: $-x+2y=5$ és az f: $x+3y=6$ egyenes. Melyik egyeneshez van közelebb az $A(6;2)$ pont?

26.5. A négyzet egyik oldalegyenesének egyenlete $-4x+3y=0$, az egyik csúcspontja $A(-1;7)$. Mekkora a négyzet kerülete?

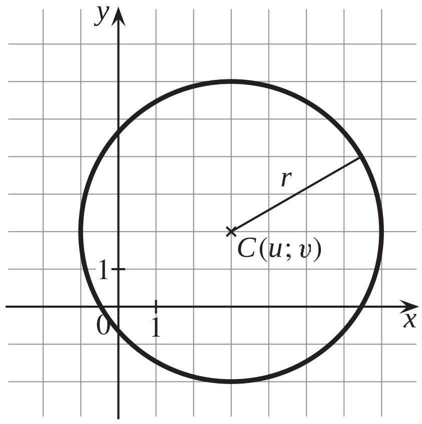
27. feladatlap

Kör egyenlete

EMLÉKEZTETŐ

kör egyenlete: A $C(u;v)$ középpontú r sugarú kör egyenlete $(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$. Például: *a)* Az $O(0;0)$ középpontú, $r=3$ egység sugarú kör egyenlete $x^2+y^2=9$. *b)* A $C(2;-3)$ középpontú $r=4$ egység sugarú kör egyenlete $(x-2)^2+(y+3)^2=16$.

a kör egyenletének általános alakja: A kör kéttagú kifejezéseinek felbontása után a kör egyenlete $x^2+y^2+ax+by+c=0$ alakúra hozható, ez a kör egyenletének általános alakja. Csak az ilyen alakúra hozható egyenletek lehetnek köregyenletek! Például az $x^2+y^2+xy-16=0$ egyenlet nem köregyenlet, mert xy tagot is tartalmaz. A $-x^2+y^2-16=0$ nem köregyenlet, mert nem egyenlő a négyzetes tagok együtthatója.



– A négyzetes tagok együtthatóinak egyenlősége szükséges feltétel, de nem kötelező, hogy 1 legyen az értékük. Például $-2x^2-2y^2+4=0$ köregyenlet, mert a -2-vel való osztás után $x^2+y^2=2$ köregyenletet kapunk.

– Abból, hogy egy egyenlet általános köregyenlet alakú még nem feltétlenül következik, hogy kör is tartozik hozzá. Például az $x^2+y^2+4=0$ egyenlet megfelel az általános alaknak, de $x^2+y^2=-4$, és az $r^2=-4$ sugár számunkra értelmezhetetlen.

FELADATOK

27.1. A középpont és a sugár ismeretében írd fel a körök egyenleteit!

	A kör középpontja	A kör sugara	A kör egyenlete
	$C(u;v)$	r	
a)	$C(0;0)$	5	
b)	$C(3;4)$	10	
c)	$C(-2;3)$	$\sqrt{7}$	
d)	$C(0;-5)$	5	
e)	$C(-2;-5)$	1	

27.2. A kör egyenlete alapján állapítsd meg a kör középpontjának koordinátáit és a kör sugarát!

	A kör egyenlete	A kör sugara r	A kör középpontja $C(u;v)$
a)	$x^2+y^2=144$		
b)	$x^2+y^2=2$		
c)	$(x-1)^2+(y+1)^2=1$		
d)	$(x+2)^2+(y-3)^2=0{,}09$		
e)	$(x-1)^2+(y+5)^2=6{,}25$		

27.3. A körök általános egyenleteiből a teljes négyzetté alakítás módszerével határozd meg a körök középpontját és sugarát!

	A kör általános egyenlete	A kör sugara r	A kör középpontja $C(u;v)$
a)	$x^2+y^2-4x-1=0$		
b)	$x^2+2x+y^2-3=0$		
c)	$x^2+5x+y^2-3y+2{,}25=0$		
d)	$x^2-6x+y^2-2y-15=0$		
e)	$2x^2-4x+2y^2-4y+2=0$		

27.4. Az alábbi alakzategyenletek közül válogasd ki a köregyenleteket, és határozd meg a körök középpontjának koordinátáit és a körök sugarát!

	A kör általános egyenlete	A kör sugara r	A kör középpontja $C(u;v)$
a)	$x^2-y^2-4x-1=0$		
b)	$x^2+2xy+y^2-3=0$		
c)	$-x^2-y^2+3y-2{,}25=0$		
d)	$4x^2+8x+4y^2=16y+5$		
e)	$x^2-4x+4=-y^2-4y-20$		

27.5. Írd fel a kör egyenletét, ha ismered a kör $C(2;-1)$ középpontját és a $P(5;2)$ pontját!

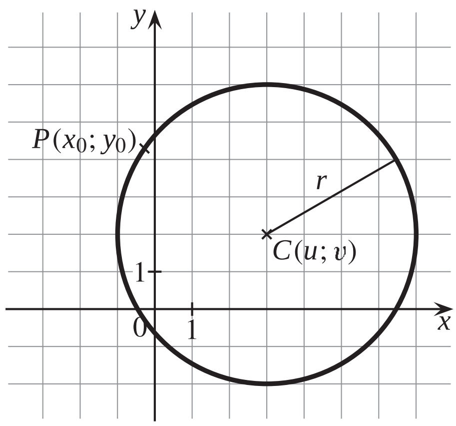
27.6. Ismerjük a kör átmérőjének $A(-3;2)$, $B(5;-4)$ végpontjának koordinátáit! Írd fel a kör egyenletét!

28. feladatlap

Pont és kör viszonya

EMLÉKEZTETŐ

pont és kör viszonya: Egy kör és egy P pont viszonyát megkapjuk, ha a pont koordinátáit behelyettesítjük a kör egyenletének $(x-u)^2+(y-v)^2$ részébe.



- Ha a kifejezés értéke nagyobb a sugár négyzeténél (r^2), akkor a pont a körön kívül van $((x-u)^2+(y-v)^2>r^2)$;
- ha a kifejezés értéke egyenlő a sugár négyzetével, akkor a pont a körön van $((x-u)^2+(y-v)^2=r^2)$;
- ha a kifejezés értéke kisebb a sugár négyzeténél, akkor a körön belül található a pont $((x-u)^2+(y-v)^2<r^2)$.

Például az $A(-4;4)$ pont az $x^2+y^2=25$ egyenletű körön kívül található, mivel $(-4)^2+4^2=32>25=r^2$. A $B(-3;4)$ pont az $x^2+y^2=25$ egyenletű körön található, mert $(-3)^2+4^2=25=25=r^2$. A $C(-2;4)$ pont az $x^2+y^2=25$ egyenletű körön belül található, mivel $(-2)^2+4^2=20<25=r^2$.

FELADATOK

28.1. Karikázd be a körön levő, húzd alá a körön belül levő és húzd át a körön kívül lévő pontok betűjelét!

a) $x^2+y^2=100$. $A(-6;5)$; $B(-6;8)$; $C(7;7)$; $D(10;0)$.

b) $(x-3)^2+y^2=169.$ $A(8;-12);$ $B(-9;-5);$ $C(6;11);$ $D(14;1).$

c) $x^2+(y+2)^2=1.$ $A(-0{,}5;-1{,}5);$ $B(0;-1);$ $C(0{,}5;0);$ $D(0{,}9;0{,}1).$

d) $(x-2)^2+(y-3)^2=5.$ $A(1;1{,}5);$ $B(1;4);$ $C(0;1);$ $D(-1;4{,}5).$

28.2. Adottak az $(x-3)^2+(y+1)^2=10$ kör pontjainak első koordinátái (abszcisszái). Határozd meg a pontok második koordinátáit (ordinátáit)!

a) $x=4,\ \ y=$

b) $x=0,\ \ y=$

c) $x=5,\ \ y=$

d) $x=2{,}5,\ \ y=$

28.3. Adottak az $(x-3)^2+(y+5)^2=34$ kör pontjainak második koordinátái (ordinátái). Határozd meg a pontok első koordinátáit (abszcisszáit)!

a) $y=-2,\ x=$

b) $y=0,\ x=$

c) $y=1,\ x=$

d) $y=-4,\ x=$

28.4. Hol metszik a megadott egyenletű körök a koordináta-rendszer tengelyeit?

	A kör egyenlete	Az *x* tengely metszete	Az *y* tengely metszete
a)	$x^2+(y-4)^2=25$		
b)	$(x+4)^2+(y-3)^2=25$		
c)	$(x+2)^2+(y-4)^2=4$		

28.5. Mi annak a körnek az egyenlete, amelynek a sugara $\sqrt{29}$ egység, és átmegy az $A(-3;2)$ és $B(4;9)$ pontokon?

28.6. Mi annak a körnek az egyenlete, amely átmegy az $A(2;-3)$, $B(8;-5)$ és $C(4;-1)$ pontokon?

29. feladatlap

Egyenes és kör kölcsönös helyzete

EMLÉKEZTETŐ

pont és kör kölcsönös helyzete: Az egyenes a kört két pontban metszheti, ekkor ***szelőnek*** nevezzük. Az ***érintőnek*** a körrel egy közös pontja van. Az egyenes elhaladhat a kör mellett, ekkor nincs egyetlen közös pontjuk sem.

a közös pont meghatározása: A kör és egyenes közös pontjának koordinátáit úgy számíthatjuk ki, hogy megoldjuk a kör és az egyenes egyenletrendszerét. Például az $x^2+y^2=4$ egyenletű kör szelője $x+y=2$ egyenletű egyenes. Melyek a közös pontok koordinátái? Kifejezzük az egyenes egyenletéből az egyik változót $x=2-y$. Behelyettesítjük a kör egyenletébe $(2-y)^2+y^2=4$. Az $y^2-2y=0$ másodfokú egyismeretlenes egyenlet megoldásai: $y_1=0$, $y_2=2$, így a pontok koordinátái $M_1(0;2)$; $M_2(2;0)$.

a kör $E(x_0;y_0)$ pontjába húzott érintő egyenlete: A kör $E(x_0;y_0)$ pontján átmenő egyenes egyenlete:
$(x-u)(x_0-u)+(y-v)(y_0-v)=r^2$, ahol $C(u;v)$ a kör középpontja, r pedig a kör sugara.

FELADATOK

29.1. Határozd meg, hogy az $(x-6)^2+(y+5)^2=10$ és az $(x-3)^2+(y-1)^2=25$ egyenletű körök közül melyiket metszi több pontban az $x-2y=11$ egyenletű egyenes!

29.2. Adott az $(x-2)^2+(y+1)^2=25$ egyenletű kör. Írd fel az *a)* $E(5;3)$ és *b)* $F(-2;2)$ pontokba húzható érintők egyenletét!

29.3. Milyen hosszú húrt metsz ki az $x+y=-4$ egyenletű egyenes az $(x+1)^2+(y+2)^2=25$ egyenletű körből?

29.4. Mely pontokban metszi egymást az $(x-2)^2+(y-1)^2=9$ és az $(x-5)^2+(y+1)^2=4$ egyenletű kör?

29.5. Mely pontban érinti egymást az $(x-4)^2+(y-4)^2=25$ és az $(x-5{,}5)^2+(y-2)^2=6{,}25$ egyenletű kör?

30. feladatlap

Vegyes feladatok

FELADATOK

30.1. Adott az $A(-3;6)$ és a $B(5;0)$ pont.

a) Számítsd ki a két pont távolságát!

b) Írd fel az AB szakasz felezőmerőlegesének egyenletét!

c) Írd fel az AB átmérőjű kör egyenletét!

30.2. A kör egyenlete $x^2+y^2-8x+10y-8=0$.

a) Hol metszi a kör az y tengelyt?

b) Írd fel az adott körrel koncentrikus egységsugarú kör egyenletét!

30.3. Egy négyzet középpontjának koordinátái $O(3;1)$, A csúcsának koordinátái $A(5;-4)$.

a) Írd fel a hiányzó csúcsok koordinátáit!

b) Mekkora a négyzet területe?

30.4. Az ABC háromszög súlypontja $S(0;4)$. Két csúcsának koordinátája $A(-2;-4)$ és $B(6;6)$.

a) Határozd meg a 3. csúcs koordinátáit!

b) Számítsd ki az AB oldal A-hoz közelebbi harmadolópontjának koordinátáit!

c) Írd fel a B csúcshoz tartozó súlyvonal egyenletét!

30.5. Az ABC háromszög csúcsai: $A(7;-4)$, $B(1;9)$ és $C(-3;1)$.

a) Igazold, hogy a háromszög derékszögű!

b) Írd fel a köré írt kör egyenletét!

30.6. A kör egyenlete $(x+2)^2+(y-4)^2=25$.

a) Számítsd ki a kör 1 abszcisszájú pontjának koordinátáit!

b) Írd fel ezekben a pontokban a kör érintőjének egyenletét!

30.7. Milyen távolságra van az $x^2+y^2-4x-5=0$ egyenletű kör középpontja az e: $3x-2y=7$ és $f: x+2y=13$ egyenesek metszéspontjától?

30.8. Írd fel annak a körnek az egyenletét, amelynek középpontja $O(5;-3)$ és
a) érinti az x tengelyt;

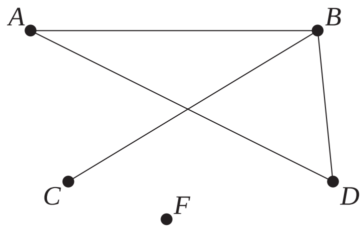
b) érinti az y tengelyt;

c) érinti a $2x-y=5$ egyenest!

31. feladatlap

Gráfelmélet

EMLÉKEZTETŐ



gráf: Gráfnak nevezzük a csúcsoknak és éleknek a halmazát, ahol az élek pontokat kötnek össze, illetve az élek végére csúcsok illeszkednek úgy, hogy minden élre legalább egy, de legfeljebb két csúcs illeszkedik.

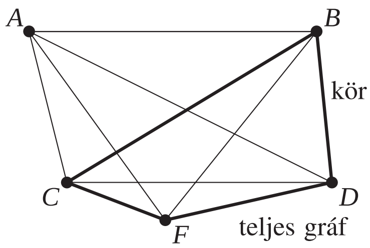
fokszám: Az egy csúcsból induló élek száma. Például a B csúcs fokszáma 3, a C csúcs fokszáma 1.

izolált pont: Olyan pont, amelyből nem indul ki él. Például az F pont.

többszörös él: Többszörös élről beszélünk, ha két pontot több él is összeköt.

hurokél: Olyan él, amelynek minkét vége ugyanarra a pontra illeszkedik.

egyszerű gráf: Olyan gráf, amely nem tartalmaz többszörös élt és hurokélt.

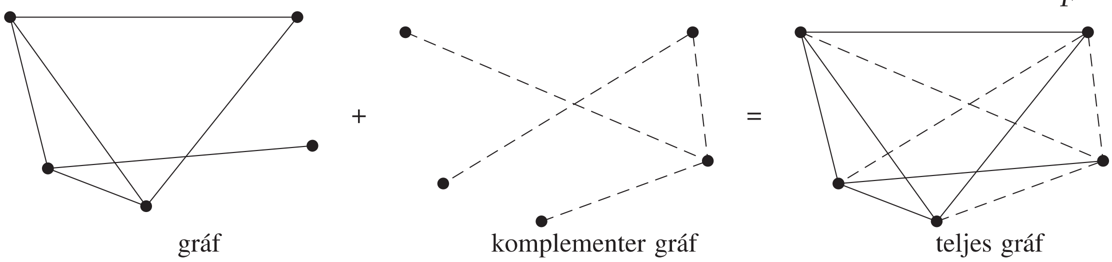


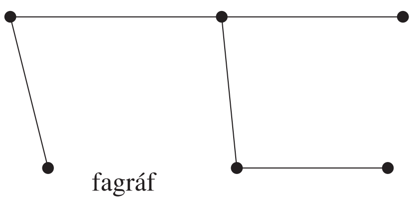
összefüggő gráf: Olyan gráf, amelyben élek mentén valamilyen úton el lehet jutni bármely pontjából bármely pontjába.

kör: Az élek olyan sorozata egy gráfban, melyek visszavezetnek a kiindulási ponthoz.

teljes gráf: Olyan egyszerű gráf, melyben bármely két pontot él köt össze.

komplementer gráf: Olyan gráf, mely az eredeti gráf éleivel együtt teljes gráfot alkot.





fagráf: Olyan összefüggő gráf, melyben nincs kör.

gráfra vonatkozó összefüggések: 1. Egy gráf összfokszáma (a csúcsok fokszámainak összege) mindig páros szám, az élek számának kétszerese.

2. Egy n pontú teljes gráf éleinek száma: $\frac{n(n-1)}{2}$.

3. Egy n pontú fagráf éleinek száma: $n-1$.

FELADATOK

31.1. Rajzolj egy 5 pontú, 10 élű gráfot, amely tartalmaz többszörös élt! Írd a pontok fölé a megfelelő fokszámot!

31.2. Egy hattagú társaságban mindenkinek 3 ismerőse van. Rajzold meg az „ismerősök” egy lehetséges gráfját! Rajzold meg a „nem ismerősök” komplementer gráfját is!

31.3. Tekintsük egy kocka csúcsait gráfpontoknak, éleit pedig a gráf éleinek.

a) Mennyi az egyes csúcsok fokszáma?

b) Mennyi a gráf összfokszáma?

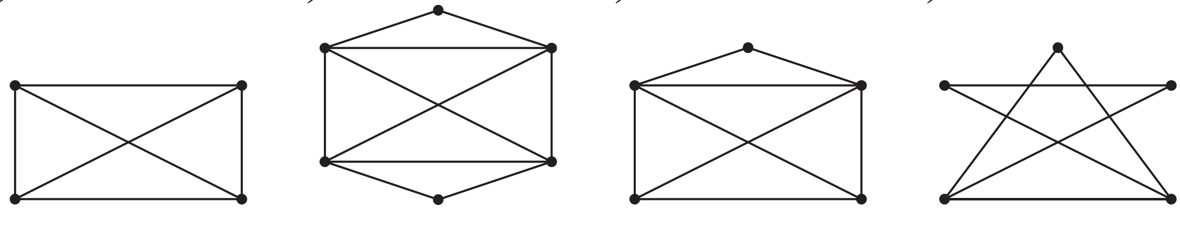
c) Hány él hiányzik a teljes gráfhoz?

31.4. Egy urnában 1 piros, 2 fehér és 3 zöld golyó van. Ábrázold gráf segítségével a kihúzási sorrend lehetőségeit, ha elsőre piros golyót húzunk!

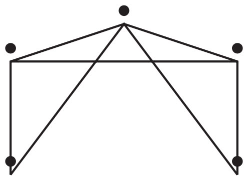
31.5. Lehetséges-e olyan 15 fős csoport, melyben mindenkinek pontosan 5 barátja van?

31.6. Az alábbi gráfok közül melyek rajzolhatók meg a ceruzánk felemelése nélkül úgy, hogy minden élt és minden pontot csak egyszer érintünk?

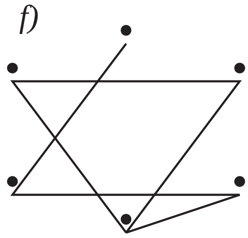
a) *b)* *c)* *d)*



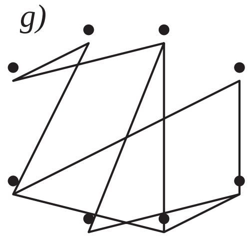
e)



f)



g)



31.7. Egy születésnapi összejövetelre érkezők kézfogással üdvözlik egymást. Hányan vettek részt a partin, ha 120 kézfogás történt?

31.8. A következő állításokról döntsd el, hogy igazak (I) vagy hamisak (H)!

a) Van olyan gráf, melynek összfokszáma 0.

b) Egy 5 pontú gráfnak maximum 10 éle lehet.

c) Van 10 élű és 10 pontú fagráf.

d) Nincs olyan 7 pontú gráf, melyben minden csúcs fokszáma 3.

e) Van olyan gráf, melynek több pontja van, mint éle.

f) Ha egy gráf összefüggő, akkor van benne kör.

32. feladatlap

Kombinatorika (permutáció, kombináció, variáció)

EMLÉKEZTETŐ

permutáció (sorrend): ***Ismétlés nélküli permutáció:*** *n* darab különböző elem összes lehetséges sorrendje

$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ (*n* faktoriális). Például egy kártyapakli öt lapját $5! = 120$ sorrendben lehet kirakni.

Ismétléses permutáció: *n* darab elemből $k_1, k_2, \ldots, k_r$ egyforma, akkor a lehetséges sorrendek száma: $\dfrac{n!}{k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_r}$.

Például egy kártyapakli 4 treff, 3 pikk és 2 káró lapját $\frac{9!}{4!\cdot 3!\cdot 2!}$ sorrendben lehet kirakni.

kombináció (kiválasztás): ***Ismétlés nélküli kombináció:*** *n* db különböző elemből kiválasztunk *k* darabot úgy, hogy a sorrend nem számít. A lehetséges kiválasztások száma $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Példál egy kártyapakli 52 lapja közül 5-öt $\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!\cdot 47!} = 2\,598\,960$ módon oszthatunk ki.

variáció: ***Ismétlés nélküli variáció:*** *n* darab különböző elemből kiválasztunk *k* darabot úgy, hogy egy elemet csak egyszer választunk és számít a sorrend: $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Ismétléses variáció: ha *n* darab elem közül kiválasztunk *k* darabot úgy, hogy egy elemet többször is kiválaszthatunk: $V_{n,i}^k = n^k$.

FELADATOK

32.1. Sári, Peti, Robi és Tomi egy négyszemélyes csónakba szállnak be.
a) Hányféle sorrendben szállhatnak be?

b) Hogyan alakul a lehetséges sorrendek száma, ha Sári másodikként lép a csónakba?

32.2. A Megasztár döntőjébe 15-en kerültek be. Az első fordulóban három embernek kellett távoznia.
a) Hányféleképpen alakulhatott a bennmaradók névsora?

b) A négytagú zsűriből ketten a felvétel után együtt vacsoráztak a kiesőkkel. Hány különböző csapat alakulhat a zsűriből?

32.3. Hány olyan ötjegyű szám van, amely
a) csupa páratlan számjegyből áll;

b) csak 3-as vagy 7-es számjegyet tartalmaz;

c) 13-ra végződik;

d) csupa különböző számjegyből áll?

32.4. Hány különböző sorrendje lehet a

a) ZAMÁRDI szó betűinek?

b) BALATONAKARATTYA szó betűinek?

32.5. Egy dobókockát kétszer feldobunk. A dobott értékeket egymás mellé írva kétjegyű számot kapunk. Hány esetben lesz ez a szám

a) páros;

b) prím;

c) négyzetszám?

32.6. Egy tesztlapon 15 kérdés van.

a) Hány esetben lehet pont 10 helyes válaszunk?

b) Ezek közül hány olyan eset van, amikor az első és utolsó válasz helyes?

32.7. Vilmosék iskolájában 10. osztályban 8 olvasmányt jelöltek ki. Ebből 5 volt kötelező. Vilmos csak 5 könyvet olvasott el. Hányféle sorrendben tehette ezt?

33. feladatlap

Kombinatorika, az $\binom{n}{k}$ tulajdonságai

EMLÉKEZTETŐ

$\binom{n}{k}$ **tulajdonságai:** 1. $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$; 2. $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$; 3. $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$.

Pascal-féle háromszög: A Pascal-féle háromszögben az 1-eseket kivéve az összes elem a felette levő sorban tőle közvetlenül balra és jobbra levő két elem összege. A Pascal-féle háromszög n. sorának k. eleme: $\binom{n}{k}$.

n. sor elemeinek összege: 2^n.

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
 & & & & & & \text{0. elem} & & & & & \\
\text{0. sor} \rightarrow & & & & & 1 & & \text{1. elem} & & & & \\
\text{1. sor} \rightarrow & & & & 1 & & 1 & & \text{2. elem} & & & \\
\text{2. sor} \rightarrow & & & 1 & & 2 & & 1 & & \text{3. elem} & & \\
\text{3. sor} \rightarrow & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
1 & & & & & \ldots & & & & & 1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & & & & \ldots & & & & & \binom{5}{5}
\end{array}
$$

binomiális tétel: Az $(a+b)^n$ kifejtése: $(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}\cdot b+\binom{n}{2}a^{n-2}\cdot b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}a\cdot b^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$.

FELADATOK

33.1. Hány részhalmaza van egy *a)* 6; *b)* 7; *c)* 8 elemből álló halmaznak?

33.2. Melyik több, egy 12 elemű halmaz 5 elemű részhalmazainak száma vagy ugyanennek a halmaznak a 7 elemű részhalmazainak a száma?

33.3. Számítsd ki a következő kifejezéseket!

a) $\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{6}{4}+\binom{7}{5}+\binom{8}{6}=$

b) $\binom{17}{4}+\binom{17}{5}+\binom{18}{6}+\binom{19}{7}+\binom{20}{8}+\binom{21}{9}=$

33.4. Hányféleképpen olvasható ki az adott szó, ha a bal felső sarokból indulva csak balról jobbra és fentről lefelé olvassuk ki?

a)

E P E R T U
P E R T U R
E R T U R M
R T U R M I
T U R M I X

b)

V A D K Ö R T E
A D K Ö R T E
D K Ö R T E
K Ö R T E
Ö R T E
R T E
T E
E

c)

S Z A R V
Z A R V A
A R V A S

B O G
O G Á
G Á R

33.5. Bontsd fel a zárójeleket a binomiális tétel segítségével!

a) $(x+3)^4 =$

b) $(2x-5)^5 =$

c) $(3a+2b)^6 =$

34. feladatlap

Kombinatorika gyakorlása

FELADATOK

34.1. Egy konvex nyolcszög csúcsai hány

a) egyenest határozhatnak meg;

b) kört határozhatnak meg?

34.2. Az 1; 2; 3; 5; 7 számjegyek mindegyikének felhasználásával hány

a) ötjegyű;

b) ötjegyű, 5-tel osztható;

c) ötjegyű, 4-gyel osztható;

d) ötjegyű, páratlan;

e) ötjegyű, 6-tal osztható szám képezhető?

34.3. Az egyjegyű prímszámok halmazának
a) hány kételemű részhalmaza van;

b) elemeiből hány különböző háromjegyű szám képezhető;

c) elemeiből hány 25-tel osztható négyjegyű számot képezhetünk?

34.4. 32 lapos magyarkártyából kihúzunk 6 lapot. Hány olyan eset van, hogy a kihúzottak között
a) pontosan 2 ász és 2 tízes van;

b) nincs zöld;

c) legalább egy makk;

d) pontosan öt piros van?

34.5. Egy 23 fős osztályban farsang alkalmából tombolát rendeznek, ahol 5 tárgyat sorsolnak ki. Hányféleképpen történhet ez, ha
a) a tárgyak egyformák, és egy tanuló csak egy tárgyat nyerhet;

b) a tárgyak különbözőek, és egy tanuló csak egy tárgyat nyerhet;

c) a tárgyak különbözőek, és egy tanuló többször is nyerhet?

34.6. Hányféle gyöngy nyaklánc fűzhető
a) 10 piros, 10 fehér;

b) 6 sárga, 6 fekete, 8 narancs;

c) 5 kék, 5 fekete, 5 fehér és 5 zöld gyöngyből?

34.7. Egy társaságban mindenki mindenkivel kezet fog érkezéskor is és távozáskor is. Hány kézfogás történik *a)* egy 10; *b)* egy 16 fős társaságban?

35. feladatlap

Valószínűség-számítás

EMLÉKEZTETŐ

elemi esemény: Egy kísérlet egyes lehetséges kimenetelei.

eseménytér: Az elemi események halmaza.

az esemény valószínűsége: Jele: $P(A)$, az A esemény bekövetkezésének valószínűsége. Az A esemény valószínűségének kiszámolási módja: $P(A)=\dfrac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{az összes eset száma}}$. Például annak valószínűsége, hogy páros számot dobunk egy dobókockával

$P(2;4;6)=\frac{3}{6}=0{,}5$, mert a kedvező esetek száma 3, az összes lehetőség száma 6.

Az esemény valószínűségének tulajdonságai:

- $0 \le P(A) \le 1$;
- Biztos esemény valószínűsége 1 $(P(A)=1)$;
- Lehetetlen esemény valószínűsége 0 $(P(A)=0)$;
- $P(A+B)=P(A)+P(B)$, ha $P(AB)=\emptyset$.

binomiális eloszlás: Annak valószínűsége, hogy *n* db kísérletet elvégezve az *A* esemény éppen *k*-szor fordul elő:

$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ (p az A esemény valószínűsége, $q=1-p$). Például annak valószínűsége, hogy egy dobókockával 8 egymást követő dobásban pont két kettes dobás lesz, $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \binom{8}{2} \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^6 = 0{,}109$.

FELADATOK

35.1. Egy öttagú társaság egymás után lép be egy liftbe. Mekkora a valószínűsége, hogy a legidősebb közülük éppen másodikként száll be?

35.2. Két házaspár moziba megy, egymás melletti székeken ülnek. Mennyi a valószínűsége, hogy mindenki a saját házastársa mellett ül?

35.3. 32 lapos magyarkártyából kiválasztva 5 lapot, mennyi a valószínűsége, hogy
a) mind a négy ász benne lesz;

b) pontosan három zöld és két makk lesz benne;

c) nem lesz benne se tök, se hetes?

35.4. Egy urnában 7 fehér és 3 piros golyó van. Egymás után kihúzunk 2 golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott golyók azonos színűek?

35.5. Egy dobókockát kétszer feldobva mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 8?

35.6. Egy dobókockát kétszer feldobunk, és a dobott értékből kétjegyű számokat hozunk létre. Mennyi a valószínűsége, hogy az így kapott szám

a) prímszám;

b) kisebb, mint 30;

c) osztható 6-tal;

d) osztója 120-nak?

35.7. Egy pénzérmét 3-szor feldobva mennyi a valószínűsége, hogy csak az első dobás lesz fej?

35.8. Egy dobókockát 6-szor feldobva mennyi a valószínűsége, hogy pontosan kétszer dobunk 4-est?

35.9. Egy békapopuláció téli túlélési esélye 30%. 15 békát megjelölve mennyi a valószínűsége, hogy

a) pontosan 4 éli meg a tavaszt;

b) mindegyik túléli a telet?

Megoldások

1. feladatlap

1.1. *a)* $x=-1{,}2$; *b)* $x=1{,}442$; *c)* $x_1=-1{,}414$, $x_2=1{,}414$; *d)* $3y=\pm\sqrt[4]{104}=\pm3{,}1934$, $x_1=-1{,}064$, $x_2=1{,}064$;

e) $x=\sqrt[5]{\sqrt[3]{34}\cdot\sqrt[4]{102}}=1{,}594$; *f)* $a=\sqrt[6]{10\sqrt{3}+2}=\sqrt[6]{19{,}32}=1{,}638$, $a_1=1{,}638$, $a_2=-1{,}638$.

1.2. *a)* $u=x^2$ új változó bevezetése után a másodfokú egyenlet $2u^2-23u-144=0$ lesz. A másodfokú egyenletek megoldásai $u_1=16$, $u_2=-4{,}5$. Innen $x^2=16$ egyenlet megoldása $x_1=-4$, $x_2=4$, az $x^2=-4{,}5$ egyenletnek nincs megoldása. *b)* Az új változó $u=x^3$, a másodfokú egyenlet $8u^2-217u+27=0$, a másodfokú egyenlet megoldásai $u_1=27$, $u_2=0{,}125$. Az eredeti egyenlet megoldásai $x_1=3$, $x_2=0{,}5$. *c)* Az új változó $u=x^4$, a másodfokú egyenlet $u^2-25u+144=0$, a másodfokú egyenlet megoldásai $u_1=16$, $u_2=9$. Az eredeti egyenlet megoldásai $x_1=-2$, $x_2=2$, $x_3=-\sqrt{3}$, $x_4=\sqrt{3}$. *d)* Az új változó $u=x^5$, a másodfokú egyenlet $10u^2-15u-25=0$, a másodfokú egyenlet megoldásai $u_1=2{,}5$, $u_2=-1$. Az eredeti egyenlet megoldásai $x_1=1{,}201$, $x_2=-1$.

1.3. *a)* Szorzattá alakítással $x^2(x^2-25)=x^2(x-5)(x+5)=0$. A megoldások $x_1=0$, $x_2=-5$, $x_3=5$. Három megoldása van az egyenletnek. *b)* Az új változó $u=x^2$, a másodfokú egyenlet $u^2-29u+100=0$, a másodfokú egyenlet megoldásai $u_1=4$, $u_2=25$. Az eredeti egyenlet megoldásai: $x_1=-2$, $x_2=2$, $x_3=-5$, $x_4=5$. Az egyenletnek négy megoldása van. *c)* Az új változó $u=x^2$. A másodfokú egyenlet $u^2-21u-100=0$, a másodfokú egyenlet megoldásai $u_1=-4$, $u_2=25$. Az eredeti egyenlet megoldásai $x_1=-5$, $x_2=5$. Az egyenletnek két megoldása van. *d)* Szorzattá alakítással $x^2(x^2+4)=0$. A megoldás $x_1=0$. Az egyenletnek egy megoldása van. *e)* Az új változó $u=x^2$. A másodfokú egyenlet $u^2+29u+100=0$, a másodfokú egyenlet megoldásai $u_1=-4$, $u_2=-25$. Az egyenletnek nincs megoldása.

1.4. *a)* Az új változó $u=x^2+9x$. A másodfokú egyenlet $(u+15)(u+17)=3$, átalakítás után $u^2+32u+252=0$. A másodfokú egyenlet megoldásai $u_1=-14$, $u_2=-18$. Az új egyenletek: $x^2+9x+14=0$, $x^2+9x+18=0$. Az egyenlet megoldásai: $x_1=-2$, $x_2=-7$, $x_3=-3$, $x_4=-6$. *b)* Az új változó $u=x^2-x$. Az egyenlet $(u-3)(u-5)=3$, átalakítás után $u^2-8u+12=0$. A másodfokú egyenlet megoldásai $u_1=2$, $u_2=6$. Az új egyenletek: $x^2-x-6=0$, $x^2-x-2=0$. Az egyenlet megoldásai: $x_1=-2$, $x_2=3$, $x_3=-1$, $x_4=2$. *c)* Az új változó $u=x^2+3x+5$. Az egyenlet $\frac{15}{u}+u=8$, átalakítás után $u^2-8u+15=0$. A másodfokú egyenlet megoldásai $u_1=3$, $u_2=5$. Az új egyenletek: $x^2+3x+2=0$, $x^2+3x=0$. Az egyenlet megoldásai: $x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=-3$, $x_4=0$. *d)* Az új változó $u=2x^2+2x+3$. Az egyenlet $\frac{105}{u}+u=22$, átalakítás után $u^2-22u+105=0$. A másodfokú egyenlet megoldásai $u_1=7$, $u_2=15$. Az új egyenletek: $2x^2+2x-12=0$, $2x^2+2x-4=0$. Az egyenlet megoldásai: $x_1=-3$, $x_2=2$, $x_3=-2$, $x_4=1$.

1.5. Az egyenletek bal oldalát csoportosítva alakítsd szorzattá!

a) $x^2(x+1)-4(x+1)=(x^2-4)(x+1)=(x-2)(x+2)(x+1)=0$. A megoldások: $x_1=2$, $x_2=-2$, $x_3=-1$.

b) $x^2(x-2)-9(x-2)=(x^2-9)(x-2)=(x-3)(x+3)(x-2)=0$. A megoldások: $x_1=3$, $x_2=-3$, $x_3=2$.

c) $x^2(x^2-4)-(x^2-4)=(x^2-1)(x^2-4)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)=0$. A megoldások: $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=2$, $x_4=-2$.

d) $x^2(x^2-16)-9(x^2-16)=(x^2-9)(x^2-16)=(x-3)(x+3)(x-4)(x+4)=0$. A megoldások: $x_1=3$, $x_2=-3$, $x_3=4$, $x_4=-4$.

1.6. Legyen a szám x! A szöveg alapján a következő az egyenlet: $(x^2+1)^2=4{,}5x^2$. Az $u=x^2$ behelyettesítés és az egyenletrendezés után $u^2-2{,}5u+1=0$. A megoldások $u_1=2$, $u_2=\frac{1}{2}$. Az egyenlet megoldásai: $x_1=-\sqrt{2}$, $x_2=\sqrt{2}$, $x_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_4=\frac{\sqrt{2}}{2}$. A feltételnek csak a $\sqrt{2}$ felel meg.

1.7. *a)* Az egyenlet: $x^3=x$. Átrendezve az egyenletet: $x^3-x=x(x^2-1)=x(x-1)(x+1)=0$. A megoldások: $x_1=0$, $x_2=1$,

$x_3 = -1$. *b)* Az egyenlet: $x^4 = x$. Átrendezve az egyenletet: $x^4 - x = x(x^3 - 1) = x(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$. A megoldások: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. *c)* Az egyenlet: $x^4 = 2x^2$. Átrendezve az egyenletet: $x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2) = x^2\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right) = 0$. A megoldások: $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = \sqrt{2}$.

2. feladatlap

2.1. Az első egyenletből fejezzük ki az egyik ismeretlent, majd az így kapott kifejezést helyettesítsük be a második egyenletbe! A rendezés után kapott másodfokú egyenletet oldjuk meg! A megoldások első egyenletbe való visszahelyettesítésével megkapjuk az összetartozó értékpárokat. *a)* Az első egyenletből: $x = 6 - y$. A második egyenletbe való behelyettesítés után: $y(6 - y) = 8$. $y^2 - 6y + 8 = 0$. A megoldások: $y_1 = 2$, $x_1 = 4$; $y_2 = 4$, $x_2 = 2$. *b)* Az első egyenletből: $x = y - 3$. A második egyenletbe való behelyettesítés után: $y(y-3) = 4$. $y^2 - 3y - 4 = 0$. A megoldások: $y_1 = -1$, $x_1 = -4$; $y_2 = 4$, $x_2 = 1$. *c)* Az első egyenletből: $x = 7 + 2y$. A második egyenletbe való behelyettesítés után: $y(7 + 2y) = 4$. $2y^2 + 7y - 4 = 0$. A megoldások: $y_1 = -4$, $x_1 = -1$; $y_2 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 8$. *d)* Az első egyenletből: $2x = 15 + 3y$. A második egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg 2-vel, majd helyettesítsünk be $2x$ helyébe: $2xy = -12$; $y(15 + 3y) = -12$. $y^2 + 5y + 4 = 0$. A megoldások: $y_1 = -1$, $x_1 = 6$; $y_2 = -4$, $x_2 = \frac{3}{2}$.

2.2. Az elsőfokú egyenletből kifejezzük az egyik ismeretlent, majd behelyettesítjük a második egyenletbe, és az így kapott másodfokú egyenletet megoldjuk. *a)* A második egyenletből: $y = 8 - x$. Az első egyenlet: $x^2 + (8 - x)^2 = 50$; $x^2 - 8x + 7 = 0$. A megoldások: $x_1 = 1$, $y_1 = 7$; $x_2 = 7$, $y_2 = 1$. *b)* A második egyenletből: $x = 9 + y$. Az első egyenlet: $2(9 + y) - 3y + (9 + y)y = 11$; $y^2 + 8y + 7 = 0$. A megoldások: $y_1 = -1$, $x_1 = 8$; $y_2 = -7$, $x_2 = 2$. *c)* A második egyenletből: $y = 2x - 13$. Az első egyenlet: $x^2 - x(2x - 13) + (2x - 13)^2 + 2(2x - 13) = 43$; $3x^2 - 35x + 100 = 0$. A megoldások: $x_1 = 6\frac{2}{3}$, $y_1 = \frac{1}{3}$; $x_2 = 5$, $y_2 = -3$.

2.3. Az új változók: $u = x + y$, $v = xy$. *a)* Az egyenletek: $u^2 + 3v = 79$, $u^2 - 2v = 29$. A megoldások: $v = 10$, $u_1 = -7$, $u_2 = 7$. Az egyik egyenletrendszer: $xy = 10$, $x + y = 7$. $x^2 - 7x + 10 = 0$. A megoldások: $x_1 = 2$, $y_1 = 5$; $x_2 = 5$, $y_2 = 2$. A másik egyenletrendszer: $xy = 10$, $x + y = -7$. $x^2 + 7x + 10 = 0$. A megoldások: $x_3 = -5$, $y_3 = -2$; $x_4 = -2$, $y_4 = -5$. *b)* Az egyenletek: $5u - v = 20$, $2u^2 - u + v = 556$. A megoldások: $u_1 = -18$, $v_1 = -110$; $u_2 = 16$, $v_2 = 60$. Az egyik egyenletrendszer: $xy = -110$, $x + y = -18$. $x^2 + 18x - 110 = 0$. A megoldások: $x_1 = -9 - \sqrt{191} = -22{,}82$, $y_1 = -9 + \sqrt{191} = 4{,}82$; $x_2 = -9 + \sqrt{191} = 4{,}82$, $y_2 = -9 - \sqrt{191} = -22{,}82$. A másik egyenletrendszer: $xy = 60$, $x + y = 16$. $x^2 - 16x + 60 = 0$. A megoldások: $x_3 = 10$, $y_3 = 6$; $x_4 = 6$, $y_4 = 10$. *c)* Az egyenletek: $u + v = 9$, $u \cdot v = 20{,}25$. A megoldások: $u = 4{,}5$, $v = 4{,}5$. Az egyenletrendszer: $xy = 4{,}5$, $x + y = 4{,}5$. $y^2 - 4{,}5y + 4{,}5 = 0$. A megoldások: $y_1 = 3$, $x_1 = 1{,}5$; $y_2 = 1{,}5$, $x_2 = 3$. *d)* Az új változók: $u = x - y$, $v = xy$. Az egyenletek: $u^2 - v = 4$, $2u^2 + 3v = 68$. A megoldások: $v = 12$, $u_1 = -4$, $u_2 = 4$. Az egyik egyenletrendszer: $xy = 12$, $x + y = -4$. $y^2 - 4y - 12 = 0$. A megoldások: $x_1 = 2$, $y_1 = 6$; $x_2 = -2$, $y_2 = -6$. A másik egyenletrendszer: $xy = 12$, $x + y = 4$. $y^2 + 4y - 12 = 0$. A megoldások: $x_3 = -6$, $y_3 = -2$; $x_4 = 6$, $y_4 = 2$.

2.4. A derékszögű háromszög két befogója a és b. A háromszög területe $t = \frac{a \cdot b}{2} = 58{,}8$, innen $ab = 117{,}6$. Emeljük négyzetre mind a két oldalt $a^2b^2 = 13\,829{,}76$! Az átfogó pedig $a^2 + b^2 = c^2 = 331{,}24$. $u = a^2$, $v = b^2$ új változók esetén az egyenletek $u \cdot v = 117{,}6$, $u + v = 331{,}24$. Az egyenletrendszer megoldásai $u_1 = 49$, $v_1 = 282{,}24$, $u_2 = 282{,}24$, $v_2 = 49$. Az oldalhosszúság negatív nem lehet, így a negatív megoldásoktól tekintsünk el! A megoldások: $a_1 = 7$ cm, $b_1 = 16{,}8$ cm; $a_2 = 16{,}8$ cm, $b_2 = 7$ cm.

3. feladatlap

3.1. *a)* $16^{\frac{1}{4}} = 2$, mert $2^4 = 16$; *b)* $27^{\frac{1}{3}} = 3$, mert $3^3 = 27$; *c)* $625^{\frac{1}{4}} = 5$, mert $5^4 = 625$; *d)* $0{,}125^{\frac{1}{3}} = 0{,}5$, mert $0{,}5^3 = 0{,}125$; *e)* $0{,}00001^{\frac{1}{5}} = 0{,}1$, mert $0{,}1^5 = 0{,}00001$; *f)* $0{,}0625^{\frac{1}{4}} = 0{,}5$, mert $0{,}5^4 = 0{,}0625$.

3.2. *a)* $32^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{32^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{2}$; *b)* $125^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{125^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$; *c)* $64^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{64^{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$; *d)* $\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} = 27^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$;

e) $\left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}} = 32^{\frac{3}{5}} = 2^3 = 8$; *f)* $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{3}{4}} = 81^{\frac{3}{4}} = 3^3 = 27.$

3.3. *a)* $\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$; *b)* $\sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}}$; *c)* $\sqrt{5^3} = 5^{\frac{3}{2}}$; *d)* $\sqrt[5]{\left(\frac{5}{7}\right)^2} = \left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{2}{5}}$; *e)* $\sqrt[12]{a^5} = a^{\frac{5}{12}}$; *f)* $\sqrt[11]{\left(\frac{a}{b}\right)^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{11}}$.

3.4. *a)* $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{5}\right)^{-4}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{4}{3}} = 5^{\frac{4}{3}}$; *b)* $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$; *c)* $\sqrt[5]{\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{5}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{5}}$.

3.5. *a)* $7^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{7^3}$; *b)* $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$; *c)* $a^{\frac{5}{2}} = \sqrt{a^5}$; *d)* $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{3}{4}\right)^2}$; *e)* $0{,}1^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0{,}1}$; *f)* $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{a}{b}\right)^3}$.

3.6. *a)* $\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\frac{4}{3}}$; *b)* $\left(\frac{5}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^3}$; *c)* $\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{b}{a}}$.

3.7. *a)* $3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{5}{4}} = 3^{\frac{8+15}{12}} = 3^{\frac{23}{12}} = \sqrt[12]{3^{23}}$; *b)* $4^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{3}{4}} \cdot 4^{\frac{5}{12}} = 4^{\frac{4+9+5}{12}} = 4^{\frac{18}{12}} = 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = 8$;

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{5}{4}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{8+15}{12}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{23}{12}} = \sqrt[12]{\left(\frac{3}{4}\right)^{23}}$; *d)* $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{3}{5}} = a^{\frac{5+6}{10}} = a^{\frac{11}{10}} = \sqrt[10]{a^{11}}$; *e)* $3^{\frac{3}{5}} : 3^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{12-5}{20}} = 3^{\frac{7}{20}} = \sqrt[20]{3^7}$;

f) $5^{\frac{2}{3}} : 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{4-3}{6}} = 5^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{5}$; *g)* $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{5}} : \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{9-5}{15}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{4}{15}} = \sqrt[15]{\left(\frac{3}{4}\right)^4}$; *h)* $a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{5-4}{10}} = a^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{a}$.

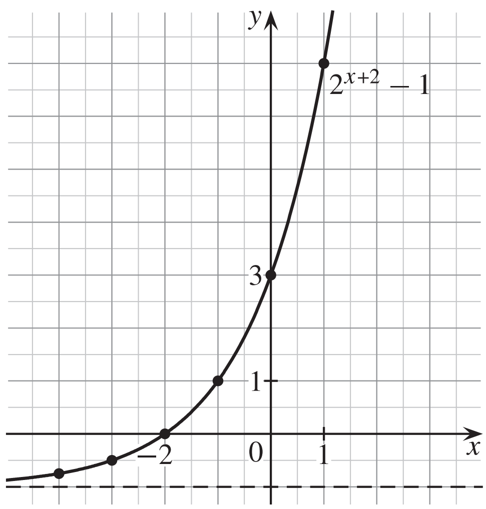
3.8. *a)* $\left(\sqrt[4]{10^3} \cdot 10^{\frac{2}{5}}\right)^3 = \left(10^{\frac{3}{4}} \cdot 10^{\frac{2}{5}}\right)^3 = 10^{\frac{9}{4}} \cdot 10^{\frac{6}{5}} = 10^{\frac{45+24}{20}} = 10^{\frac{69}{20}} = \sqrt[20]{10^{69}}$; *b)* $\left(\frac{\sqrt{2} \cdot 2^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[4]{2^3}}\right)^2 = \left(\frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{3}{4}}}\right)^2 = \frac{2 \cdot 2^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{3}{2}}} = 2^{\frac{6+4-9}{6}} = 2^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2}$;

c) $\left(\frac{a^{\frac{3}{10}} \cdot \sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[4]{a}}\right)^4 = \left(\frac{a^{\frac{3}{10}} \cdot a^{\frac{3}{5}}}{a^{\frac{1}{4}}}\right)^4 = \frac{a^{\frac{6}{5}} \cdot a^{\frac{12}{5}}}{a} = a^{\frac{6+12-5}{5}} = a^{\frac{13}{5}} = \sqrt[5]{a^{13}}$; *d)* $\sqrt{a^{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt[3]{a^{\frac{3}{5}}} = a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{5+4}{20}} = a^{\frac{9}{20}} = \sqrt[20]{a^9}$;

e) $\sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[5]{2^{\frac{1}{6}}}}} = \sqrt{2 \cdot \sqrt[15]{2^5 \cdot 2^{\frac{1}{6}}}} = \sqrt{2 \cdot \sqrt[15]{2^{\frac{31}{6}}}} = \sqrt[30]{2^{15} \cdot 2^{\frac{31}{6}}} = \sqrt[30]{2^{\frac{121}{6}}} = 2^{\frac{121}{180}} = \sqrt[180]{2^{121}}$;

f) $\frac{a \cdot \sqrt[3]{a\sqrt[4]{a^3}}}{\sqrt[5]{a^2}} = \frac{a \cdot \sqrt[3]{a \cdot a^{\frac{3}{4}}}}{a^{\frac{2}{5}}} = \frac{a \cdot \sqrt[3]{a^{\frac{7}{4}}}}{a^{\frac{2}{5}}} = \frac{a \cdot a^{\frac{7}{12}}}{a^{\frac{2}{5}}} = a^{\frac{60+35-24}{60}} = a^{\frac{71}{60}} = \sqrt[60]{a^{71}}$.

4. feladatlap



4.1. *a)* A grafikonról leolvasva látszik, hogy függvény értékkészlete $]-1;\ \infty[$.

b) Zérushelynél a függvény értéke 0. Vagy megoldjuk a $2^{x+2} - 1 = 0$ egyenletet, vagy leolvassuk azt a pontot, ahol a grafikon metszi az x tengelyt. A zérushely $x = -2$.

c) A $2^{x+2} - 1 = 0$ egyenletbe helyettesítjük az $x = 0$-t, vagy leolvassuk a grafikonról az értéket. A $(0;3)$ pontban metszi az y tengelyt.

d) Helyettesítsük be a függvénybe az $x = -3$ értéket! Ha $-0{,}5$-et kapunk, akkor a grafikonon van a pont, ha nem, akkor nincs rajta. $2^{-3+2} - 1 = 2^{-1} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -0{,}5.$ Tehát pontja a grafikonnak.

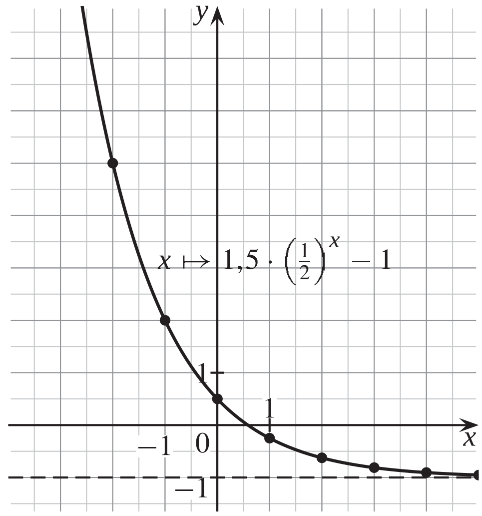
4.2. *a)* *Az* értékkészlet $]-1;\infty[$.

b) Szigorúan monoton csökken.

c) Helyettesítsük be a $x=2$ helyettesítési értékét! $1{,}5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x-1=$
$=1{,}5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-1=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}-1=\frac{3}{8}-1=-\frac{5}{8}$.

d) Oldjuk meg az $1{,}5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x-1=2$ egyenletet! $\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x=3$; $\left(\frac{1}{2}\right)^x=2$;

$x=-1$. Tehát -1 -nél veszi fel a 2 értéket.



4.3. A függvény átalakítható a hatványozás azonosságai alapján.

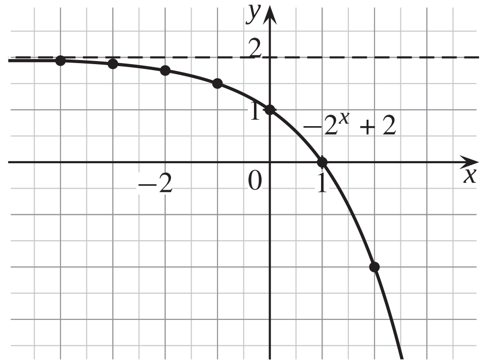
$x\mapsto-(4)^{\frac{1}{2}x}+2=-\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^x+2=-2^x+2$.

a) A függvény értékkészlete: $]-\infty;2[$.

b) Szigorúan monoton csökken.

c) A grafikonról leolvasva a $]-\infty;1[$ intervallumban pozitív a függvény.

d) Helyettesítsük be a $x=2$ helyettesítési értékét! $-(4)^{\frac{1}{2}\cdot2}+2=-(4)+2=-2$.

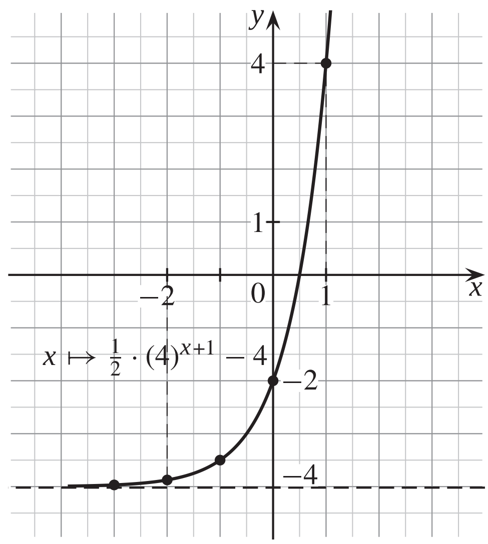


4.4. *a)* *A* függvény értékkészlete: $\left[-\frac{31}{8};4\right]$.

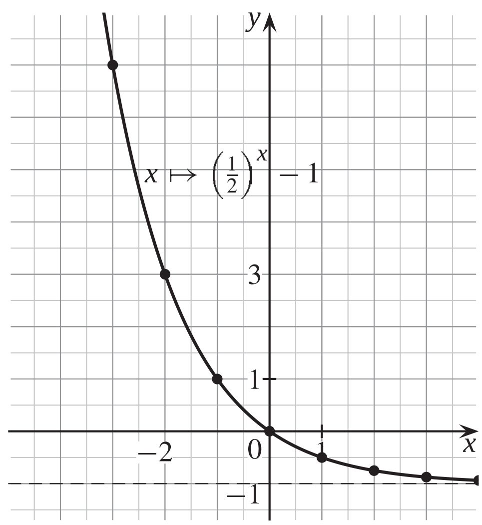
b) Helyettesítsük be a függvény képletébe a pont x koordinátáját. Ha az így kapott függvényérték megegyezik a pont y koordinátájával, akkor a pont rajta van a grafikonon, egyébként pedig nem.

A: $y=\frac{1}{2}\cdot(4)^{0{,}5+1}-4=\frac{1}{2}\cdot(4)^{\frac{3}{2}}-4=\frac{1}{2}\cdot2^3-4=0$. Az *A* pont pontja a grafikonnak. *B*: $y=\frac{1}{2}\cdot(4)^{0+1}-4=\frac{1}{2}\cdot4-4=2-4=-2$. A *B* pont nem pontja a grafikonnak. *C*: $y=\frac{1}{2}\cdot(4)^{-0{,}5+1}-4=\frac{1}{2}\cdot(4)^{\frac{1}{2}}-4=\frac{1}{2}\cdot2-4=-3$.

A *C* pont pontja a grafikonnak. *D*: $y=\frac{1}{2}\cdot(4)^{-1{,}5+1}-4=\frac{1}{2}\cdot(4)^{-\frac{1}{2}}-4=$
$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-4=\frac{1}{4}-4=-\frac{15}{4}=-3{,}75$. A *D* pont nem pontja a grafikonnak.



4.5. Értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$. Értékkészlet: $]-1;\infty[$. Zérushely: 0. Nem növekszik. Szigorúan monoton csökken. Nincsenek szélsőértékhelyek és szélsőértékek. Nem páros, nem páratlan, nem periodikus.

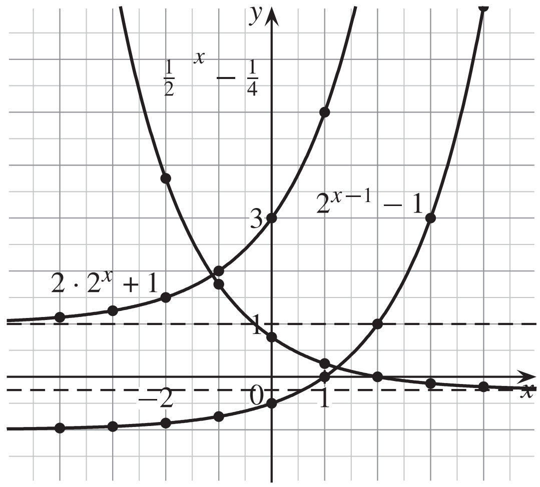


4.6. Helyettesítsük be a pont koordinátáit a függvénybe!

a) $3 = a \cdot 2^0 + 1$; $3 = a + 1$; $a = 2$. A függvény $f(x) = 2 \cdot 2^x + 1$ alakú.

b) $0 = 2^{1+b} - 1$; $1 = 2^{1+b}$; $2^0 = 2^{1+b}$; $b = -1$. A függvény $g(x) = 2^{x-1} - 1$ alakú.

c) $0 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + c$. $c = -\frac{1}{4}$. A függvény $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - \frac{1}{4}$ alakú.



5. feladatlap

5.1 *a)* $2^{\log_2 5} = 5$; *b)* $10^{\lg 6} = 6$; *c)* $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 7} = 7$; *d)* $9^{\log_9 10} = 10$; *e)* $10^{\lg \frac{5}{3}} = \frac{5}{3}$; *f)* $\left(\frac{10}{7}\right)^{\log_{\frac{10}{7}} \frac{7}{10}} = \frac{7}{10}$.

5.2. *a)* $\log_2 8 = 3$; *b)* $\log_3 9 = 2$; *c)* $\log_5 125 = 3$; *d)* $\log_2 2 = 1$; *e)* $\log_3 3 = 1$; *f)* $\log_5 5 = 1$; *g)* $\log_2 16 = 4$; *h)* $\log_3 1 = 0$; *i)* $\log_5 1 = 0$.

5.3. *a)* $\log_2 \frac{1}{2} = -1$; *b)* $\log_3 \frac{1}{9} = -2$; *c)* $\log_5 \frac{1}{125} = -3$; *d)* $\log_2 0{,}25 = -2$; *e)* $\log_3 \frac{1}{27} = -3$; *f)* $\log_5 0{,}2 = -1$; g) $\log_2 0{,}125 = -3$; *h)* $\log_3 \frac{1}{81} = -4$; *i)* $\log_5 0{,}04 = -2$.

5.4. *a)* $\lg 100 = 2$; *b)* $\lg 10\,000 = 4$; *c)* $\lg 0{,}01 = -2$; *d)* $\lg 0{,}000\,01 = -5$; *e)* $\lg(0{,}01 \cdot 100) = \lg 1 = 0$; *f)* $\lg \sqrt{0{,}01} = \lg 0{,}1 = -1$.

5.5. *a)* $\log_2 2^n = n$; *b)* $\log_3 3^m = m$; *c)* $\log_a a^3 = 3$; *d)* $\log_b b^{-1} = -1$; *e)* $\log_c c^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$; *f)* $\log_d d^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}$.

5.6. *a)* $\log_2 \frac{1}{2^6} = \log_2 2^{-6} = -6$; *b)* $\lg \frac{1}{10^{12}} = \lg 10^{-12} = -12$; *c)* $\log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$; *d)* $\lg \sqrt[3]{10^2} = \lg 10^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$;

e) $\log_2 \frac{1}{\sqrt[4]{2^5}} = \log_2 2^{-\frac{5}{4}} = -\frac{5}{4}$; *f)* $\lg \frac{1}{\sqrt[4]{10^3}} = \lg 10^{-\frac{3}{4}} = -\frac{3}{4}$; *g)* $\log_a \sqrt[12]{a^{11}} = \log_a a^{\frac{11}{12}} = \frac{11}{12}$; *h)* $\log_a \frac{1}{\sqrt[9]{a^8}} = \log_a a^{-\frac{8}{9}} = -\frac{8}{9}$.

5.7. *a)* $x = 128$; *b)* $x = 144$; *c)* $x = 10\,000$; *d)* $x = \frac{1}{2}$; *e)* $x = a$; *f)* $x = a^3$; *g)* $x = \sqrt{5}$; *h)* $x = \frac{1}{\sqrt[4]{5^3}}$; *i)* $x = \frac{1}{\sqrt[3]{10^5}}$.

5.8. *a)* $x = 2$; *b)* $x = 4$; *c)* $x = 8$; *d)* $x = 64$; *e)* $x = 5$; *f)* $x = 25$; *g)* $x = 2$; *h)* $x = 2$; *i)* $x = 3$.

5.9. *a)* $2^{2+\log_2 5} = 2^2 \cdot 2^{\log_2 5} = 4 \cdot 5 = 20$; *b)* $5^{1+\log_5 6} = 5^1 \cdot 5^{\log_5 6} = 5 \cdot 6 = 30$; *c)* $5 \cdot 2^{3-\log_2 5} = 5 \cdot \frac{2^3}{2^{\log_2 5}} = 5 \cdot \frac{8}{5} = 8$; *d)* $7^{1-\log_7 3} = \frac{7^1}{7^{\log_7 3}} = \frac{7}{3}$;

e) $5^{2 \cdot \log_5 3} = \left(5^{\log_5 3}\right)^2 = 3^2 = 9$; *f)* $\left(\frac{1}{2}\right)^{3 \cdot \log_{\frac{1}{2}} 5} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 5}\right)^3 = 5^3 = 125$.

5.10. *a)* $\lg 2{,}11 = 0{,}324$; *b)* $\lg 11{,}5 = 1{,}06$; *c)* $\lg 4{,}63 = 0{,}666$; *d)* $\lg 0{,}276 = -0{,}559$; *e)* $\lg 0{,}25 = -0{,}602$; *f)* $\lg 0{,}3 = -0{,}523$.

5.11. *a)* $x = 3{,}31$; *b)* $x = 398$; *c)* $x = 1700$; *d)* $x = 0{,}457$; *e)* $x = 0{,}0214$; *f)* $x = 0{,}0132$.

6. feladatlap

6.1. *a)* $\lg 8+\lg 125=\lg 8\cdot 125=\lg 1000=3$; *b)* $\log_{12}3+\log_{12}6+\log_{12}8=\log_{12}3\cdot 6\cdot 8=\log_{12}144=2$;

c) $\log_5 35+\log_5 75-\log_5 21=\log_5\dfrac{35\cdot 75}{21}=\log_5 125=3$; *d)* $\log_4 60-\log_4 3-\log_4 5=\log_4\dfrac{60}{5\cdot 3}=\log_4 4=1$.

6.2. *a)* $\lg(30x)+\lg\dfrac{100}{3x}=\lg\left(30x\cdot\dfrac{100}{3x}\right)=\lg 1000=3$; *b)* $\log_2(2a)+\log_2\dfrac{4}{a}=\log_2\left(2a\cdot\dfrac{4}{a}\right)=\log_2 8=3$;

c) $\log_5(25x)-\log_5\dfrac{x}{5}=\log_5\dfrac{25x}{\frac{x}{5}}=\log_5 125=3$; *d)* $\log_4\dfrac{a}{8}-\log_4\dfrac{a}{2}=\log_4\dfrac{\frac{a}{8}}{\frac{a}{2}}=\log_4\dfrac{1}{4}=-1$.

6.3. *a)* $\log_6 2^5+\log_6 3^5=\log_6\left(2^5\cdot 3^5\right)=\log_6 6^5=5$; *b)* $\log_{12}3^3+\log_{12}2^6=\log_{12}3^3\cdot 2^6=\log_{12}3^3\cdot(2^2)^3=\log_{12}12^3=3$;

c) $\log_5 1000-\log_5 2^3=\log_5\dfrac{1000}{2^3}=\log_5 125=3$; *d)* $\log_4 8^6-\log_4 2^6=\log_4\dfrac{8^6}{2^6}=\log_4\left(\dfrac{8}{2}\right)^6=\log_4 4^6=6$.

6.4. *a)* $\dfrac{1}{3}\lg 27-\dfrac{2}{3}\lg 8+2\lg 5=\lg\dfrac{\sqrt[3]{27}\cdot 5^2}{\sqrt[3]{8^2}}=\lg\dfrac{3\cdot 25}{4}=\lg\dfrac{3\cdot 25}{4}=\lg 18{,}75,\quad x=18{,}75$;

b) $\dfrac{1}{2}\lg 6+\dfrac{1}{2}\lg 8-\lg\sqrt{3}=\lg\dfrac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{8}}{\sqrt{3}}=\lg\sqrt{16}=\lg 4,\quad x=4$; *c)* $3\log_3 5\cdot\sqrt[3]{2}-2\log_3 5=\log_3\dfrac{5^3\cdot 2}{5^2}=\log_3(5\cdot 2)=\log_3 10,\quad x=10$;

d) $3\lg 2-2\lg 3+\dfrac{1}{2}\lg 36=\lg\dfrac{2^3\cdot\sqrt{36}}{3^2}=\lg\dfrac{2^3\cdot 6}{3^2}=\lg\dfrac{16}{3},\quad x=\dfrac{16}{3}$.

6.5. *a)* $5^{\log_5 6-\log_5 3}=\dfrac{5^{\log_5 6}}{5^{\log_5 3}}=\dfrac{6}{3}=2$; *b)* $11^{\log_{11}42+\log_{11}21-\log_{11}1764}=\dfrac{11^{\log_{11}42}\cdot 11^{\log_{11}21}}{11^{\log_{11}1764}}=\dfrac{42\cdot 21}{1764}=0{,}5$;

c) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}}5{,}4-\log_{\frac{2}{3}}0{,}6+\log_{\frac{2}{3}}0{,}05}=\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}}5{,}4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}}0{,}05}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}}0{,}6}}=\dfrac{5{,}4\cdot 0{,}05}{0{,}6}=0{,}45$; *d)* $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2\log_{\frac{3}{4}}5-\log_{\frac{3}{4}}2-\log_{\frac{3}{4}}\frac{5}{4}}=\dfrac{\left(\frac{3}{4}\right)^{2\log_{\frac{3}{4}}5}}{\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_{\frac{3}{4}}2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_{\frac{3}{4}}\frac{5}{4}}}=\dfrac{5^2}{2\cdot\frac{5}{4}}=10$.

6.6. *a)* $\log_2 6=\dfrac{\lg 6}{\lg 2}=2{,}58$; *b)* $\log_{0{,}5}5{,}6=\dfrac{\lg 5{,}6}{\lg 0{,}5}=-2{,}49$; *c)* $\log_{\frac{4}{3}}\dfrac{9}{11}=\dfrac{\lg\frac{9}{11}}{\lg\frac{4}{3}}=-0{,}698$; *d)* $\log_{12}0{,}012=\dfrac{\lg 0{,}012}{\lg 12}=-1{,}78$.

6.7. *a)* $\log_2 6=\log_2(2\cdot 3)=\log_2 2+\log_2 3=1+1{,}585=2{,}585$; *b)* $\log_2 9=\log_2 3^2=2\cdot\log_2 3=2\cdot 1{,}585=3{,}17$;

c) $\log_2 12=\log_2 2^2+\log_2 3=2+\log_2 3=2+1{,}585=3{,}585$;

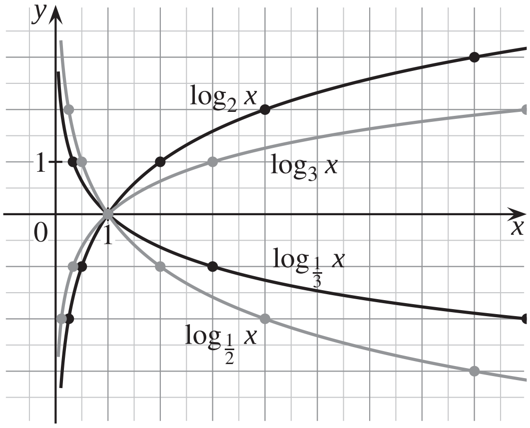
d) $\log_2 18=\log_2 2\cdot 3^2=\log_2 2+\log_2 3^2=1+2\cdot\log_2 3=1+2\cdot 1{,}585=4{,}17$.

7. feladatlap

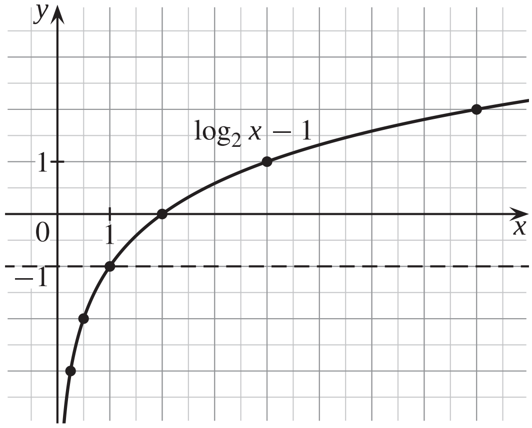
7.1. *a)* $2x>0,\ x>0$; *b)* $2x+4{,}5>0,\ x>-2{,}25$; *c)* $-x>0,\ x<0$; *d)* $x^2>0,\ x\neq 0$; *e)* $1-x>0,\ 1>x$;

f) $(-x)^2>0,\ x\neq 0$; *g)* $x^2-4x+3>0$. Szorzattá alakítás után $(x-3)(x-1)>0$. $x<1$ vagy $3<x$. *h)* $x^2+3x+2>0$. Szorzattá alakítás után $(x+2)(x+1)>0$. $x<-2$ vagy $-1<x$.

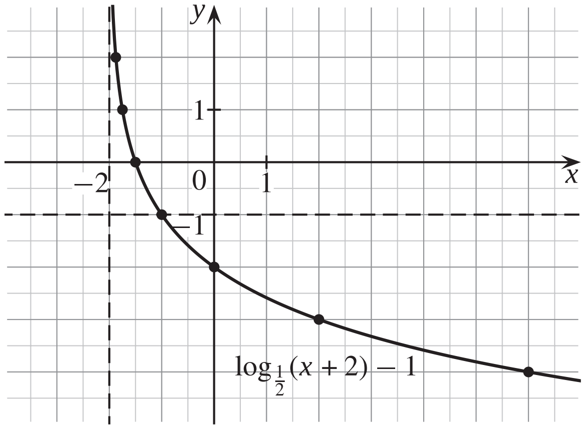
7.2.



7.3. Értelmezési tartomány: $\mathbb{R}^+$. Értékkészlet: $\mathbb{R}$. Zérushely: $x = 2$. Növekedés: szigorúan monoton nő. Csökkenés: nincs. Nincsenek szélsőértékek. Nem páros, nem páratlan, nem periodikus.



7.4. Értelmezési tartomány: $]-2;\infty[$. Értékkészlet: $\mathbb{R}$. Zérushely: $x = -\frac{3}{2}$. Növekedés: nincs. Csökkenés: szigorúan monoton csökken. Nincsenek szélsőértékek. Nem páros, nem páratlan, nem periodikus.



7.5. *a)* Értékkészlet: $\mathbb{R}$.

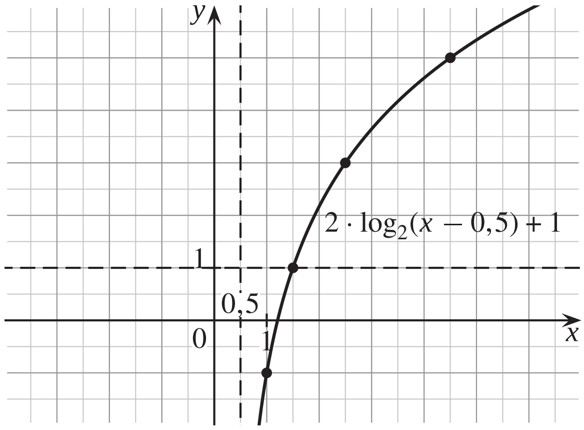
b) Helyettesítsük be a függvény képletébe a pont *x* koordinátáját. Ha az így kapott függvényérték megegyezik a pont *y* koordinátájával, akkor a pont rajta van a grafikonon, egyébként pedig nem.

A: $y = 2\log_2(1-0{,}5)+1 = 2\log_2 0{,}5+1 = -2+1 = -1$. Az A pont pontja a grafikonnak.

B: $y = 2\log_2(0{,}5-0{,}5)+1 = 2\log_2 0+1$.

Értelmetlen kifejezés. A B pont nem pontja a grafikonnak.

C: $y = 2\log_2(0-0{,}5)+1 = 2\log_2(-0{,}5)+1$. Értelmetlen kifejezés. A C pont nem pontja a grafikonnak.



D: $y = 2\log_2(4{,}5-0{,}5)+1 = 2\log_2 4+1 = 4+1 = 5$. A D pont pontja a grafikonnak.

8. feladatlap

8.1. Annál a lépésnél, ahol az egyenlet megoldása során felhasználjuk, hogy az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű függvény, ott a k.e.f. rövidítést használjuk. *a)* $2^x = 2^3$; k.e.f.; $x = 3$. *b)* $3 \cdot 2^x = 3 \cdot 2^5$; k.e.f.; $x = 5$. *c)* $2^{2x-3} = 2^4$; k.e.f.; $2x - 3 = 4$; $x = 3{,}5$. *d)* $(2)^{3^x} = 2^9$; k.e.f.; $3^x = 9$; k.e.f.; $x = 2$. *e)* $5^{2x-4} = 5^{-1}$; k.e.f.; $2x - 4 = -1$; $x = 1{,}5$. *f)* $2^{x^2-3x+4} = 2^2$; k.e.f.; $x^2 - 3x + 4 = 2$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. *g)* $3^{x^2-4x+3} = 3^0$; k.e.f.; $x^2 - 4x + 3 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. *h)* $4^{(x+1)(x-2)} = 4^0$; k.e.f.; $(x+1)(x-2) = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. *i)* Nincs megoldás. *j)* Nincs megoldás.

8.2. *a)* $\frac{2^x}{3^x} = 1$; $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$; k.e.f.; $x = 0$. *b)* $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} = \frac{2}{3}$; k.e.f.; $x - 2 = 1$; $x = 3$. *c)* $(5^2)^x = (7^3)^x$; $\left(\frac{5^2}{7^3}\right)^x = 1$; k.e.f.; $x = 0$. *d)* $\left(\frac{2^2}{3^2}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$; k.e.f.; $x = -2{,}5$. *e)* $\left(\frac{2^2}{3^2}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2^4}{3^4}$; $\left(\frac{2^2}{3^2}\cdot\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^4$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$; k.e.f.; $3x = 4$; $x = \frac{4}{3}$. *f)* $(2 \cdot 5)^x = 10^3$; k.e.f.; $x = 3$.

8.3. *a)* $3^x + 3^{x+1} = 12$; $3^x + 3 \cdot 3^x = 12$; $4 \cdot 3^x = 12$; $3^x = 3$; k.e.f.; $x = 1$. *b)* $2^x + 2 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^x = 28$; $7 \cdot 2^x = 28$; $2^x = 2^2$; k.e.f.; $x = 2$. *c)* $2^3 \cdot 2^x - 3^x = 3 \cdot 3^x - 2^x$; $2^3 \cdot 2^x + 2^x = 3 \cdot 3^x + 3^x$; $9 \cdot 2^x = 4 \cdot 3^x$; $\frac{2^x}{3^x} = \frac{4}{9}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^2$; k.e.f.; $x = 2$.

d) $2^{2x+1} + 2^{2(x+1)} - 2^{2(x-1)} = 92$; $2 \cdot 2^{2x} + 4 \cdot 2^{2x} - \frac{1}{4} \cdot 2^{2x} = 92$; $\frac{23}{4} \cdot 2^{2x} = 92$; $2^{2x} = 16 = 2^4$; k.e.f.; $x = 2$.

8.4. *a)* Az új változó: $u = 2^x$. $u^2 - 5u + 4 = 0$; $u_1 = 1$, $u_2 = 4$. $2^x = 1$; k.e.f.; $x_1 = 0$. $2^x = 2^2$; k.e.f.; $x_2 = 2$.

b) Az új változó: $u = 3^x$. $u^2 + 2u - 3 = 0$; $u_1 = 1$, $u_2 = -3$. $3^x = 1$; k.e.f.; $x_1 = 0$. $3^x = -3$ egyenlet nem megoldható.

c) Az új változó: $u = 10^x$. $u + \frac{10}{u} = 11$; $u^2 - 11u + 10 = 0$; $u_1 = 1$, $u_2 = 10$. $10^x = 1$; k.e.f.; $x_1 = 0$. $10^x = 10$; k.e.f.; $x_2 = 1$. *d)* Az új változó: $u = 2^x$. $u^2 - 8u = 0$; $u_1 = 8$, $u_2 = 0$. $2^x = 2^3$; k.e.f.; $x_1 = 3$. $2^x = 0$ egyenlet nem megoldható. *e)* Az új változó: $u = 2^x$. $2u^2 + u - 1 = 0$; $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = -1$. $2^x = 2^{-1}$; k.e.f.; $x_1 = -1$. $2^x = -1$ egyenlet nem megoldható. *f)* Az új változó: $u = 3^x$. $3u^2 - 10u + 9 = 0$ egyenlet diszkriminánsa $D = 100 - 108 = -8$ negatív, így az egyenlet nem megoldható.

8.5. *a)* Vegyük mindkét oldal tízes alapú logaritmusát! $\lg 3^x = \lg 12$; $x \lg 3 = \lg 12$; $x = \frac{\lg 12}{\lg 3}$; $x = 2{,}26$. *b)* $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} = \frac{4}{5}$; $(x+1)\lg\frac{1}{3} = \lg\frac{4}{5}$; $x + 1 = \frac{\lg\frac{4}{5}}{\lg\frac{1}{3}} = 0{,}203$; $x = -0{,}797$. *c)* $8 \cdot 2^x - 2 \cdot 2^x + 2^x = 5$; $7 \cdot 2^x = 5$; $2^x = \frac{5}{7}$; $x \lg 2 = \lg\frac{5}{7}$; $x = \frac{\lg\frac{5}{7}}{\lg 2}$; $x = -0{,}485$. *d)* $2^{2x} - 8 \cdot 2^x + 15 = 0$. Az új változó: $u = 2^x$. $u^2 - 8u + 15 = 0$; $u_1 = 3$, $u_2 = 5$. $2^x = 3$; $x = \frac{\lg 3}{\lg 2}$; $x_1 = 1{,}58$. $2^x = 5$; $x = \frac{\lg 5}{\lg 2}$; $x_2 = 2{,}32$.

9. feladatlap

9.1. Annál a lépésnél, ahol az egyenlet megoldása során felhasználjuk, hogy a logaritmus függvény kölcsönösen egyértelmű függvény, ott a k.e.f. rövidítést használjuk.

Az $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$ definíció alkalmazása d.sz. (definíció szerint).

a) Kikötés: $x > 0$. $\lg x = \lg 15$; k.e.f.; $x = 15$. *b)* Kikötés: $x > 0$. $\lg x = 2$; d.sz.; $x = 100$. *c)* Kikötés: $x > 0$. $\lg x = -1$; d.sz.; $x = 0{,}1$. *d)* Kikötés: $x < 0$. $\lg(-x) = -1$; d.sz.; $x = -0{,}1$. *e)* Kikötés: $x > 0$. $\lg\frac{x}{x+1} = 1$; d.sz.; $\frac{x}{x+1} = 10$; $x = 10(x+1)$;

$x=-\frac{10}{9}$. *f)* Kikötés: $x>\frac{1}{3}$. $\lg(3x-1)=\lg(x+1)$; k.e.f.; $3x-1=x+1$; $x=1$.

9.2. *a)* Kikötés: $x>0$. $\log_6 x=\log_6 6+\log_6 3$; $\log_6 x=\log_6 18$; k.e.f.; $x=18$.
b) Kikötés: $x>0$. $\log_6 x=\log_6 6-\log_6 3$; $\log_6 x=\log_6 2$; k.e.f.; $x=2$.
c) Kikötés: $x>5$. $\lg(x-5)=\lg 100-\lg 5=\lg\frac{100}{5}=\lg 20$; k.e.f.; $x-5=20$; $x=25$.
d) Kikötés: $x>0$. $\lg 2x=\lg 10+\lg 3$; $\lg 2x=\lg 30$; k.e.f.; $2x=30$; $x=15$.

9.3. *a)* Kikötés: $x>5$. $\log_2(x-5)\cdot(x+2)=\log_2 8$; k.e.f.; $(x-5)\cdot(x+2)=8$. $x^2-3x-18=0$; $x_1=-3$ nem megoldás; $x_2=6$ megoldás. *b)* Kikötés: $x>3$. $\log_4 x(x-3)=\log_4 16$; k.e.f.; $x(x-3)=16$; $x^2-3x-16=0$; $x_1=\frac{3+\sqrt{73}}{2}$ megoldás, $x_2=\frac{3-\sqrt{73}}{2}$ nem megoldás.

9.4. *a)* Kikötés: $3x-1>0$ és $3-x>0$, vagyis $\frac{1}{3}<x<3$. $\log_2(3x-1)=\log_2(3-x)$; k.e.f.; $3x-1=3-x$; $x=1$. *b)* Kikötés: $3x-1>0$ és $2x+2>0$, vagyis $\frac{1}{3}<x$. $\log_2\frac{3x-1}{2x+2}=\log_2 1$; k.e.f.; $\frac{3x-1}{2x+2}=1$; $3x-1=2x+2$; $x=3$. *c)* Kikötés: $2x-1>0$ és $x+1>0$ és $\log_2(x+1)\neq 0$, vagyis $x>\frac{1}{2}$. $\log_2(2x-1)=\log_2(x+1)$; k.e.f.; $2x-1=x+1$; $x=2$. *d)* Kikötés: $2x-5>0$ és $x+1>0$ és $\log_2(x+1)\neq 0$, vagyis $x>2{,}5$. $\log_2(2x-5)=\log_2(x+1)$; k.e.f.; $2x-5=x+1$; $x=6$.

9.5. Az ilyen típusú feladatoknál a kikötések eléggé bonyolulttá válhatnak. Inkább az eredmény helyességének ellenőrzése az egyszerűbb út. *a)* $\log_4\log_3\log_2 x=\log_4 1$; k.e.f.; $\log_3\log_2 x=1$; $\log_3\log_2 x=\log_3 3$; $\log_2 x=3$; definíció szerint; $x=8$. Ellenőrzés: $\log_4\log_3\log_2 8=\log_4\log_3 3=\log_4 1=0$. *b)* $\log_4\log_3\lg x=\log_4 4$; k.e.f.; $\log_3\lg x=4$; d.sz.; $\lg x=81$; $\lg x=\lg 10^{81}$; k.e.f.; $x=10^{81}$. Ellenőrzés: $\log_4\log_3\lg 10^{81}=\log_4\log_3 81=\log_4 4=1$. *c)* $\log_3\left(\log_2(\log_5 x+2)+7\right)=\log_3 9$; k.e.f.; $\log_2(\log_5 x+2)+7=9$; $\log_2(\log_5 x+2)=2$; $\log_2(\log_5 x+2)=\log_2 4$; k.e.f.; $\log_5 x+2=4$; $\log_5 x=2$; $\log_5 x=\log_5 25$; k.e.f.; $x=25$. Ellenőrzés: $\log_3\left(\log_2(\log_5 25+2)+7\right)=\log_3\left(\log_2(2+2)+7\right)=\log_3(\log_2 4+7)=\log_3(2+7)=\log_3(9)=2$.
d) $\log_5\left(\lg(\log_2 x-0{,}9)+6\right)=1$; $\log_5\left(\lg(\log_2 x-0{,}9)+6\right)=\log_5 5$; k.e.f.; $\lg(\log_2 x-0{,}9)+6=5$; $\lg(\log_2 x-0{,}9)=-1$; $\lg(\log_2 x-0{,}9)=\lg 0{,}1$; k.e.f.; $\log_2 x=1=\log_2 2$; k.e.f.; $x=2$. Ellenőrzés: $\log_5\left(\lg(\log_2 2-0{,}9)+6\right)=\log_5\left(\lg(1-0{,}9)+6\right)=$
$=\log_5(\lg 0{,}1+6)=\log_5(-1+6)=\log_5 5=1$.

9.6. *a)* Kikötés: $x>0$. Az új változó $u=\lg x$. $u^2-11u+10=0$; $u_1=1$, $u_2=10$. $\lg x=1$. $x_1=10$. $\lg x=10$. $x_2=10^{10}$.
b) Kikötés: $x>0$. Az új változó $u=\lg x$. $u^2-u-2=0$; $u_1=-1$, $u_2=2$. $\lg x=-1$. $x_1=0{,}1$. $\lg x=2$. $x_2=100$.
c) Kikötés: $x>0$. Az új változó $u=\lg x$. $6u^2+u-2=0$; $u_1=-\frac{2}{3}$, $u_2=\frac{1}{2}$. $\lg x=-\frac{2}{3}$. $x_1=\frac{1}{\sqrt[3]{100}}$. $\lg x=\frac{1}{2}$. $x_2=\sqrt{10}$.
d) Kikötés: $x>0$. Az új változó $u=\log_2 x$. $2u^2+u-1=0$; $u_1=-1$, $u_2=\frac{1}{2}$. $\log_2 x=-1$. $x_1=0{,}5$. $\log_2 x=\frac{1}{2}$. $x_2=\sqrt{2}$.

9.7. *a)* Kikötés: $x>-6$. $\lg x^2=\lg(x+6)$; k.e.f.; $x^2=x+6$; $x^2-x-6=0$. $x_1=-2$ megoldás; $x_2=3$ megoldás.
b) Kikötés: $x>6$. $\lg(x^2+6x)=\lg(x-6)$; k.e.f.; $x^2+5x+6=0$. $x_1=-2$ nem megoldás; $x_2=-3$ nem megoldás.
c) Kikötés: $x>0$. $2\lg x=\lg(2x+3)$; $\lg x^2=\lg(2x+3)$; k.e.f.; $x^2=2x+3$; $x^2-2x-3=0$. $x_1=-1$ nem megoldás; $x_2=3$ megoldás. *d)* Kikötés: $1<x<7$. $\lg(x-1)^2=\lg(-x+7)$; $(x-1)^2=(-x+7)$; $x^2-2x+1=-x+7$; $x^2-x-6=0$; k.e.f.; $x_1=-2$ nem megoldás; $x_2=3$ megoldás.

9.8. *a)* Kikötés: $x>2$. $\lg(x-2)+\lg(x+1)=1$; $\lg(x-2)(x+1)=\lg 10$; $(x-2)(x+1)=10$; $x^2-x-2=10$; $x^2-x-12=0$; k.e.f.; $x_1=-3$ nem megoldás; $x_2=4$ megoldás. *b)* Kikötés: $x>-3$. $\log_2(x+9)(x+3)=\log_2 16$; k.e.f.; $(x+9)(x+3)=16$; $x^2+12x+27=16$; $x^2+12x+11=0$. $x_1=-11$ nem megoldás; $x_2=-1$ megoldás. *c)* Kikötés: $x\in\mathbb{R}$. $\log_3(3x^2+4x+5)=\log_3 9$; k.e.f.; $3x^2+4x+5=9$; $3x^2+4x-4=0$. $x_1=-2$; $x_2=\frac{2}{3}$. *d)* Kikötés: $x\in\mathbb{R}$. $\log_2(x^2+x+6)=\log_2 8$; k.e.f.; $x^2+x+6=8$; $x^2+x-2=0$. $x_1=-2$; $x_2=1$.

10. feladatlap

10.1. *a)* $\underline{a}\cdot\underline{b}=4{,}5\cdot 1{,}2\cdot\cos 30°=4{,}677$; *b)* $\underline{a}\cdot\underline{b}=0\cdot 10\cdot\cos 15°=0$; *c)* $\underline{a}\cdot\underline{b}=2{,}4\cdot 5{,}25\cdot\cos 120°=-6{,}3$;

d) $\underline{a}\cdot\underline{b}=4\cdot 0\cdot\cos 85°=0$; *e)* $\underline{a}\cdot\underline{b}=2\cdot 5\cdot\cos 90°=0$; *f)* $\underline{a}\cdot\underline{b}=1\cdot 6\cdot\cos 60°=3$; *g)* $\underline{a}\cdot\underline{b}=4\cdot 1\cdot\cos 135°=-2{,}828$;

h) $\underline{a}\cdot\underline{b}=4\cdot 6\cdot\cos 0°=24$; *i)* $\underline{a}\cdot\underline{b}=4\cdot 6\cdot\cos 180°=-24$;

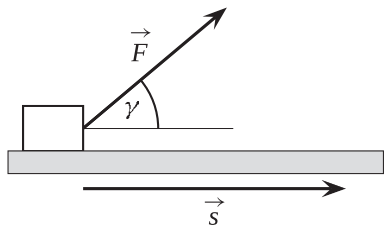
10.2. *a)* Ha a két vektor közül az egyik nullvektor, vagy a két vektor derékszöget zár közbe.

b) Ha egyik vektor sem nullvektor és a közbezárt szög nagyobb, mint $90°$. *c)* Ha egyik vektor sem nullvektor, és a közbezárt szög kisebb, mint $90°$. *d)* A másik vektornak az egységvektorra eső vetületének hosszát. *e)* Ha a közbezárt szög $0°$. *f)* Ha a közbezárt szög $180°$.

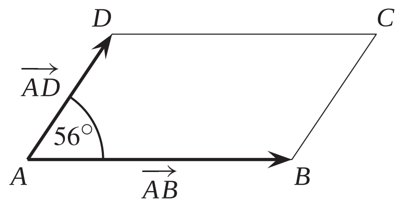
10.3. *a)* $\cos\gamma=\dfrac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|}=\dfrac{6}{2\cdot 3}=1$; $\gamma=0°$. *b)* $\cos\gamma=\dfrac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|}=\dfrac{-10}{5\cdot 4}=-0{,}5$; $\gamma=120°$;

c) $|\underline{b}|=\dfrac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{a}|\cdot\cos\gamma}=\dfrac{-4}{6\cdot\cos 120°}=\dfrac{4}{3}$; *d)* $|\underline{a}|=\dfrac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{b}|\cdot\cos\gamma}=\dfrac{5{,}65}{9\cdot\cos 50°}=0{,}977$.

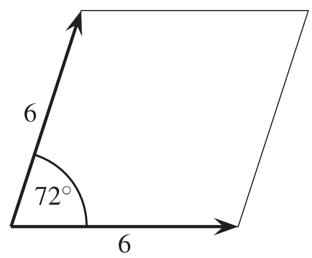
10.4. A mechanikai munkavégzés definíciója $W=\vec{F}\cdot\vec{s}=|\vec{F}|\cdot|\vec{s}|\cdot\cos\gamma$, ahol γ a két vektor által közbezárt szög. $W=20\cdot 10\cdot\cos 30°=173{,}2$ J.



10.5. $AD=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{AB\cdot\cos 56°}=\dfrac{20}{11\cdot\cos 56°}=3{,}25$.



10.6. $6\cdot 6\cdot\cos 72°=11{,}12$.



10.7. *a)* $\cos\gamma=\dfrac{4}{9}$. A paralelogramma egyenlő oldalú, de nem derékszögű, így rombusz. *b)* $\cos\gamma=\dfrac{0}{4\cdot 5}=0$. A paralelogramma nem egyenlő oldalú, de derékszögű, így téglalap. *c)* $\cos\gamma=\dfrac{-4}{6\cdot 2}=-\dfrac{1}{3}$. A paralelogramma általános, mivel nem egyenlő oldalú és nem derékszögű. *d)* $\cos\gamma=\dfrac{0}{4\cdot 4}=0$. A paralelogramma egyenlő oldalú és derékszögű, vagyis négyzet.

11. feladatlap

11.1. *a)* $\underline{a}\cdot\underline{b}=2\cdot 2+(-1)\cdot 4=0$. *b)* $\underline{b}+\underline{c}=\big(2+(-3);\ 4+0\big)=(-1;\ 4)$; $\underline{a}\cdot(\underline{b}+\underline{c})=2\cdot(-1)+(-1)\cdot 4=-2-4=-6$.

c) $2\cdot\underline{a}+\underline{c}=\big(2\cdot 2+(-3);\ 2\cdot(-1)+0\big)=(1;\ -2)$; $\underline{b}\cdot(2\cdot\underline{a}+\underline{c})=2\cdot 1+4\cdot(-2)=-6$.

d) $\underline{a}-\underline{b}=(2-2;\ -1-4)=(0;\ -5)$; $\underline{a}+\underline{c}=\big(2+(-3);\ -1+0\big)=(-1;\ -1)$; $(\underline{a}-\underline{b})\cdot(\underline{a}+\underline{c})=0\cdot(-1)+(-1)\cdot(-5)=5$.

11.2. A vektorok hosszát az $|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ és a $|\underline{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ összefüggésekkel, a skaláris szorzatot az $\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$ összefüggéssel számolhatjuk ki. A $\cos\gamma = \dfrac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|}$ ismeretében a keresett γ szög már kiszámolható.

a) $|\underline{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$; $|\underline{b}| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$; $\underline{a} \cdot \underline{b} = 3 \cdot (-5) + 4 \cdot 12 = 33$; $\cos\gamma = \dfrac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|} = \dfrac{33}{5 \cdot 13} = 0{,}5077$; $\gamma = 59{,}49°$.

b) $|\underline{a}| = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$; $|\underline{b}| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$; $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0 \cdot 8 + 5 \cdot 6 = 30$; $\cos\gamma = \dfrac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|} = \dfrac{30}{5 \cdot 10} = 0{,}6$; $\gamma = 53{,}13°$.

c) $|\underline{a}| = \sqrt{(-1)^2 + (-6)^2} = \sqrt{37}$; $|\underline{b}| = \sqrt{3^2 + (-0{,}5)^2} = \sqrt{9{,}25}$; $\underline{a} \cdot \underline{b} = (-1) \cdot 3 + (-6) \cdot (-0{,}5) = 0$; $\cos\gamma = \dfrac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|} = \dfrac{0}{\sqrt{37} \cdot \sqrt{9{,}25}} = 0$; $\gamma = 90°$. *d)* $|\underline{a}| = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$; $|\underline{b}| = \sqrt{1^2 + 2{,}5^2} = \sqrt{7{,}25}$; $\underline{a} \cdot \underline{b} = 5 \cdot 1 + (-2) \cdot 2{,}5 = 0$; $\cos\gamma = \dfrac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|} = \dfrac{0}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{7{,}25}} = 0$; $\gamma = 90°$.

11.3. Alkalmazzuk az $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ és $\overrightarrow{AC} = \underline{c} - \underline{a}$ összefüggéseket!

a) $\overrightarrow{AB} = (4-0;\ 3-0) = (4;\ 3)$; $\overrightarrow{AC} = ((-1{,}5)-0;\ 2-0) = (-1{,}5;\ 2)$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \cdot (-1{,}5) + 3 \cdot 2 = 0$. Derékszögű.

b) $\overrightarrow{AB} = ((-3)-0;\ (-2)-0) = (-3;\ -2)$; $\overrightarrow{AC} = ((-2)-0;\ 6-0) = (-2;\ 6)$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-3) \cdot (-2) + (-2) \cdot 6 = -6$. Nem derékszögű. *c)* $\overrightarrow{AB} = (4-1;\ (-3)-1) = (3;\ -4)$; $\overrightarrow{AC} = (5-1;\ 4-1) = (4;\ 3)$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \cdot 4 + (-4) \cdot 3 = 0$. Derékszögű.

11.4. Derékszög esetén a skaláris szorzat 0. *a)* $\underline{a} \cdot \underline{b} = 2 \cdot 5 + (-3) \cdot x = 0$; $x = \dfrac{10}{3}$. *b)* $\underline{a} \cdot \underline{b} = 3 \cdot (5 - x) + (-2) \cdot x = 0$; $15 - 5x = 0$; $x = 3$. *c)* $\underline{a} \cdot \underline{b} = 2 \cdot 6 + (-3x) \cdot x = 0$; $x^2 = 4$; $x_1 = -2$; $x_2 = 2$. *d)* $\underline{a} \cdot \underline{b} = x \cdot x + (-3) \cdot (-12) = 0$; $x^2 = -36$. Nincs megoldás.

12. feladatlap

12.1. Számítsuk ki a C csúcsnál lévő γ szöget! $\gamma = 180° - (35° + 44°) = 101°$. Írjuk fel a szinusztételt! $\dfrac{b}{10} = \dfrac{\sin 44°}{\sin 101°}$; $b = 7{,}08$ cm. $\dfrac{a}{10} = \dfrac{\sin 35°}{\sin 101°}$; $a = 5{,}84$ cm.

12.2. Számítsuk ki a B csúcsnál lévő β szöget! $\beta = 180° - (20° + 126°) = 34°$. Írjuk fel a szinusztételt! $\dfrac{x}{12} = \dfrac{\sin 34°}{\sin 20°}$; $x = 19{,}62$ cm. $\dfrac{y}{12} = \dfrac{\sin 126°}{\sin 20°}$; $y = 28{,}38$ cm.

12.3. Számítsuk ki az A csúcsnál lévő α szöget! $\dfrac{4}{7} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin 63°}$; $\sin\alpha = 0{,}5091$; $\alpha = 30{,}61°$. $\gamma = 180° - (63° + 30{,}61°) = 86{,}39°$. Írjuk fel az y oldalra a szinusztételt! $\dfrac{y}{7} = \dfrac{\sin 86{,}39°}{\sin 63°}$; $y = 7{,}84$ cm.

12.4. Számítsuk ki a harmadik szöget és használjuk a szinusztételt! $180° - 86{,}5° - 79{,}3° = 14{,}2°$. $\dfrac{x}{120} = \dfrac{\sin 79{,}3°}{\sin 14{,}2°}$. $x = 480{,}68$ méter.

12.5. Számítsuk ki a harmadik szöget! $\gamma = 180° - (47° + 59°) = 74°$. A szinusztétel alkalmazásával az a és a b oldal kifejezhető a c oldallal. $\dfrac{a}{c} = \dfrac{\sin 47°}{\sin 74°}$; $a = 0{,}7608 \cdot c$. $\dfrac{b}{c} = \dfrac{\sin 59°}{\sin 74°}$; $b = 0{,}8917 \cdot c$. A kerület: $k = a + b + c =$

$= 0{,}7608 \cdot c + 0{,}8917 \cdot c + c = 2{,}6525 \cdot c = 30$. $c = 11{,}31$ cm. $a = 8{,}6$ cm. $b = 10{,}09$ cm.

12.6. A $180°$ $3:4:5$ arányú felosztásával megkapjuk a háromszög belső szögeit. $3x+4x+5x=180°$; $x=15°$. $\alpha=3x=45°$; $\beta=4x=60°$; $\gamma=5x=75°$. A háromszög megszokott jelöléseit használva a c oldal 20 cm hosszúságú. Felírva a megfelelő oldalakra a szinusztételt, $\frac{a}{20}=\frac{\sin 45°}{\sin 75°}$; $a=14,64$ cm. $\frac{b}{20}=\frac{\sin 60°}{\sin 75°}$; $b=17,93$ cm.

13. feladatlap

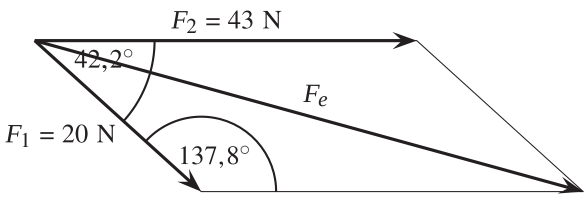
13.1. c-vel jelölve az ismeretlen oldalt, írjuk fel a koszinusztételt! $c^2=10^2+20^2-2\cdot 10\cdot 20\cdot\cos 42°=500-400\cos 42°=202,74$. $c=\sqrt{202,74}=14,24$ (cm).

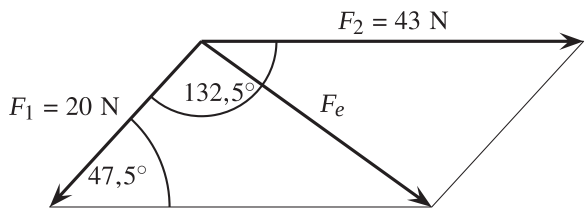
13.2. A háromszög részeinek szokásos jelöléseivel legyen $a=12$ cm, $b=15$ cm és $c=18$ cm! $18^2=12^2+15^2-2\cdot 12\cdot 15\cos\gamma$; $\cos\gamma=\frac{45}{360}$; $\gamma=82,8°$. $15^2=12^2+18^2-2\cdot 12\cdot 18\cos\beta$; $\cos\beta=\frac{243}{432}$; $\beta=55,8°$. $\alpha=180°-(82,8°+55,8°)=41,4°$.

13.3. Az eredő erő az összetevő erők által kifeszített paralelogramma átlója. A három erővektor által meghatározott háromszögben számítsuk ki az eredő erővel szemközti szöget és írjuk fel a koszinusztételt!

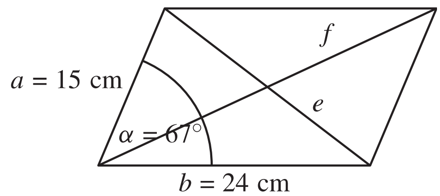
a) $180°-42,2°=137,8°$. $F_e^2=20^2+34^2-2\cdot 20\cdot 34\cos 137,8°=2563,5$; $F_e=50,6$ N.

b) $180°-132,5°=47,5°$. $F_e^2=20^2+34^2-2\cdot 20\cdot 34\cos 47,5°=637,2$; $F_e=25,2$ N.





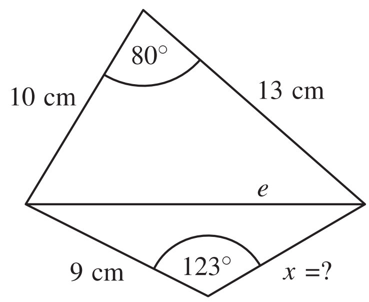
13.4. Az adott szöggel szemközti átlót (e) közvetlenül kiszámolhatjuk a koszinusztétel segítségével. $e^2=15^2+24^2-2\cdot 15\cdot 24\cos 67°=519,7$; $e=22,8$ cm. A szög csúcsából kiinduló átlót (f) pedig a szög melletti szögre felírt koszinusztétellel számolhatjuk ki. $180°-67°=113°$. $f^2=15^2+24^2-2\cdot 15\cdot 24\cos 113°=1082,3$; $f=32,9$ cm.



13.5. A háromszög két oldala felírható az x arányossági tényezővel: $a=3x$, $b=5x$. A harmadik oldalra (c) felírhatjuk a koszinusztételt, $c^2=(3x)^2+(5x)^2-2(3x)(5x)\cos 60°=9x^2+25x^2-15x^2=19x^2$. A harmadik oldal tehát $c=\sqrt{19}x$. Helyettesítsük be a kifejezéseket a háromszög kerületképletébe. $k=a+b+c=3x+5x+\sqrt{19}x=\left(8+\sqrt{19}\right)x=30$; $x=\frac{30}{8+\sqrt{19}}=2,43$ (cm).

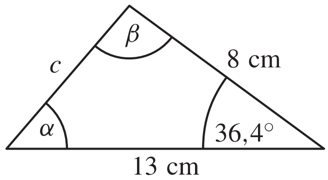
$a=3x=7,29$ (cm), $b=5x=12,15$ (cm), $c=\sqrt{19}x=10,59$ (cm).

13.6. Írjuk fel ugyanarra az e átlóra kétszer a koszinusztételt! $e^2=10^2+13^2-2\cdot 10\cdot 13\cos 80°$, $e^2=9^2+x^2-2\cdot 9\cdot x\cos 123°$. Innen $10^2+13^2-2\cdot 10\cdot 13\cos 80°=9^2+x^2-2\cdot 9\cdot x\cos 123°$; $x^2+9,804x-142,85=0$. $x_1=-17,82$ nem megoldás. $x_2=8,02$ cm megoldás.



14. feladatlap

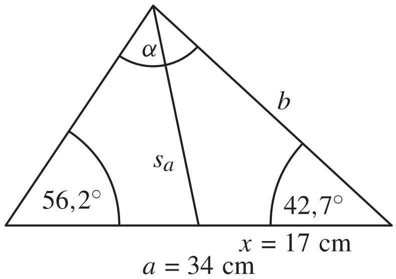
14.1. Írjuk fel a c oldalra a koszinusztételt! $c^2 = 8^2 + 13^2 - 2 \cdot 8 \cdot 13 \cos 36,4° = 65,58$; $c = 8,1$ cm. A β szöget megkaphatjuk a 13 cm-es oldalra felírt koszinusztétellel.



$13^2 = 8^2 + 8,1^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8,1 \cos\beta$; $\cos\beta = -\dfrac{39,39}{129,6} = -0,3039$; $\beta = 107,7°$.

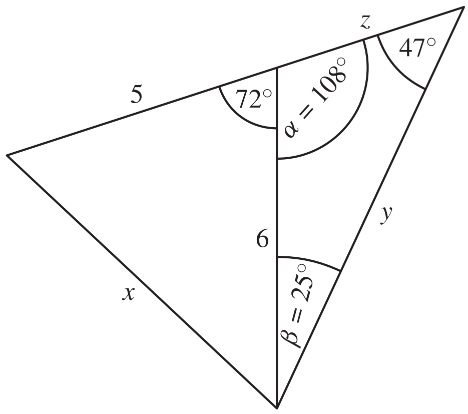
$\alpha = 180° - (107,7° + 36,4°) = 35,9°$.

14.2. Számítsuk ki az ismeretlen harmadik szöget! $\alpha = 180° - (42,7° + 56,2°) = 81,1°$.



Szinusztétellel számítsuk ki a b oldalt! $\dfrac{b}{34} = \dfrac{\sin 56,2°}{\sin 81,1°}$; $b = 28,6$ cm. A b oldal és az a oldal felével fel tudjuk írni a súlyvonalra a koszinusztételt! $s_a^2 = 28,6^2 + 17^2 - 2 \cdot 28,6 \cdot 17 \cos 42,7° = 392,33$. $s_a = 19,81$ cm.

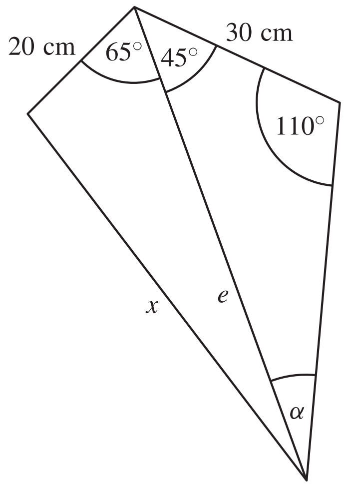
14.3. Az α szög a $72°$-os szög kiegészítő szöge, $\alpha = 108°$.



A $\beta = 180° - (108° + 47°) = 25°$. Írjuk fel y-ra is és z-re is a szinusztételt!

$\dfrac{y}{6} = \dfrac{\sin 108°}{\sin 47°}$, $y = 7,8$ cm. $\dfrac{z}{6} = \dfrac{\sin 25°}{\sin 47°}$. $z = 3,47$ cm. Az x-et koszinusztétel segítségével határozhatjuk meg. $x^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cos 72° = 42,46$, $x = 6,52$ cm.

14.4. $\alpha = 180° - (45° + 110°) = 25°$. Írjuk fel az e átlóra a szinusztételt!



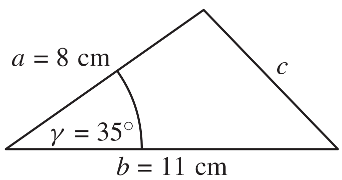
$\dfrac{e}{30} = \dfrac{\sin 110°}{\sin 25°}$, $e = 66,71$ cm. Írjuk fel x-re a koszinusztételt!

$x^2 = 20^2 + 66,71^2 - 2 \cdot 20 \cdot 66,71 \cos 65° = 3722,51$. $x = 61$ cm.

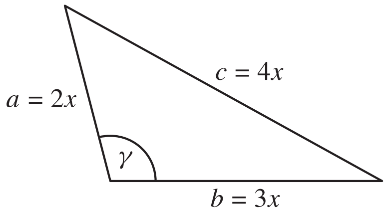
15. feladatlap

15.1. A koszinusztétellel határozzuk meg a c oldalt! $c^2 = 8^2 + 11^2 - 2 \cdot 8 \cdot 11 \cos 35° = 40,83°$, $c = 6,39$ cm. A kerület:

$k = a + b + c = 8 + 11 + 6,39 = 25,39$ (cm). A terület: $t = \dfrac{ab\sin\gamma}{2} = \dfrac{8 \cdot 11 \sin 35°}{2} = 25,24$ (cm^2).



15.2. Vezessük be az x arányossági tényezőt! $k = a + b + c = 2x + 3x + 4x = 9x = 36$. $x = 4$ cm. A megfelelő oldalak: $a = 2x = 8$ cm, $b = 3x = 12$ cm, $c = 4x = 16$ cm. Írjuk fel a koszinusztételt a γ szögre! $16^2 = 8^2 + 12^2 - 2 \cdot 8 \cdot 12 \cos\gamma$,

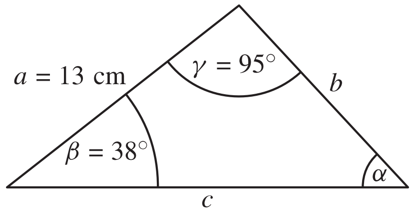


$\cos\gamma = -0,25$, $\gamma = 104,5°$. A terület: $t = \dfrac{ab\sin\gamma}{2} = \dfrac{8 \cdot 12 \sin 104,5°}{2} = 46,5\ (\text{cm}^2)$.

A kerület fele: $s = \dfrac{k}{2} = \dfrac{36}{2} = 18$ (cm). A beírható kör sugara: $t = rs$, innen

$r = \dfrac{t}{s} = \dfrac{46,5}{18} = 2,58$ (cm). A körülírható kör sugara: $R = \dfrac{abc}{4t} = \dfrac{8 \cdot 12 \cdot 16}{4 \cdot 46,5} = 8,26$ (cm^2).

15.3. Számítsuk ki az α szöget! $\alpha = 180° - (95° + 38°) = 47°$. Írjuk fel a c és a b oldalra a szinusztételt! $\dfrac{c}{13} = \dfrac{\sin 95°}{\sin 47°}$, $c = 17,71$ cm. $\dfrac{b}{13} = \dfrac{\sin 38°}{\sin 47°}$, $b = 10,94$ cm.

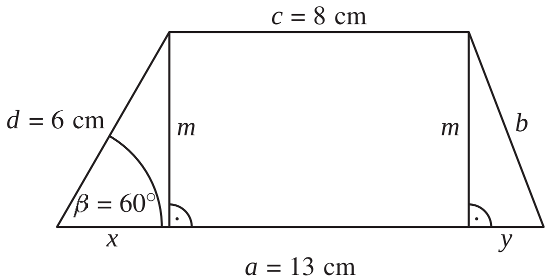


A kerület: $k = a + b + c = 13 + 17,71 + 10,94 = 41,65$ (cm). A félkerület: $s = \dfrac{k}{2} = 20,83$ (cm).

A terület: $t = \dfrac{ac\sin\beta}{2} = \dfrac{13 \cdot 17,71 \sin 38°}{2} = 70,87$ (cm^2). $r = \dfrac{t}{s} = \dfrac{70,87}{20,83} = 3,4$ (cm). $R = \dfrac{abc}{4t} = \dfrac{13 \cdot 17,71 \cdot 10,94}{4 \cdot 70,87} = 8,88$ (cm^2).

15.4. A trapéz magassága: $m = 6 \sin 60° = 5,2$ (cm). $x = 6 \cos 60° = 3$ cm. $y = a - c - x = 13 - 3 - 8 = 2$ (cm). A b oldalt Pitagorasz-tétellel számoljuk ki! $b^2 = y^2 + m^2 = 2^2 + 5,2^2 = 31,04$, $b = 5,57$ cm. A kerület: $k = a + b + c + d = 13 + 5,57 + 8 + 6 = 32,57$ cm.

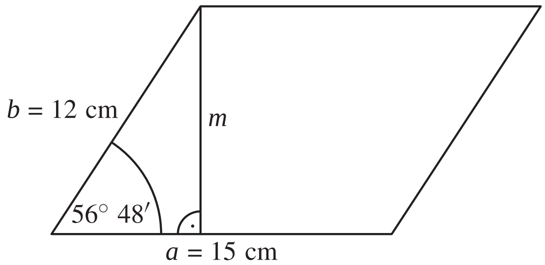
A terület: $t = \dfrac{a + c}{2} m = \dfrac{13 + 8}{2} \cdot 5,2 = 54,6$ (cm).



15.5. A paralelogramma m magassága:

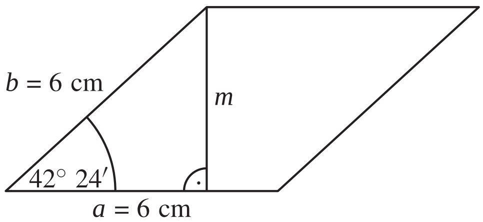
$m = b \sin\alpha = 12 \sin 56,8° = 10,04$ (cm).

A terület: $t = ma = 150,6$ (cm^2).



15.6. A rombusz m magassága: $m = b \sin\alpha = 6 \sin 42,4° = 4,05$ (cm).

A terület: $t = ma = 24,3$ (cm^2).

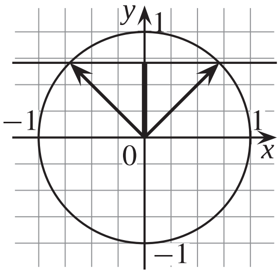


16. feladatlap

16.1. *a)* $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. $\quad 2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $\quad 2x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $\quad 2x=\frac{7\pi}{12}+2k\pi$,

$x_1=\frac{7\pi}{24}+k\pi$; $\quad 2x-\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{4}+2l\pi$, $\quad 2x=\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+2l\pi$, $\quad 2x=\frac{13\pi}{12}+2l\pi$, $\quad x_2=\frac{13\pi}{24}+l\pi$,

$k, l\in\mathbb{Z}$.

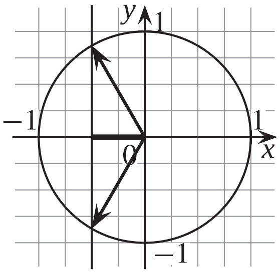


b) $\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$, $\quad \frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, $\quad \frac{1}{2}x=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $\quad \frac{1}{2}x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$,

$x_1=\pi+4k\pi$; $\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}=\frac{4\pi}{3}+2l\pi$, $\frac{1}{2}x=\frac{7\pi}{6}+2l\pi$, $x_2=\frac{7\pi}{3}+4l\pi$. $k, l\in\mathbb{Z}$.

c) $\mathrm{tg}\left(3x+\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{3}$. $3x+\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{3}+k\pi$, $3x=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{5}+k\pi$, $3x=\frac{2\pi}{15}+k\pi$, $x=\frac{2\pi}{45}+\frac{k\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$.

d) $\mathrm{ctg}\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{4}\right)=-1$. $\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $\frac{1}{3}x=+k\pi$, $x=3k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.



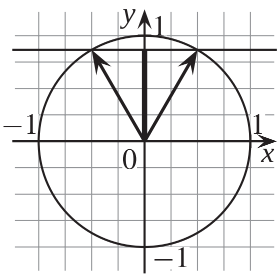
16.2. Mivel a szinusz- és koszinuszfüggvény argumentuma megegyezik, osszuk el az egyenlet mindkét oldalát $\cos x$-szel!

a) $\sin x=\cos x$. $\quad \mathrm{tg}\,x=1$, $\quad x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $\quad k\in\mathbb{Z}$. $\qquad$ *b)* $\sin 2x=-\cos 2x$. $\quad \mathrm{tg}\,2x=-1$, $\quad 2x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $\quad x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$, $\quad k\in\mathbb{Z}$.

c) $3\sin x=2\cos x$. $\quad \mathrm{tg}\,x=\frac{2}{3}$; $\quad x=0{,}588+k\pi$, $\quad k\in\mathbb{Z}$. *d)* $\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. $\quad x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}+k\pi$, $\quad x=-\frac{\pi}{2}+k\pi$, $\quad k\in\mathbb{Z}$.

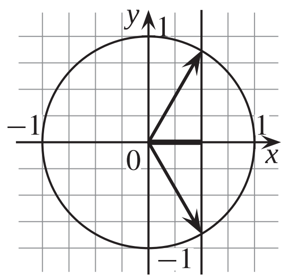
16.3. *a)* $\sin 2x=\sin x$; $\quad 2x=x+2k\pi$, $\quad x_1=2k\pi$, vagy $2x=\pi-x+2l\pi$, $\quad 3x=\pi+2l\pi$,

$x_2=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}l\pi$, $\quad k, l\in\mathbb{Z}$.



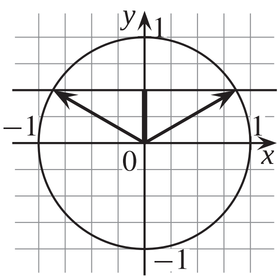
b) $\cos 2x=\cos x$; $\quad 2x=x+2k\pi$, $\quad x_1=2k\pi$, vagy

$2x=2\pi-x+2l\pi$, $\quad 3x=2\pi+2l\pi$, $\quad x_2=\frac{2\pi}{3}+\frac{2}{3}l\pi$, $\quad k, l\in\mathbb{Z}$.



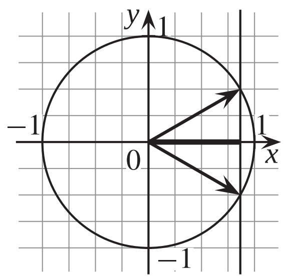
16.4. *a)* $\sin 2x=\cos x$; $\quad \sin 2x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. $\quad 2x=\frac{\pi}{2}-x+2k\pi$; $\quad 3x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $\quad x_1=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}k\pi$,

vagy $2x=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2l\pi$, $\quad x_2=\frac{\pi}{2}+2l\pi$, $\quad k, l\in\mathbb{Z}$.



b) $\cos 2x=\sin x$; $\quad \cos 2x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. $\quad 2x=\frac{\pi}{2}-x+2k\pi$; $\quad 3x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $\quad x_1=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}k\pi$, vagy

$2x=2\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2l\pi$, $\quad x_2=\frac{3\pi}{2}+2l\pi$, $\quad k, l\in\mathbb{Z}$.



17. feladatlap

17.1. Az egyenletek megoldásának alapötlete az, hogy egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. Az egyenletek bal oldalát, amennyiben szükséges, szorzattá kell alakítani, és egyenként meg kell vizsgálni, hogy a tényezők mely x-eknél 0-k.

a) $\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\left(\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0.$ Vagy $\sin x - \frac{1}{2} = 0,$ $\sin x = \frac{1}{2},$ $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k_1\pi,$ $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2l_1\pi,$ vagy $\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$ $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2},$ $x_3 = \frac{7\pi}{4} + 2k_2\pi,$ $x_4 = \frac{5\pi}{4} + 2l_2\pi,$ $k_1,\ l_1,\ k_2,\ l_2 \in \mathbb{Z}.$

b) $\cos^2 x - 2\cos x + 1 = 0.$ $(\cos x - 1)^2 = 0.$ $\cos x = 1,$ $x = 2k\pi,$ $k \in \mathbb{Z}.$

c) $\operatorname{tg}^2 x - 3 = 0.$ $\left(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}\right)\cdot\left(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}\right) = 0.$ $\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0,$ $\operatorname{tg} x = \sqrt{3},$ $x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi,$ $\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0.$ $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3},$ $x_2 = -\frac{5\pi}{3} + l\pi,$ $k, l \in \mathbb{Z}.$

17.2. Vezessünk be új változókat a trigonometrikus függvények helyett, és oldjuk meg a másodfokú egyenleteket!

a) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0.$ $u = \cos x.$ $2u^2 - 3u + 1 = 0.$ $u_1 = \frac{1}{2},$ $u_2 = 1.$ $\cos x = \frac{1}{2},$ $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k_1\pi,$ $x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2l\pi,$ vagy $\cos x = 1,$ $x_3 = 2k_2\pi,$ $k_1, l, k_2 \in \mathbb{Z}.$

b) $2\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 1 = 0.$ $u = \operatorname{tg} x.$ $2u^2 + u - 1 = 0.$ $u_1 = -1,$ $u_2 = \frac{1}{2}.$ $\operatorname{tg} x = -1,$ $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi,$ $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2},$ $x_2 = 0{,}464 + l\pi,$ $k,\ l \in \mathbb{Z}.$

17.3. A $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosság alkalmazásával átírhatjuk az egyik szögfüggvény négyzetes kifejezését.

a) $\sin^2 x - \cos^2 x + \sin x = 0.$ $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x,$ $\sin^2 x - \left(1 - \sin^2 x\right) + \sin x = 0,$ $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$ $u = \sin x.$ $2u^2 + u - 1 = 0.$ $u_1 = -1,$ $u_2 = \frac{1}{2},$ $\sin x = \frac{1}{2},$ $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k_1\pi,$ $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi,$ vagy $\sin x = -1,$ $x_3 = -\frac{\pi}{2} + 2k_2\pi,$ $k_1,\ l, k_2 \in \mathbb{Z}.$

b) $\cos^2 x - \sin^2 x + \cos x - 2 = 0;$ $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x,$ $\cos^2 x - \left(1 - \cos^2 x\right) + \cos x - 2 = 0,$ $2\cos^2 x + \cos x - 3 = 0.$ $u = \cos x.$ $2u^2 + u - 3 = 0.$ $u_1 = -\frac{3}{2},$ $u_2 = 1.$ $\sin x = -\frac{3}{2}$ nem megoldható egyenlet, $\sin x = 1,$ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$ $k \in \mathbb{Z}.$

c) $-2\cos^2 x + 3\sin x = 0.$ $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x,$ $-2\left(1 - \sin^2 x\right) + 3\sin x = 0,$ $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0.$ $u = \sin x.$ $2u^2 + 3u - 2 = 0.$ $u_1 = -2,$ $u_2 = \frac{1}{2}.$ $\sin x = -2$ nem megoldható egyenlet. $\sin x = \frac{1}{2},$ $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,$ $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi$ $k,\ l \in \mathbb{Z}.$

d) $-2\sin^2 x - 3\cos x + 3 = 0.$ $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x,$ $-2\left(1 - \cos^2 x\right) - 3\cos x + 3 = 0,$ $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0.$ $u = \cos x.$ $2u^2 - 3u + 1 = 0.$ $u_1 = \frac{1}{2},$ $u_2 = 1.$ $\cos x = \frac{1}{2}.$ $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k_1\pi,$ $x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2l\pi,$ vagy $\cos x = 1,$ $x_3 = 2k_2\pi,$ $k_1,\ l, k_2 \in \mathbb{Z}.$

17.4. Az egyik szögfüggvényt vigyük át az egyenlet másik oldalára, majd emeljük négyzetre mind a két oldalt! (A négyzetre emelés miatt hamis gyök is előállhat, ezért muszáj ellenőrizni!)

a) $\sin x + \cos x = 1.$ $\sin x = 1 - \cos x,$ $\sin^2 x = (1 - \cos x)^2 = 1 - 2\cos x + \cos^2 x.$ $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ behelyettesítése után: $1 - \cos^2 x = 1 - 2\cos x + \cos^2 x,$ $\cos^2 x - \cos x = 0.$ $\cos x(\cos x - 1) = 0.$ $\cos x = 0.$ $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$ $\cos x = 1$ $x_2 = 2l\pi.$ $k,\ l \in \mathbb{Z}.$

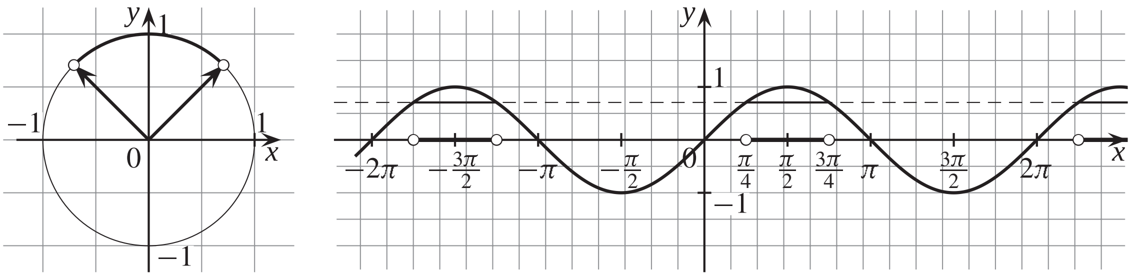
b) $3\cos x - 4\sin x = 4.$ $3\cos x = 4 + 4\sin x.$ $9\cos^2 x = (4 + 4\sin x)^2,$ $9\cos^2 x = 16 + 32\sin x + 16\sin^2 x.$ $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ behelyettesítése után: $9\left(1 - \sin^2 x\right) = 16 + 32\sin x + 16\sin^2 x.$ $25\sin^2 x + 32\sin x + 7 = 0.$ $u = \sin x.$ $25u^2 + 32u + 7 = 0.$ $u_1 = -1,$ $u_2 = -0{,}28.$ $\sin x = -1,$ $x_1 = \frac{3\pi}{2} + 2k_1\pi.$ $\sin x = -0{,}28$ $x_2 = 3{,}425 + 2k_2\pi,$ $x_3 = 6 + 2l\pi.$ $k_2,\ l \in \mathbb{Z}.$

18. feladatlap

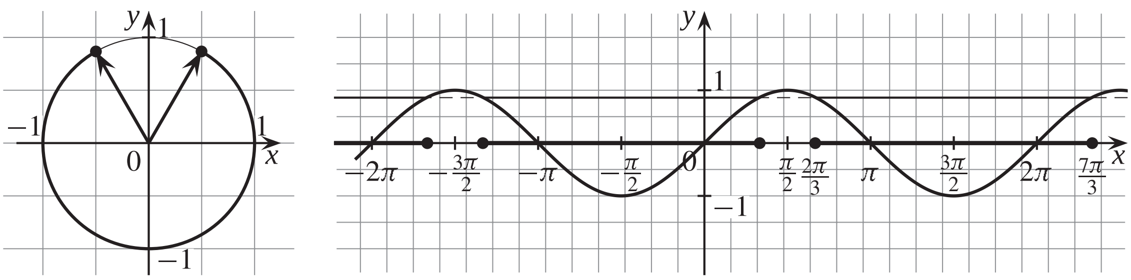
18.1. *a)* Az egységkörös ábráról leolvashatók, hogy mely egységvektorok második koordinátája nagyobb $\frac{\sqrt{2}}{2}$ -nél.

A függvény grafikonjáról pedig, hogy mely x értékeknél nagyobb a függvényérték $\frac{\sqrt{2}}{2}$ -nél. A megoldás mindkét esetben:

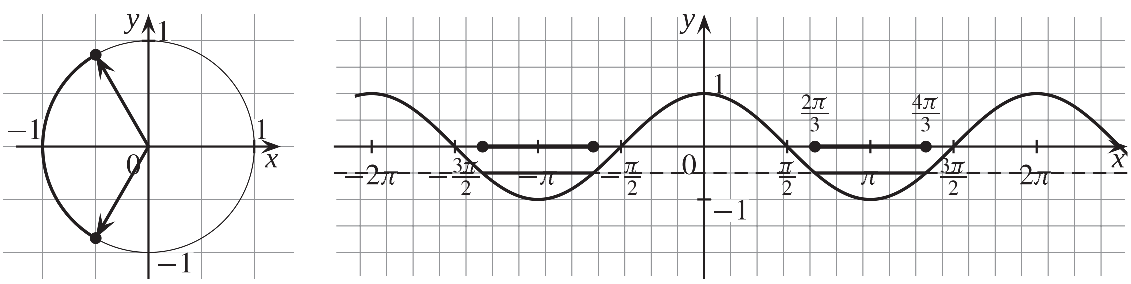
$\frac{\pi}{4}+2k\pi < x < \frac{3\pi}{4}+2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$



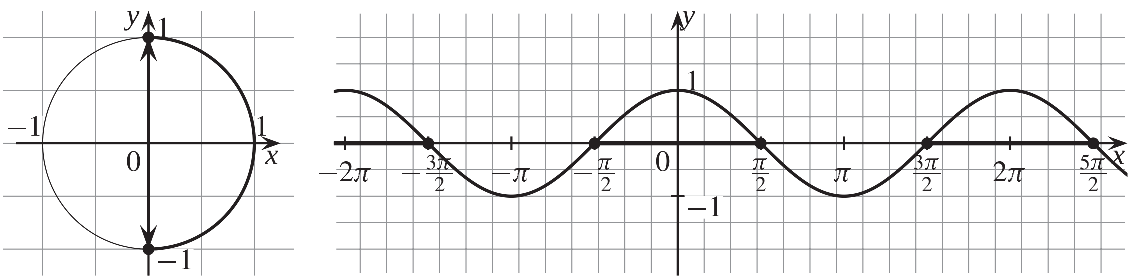
b) $\frac{2\pi}{3}+2k\pi \le x \le \frac{7\pi}{3}+2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$



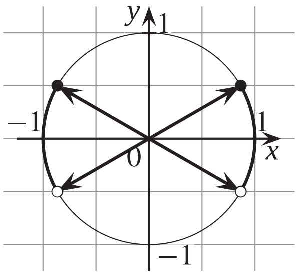
c) $\frac{2\pi}{3}+2k\pi \le x \le \frac{4\pi}{3}+2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

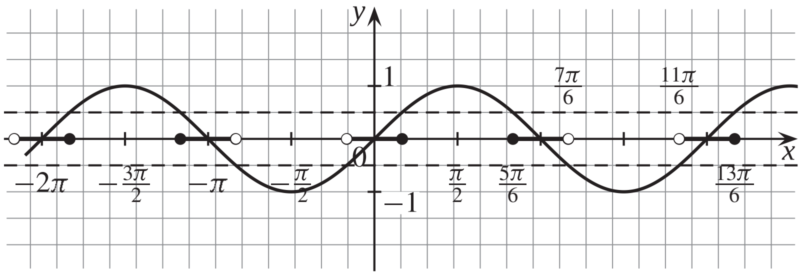


d) $\frac{3\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{5\pi}{2}+2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

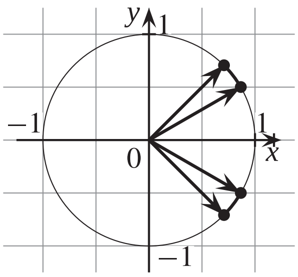


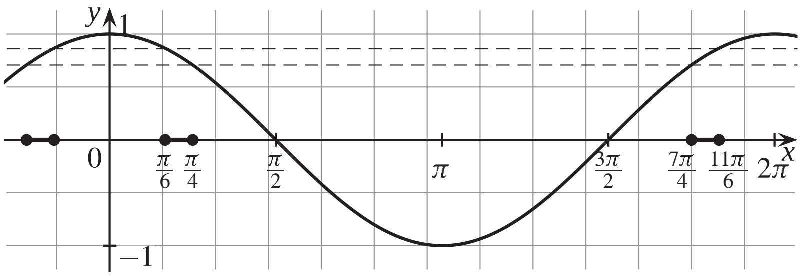
18.2. *a)* $\frac{5\pi}{6}+2k\pi \le x < \frac{7\pi}{6}+2k\pi$ vagy $\frac{11\pi}{6}+2k\pi < x \le \frac{13\pi}{6}+2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$





b) $\frac{\pi}{6}+2k\pi \le x \le \frac{\pi}{4}+2k\pi$ vagy $\frac{7\pi}{4}+2k\pi \le x \le \frac{11\pi}{6}+2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$





19. feladatlap

19.1. *a)* $\overrightarrow{CA}=(2-(-3);(-1)-0)=(5;-1);\quad \left|\overrightarrow{CA}\right|=\sqrt{5^2+(-1)^2}=\sqrt{26}.$

b) $\overrightarrow{AB}=((-3)-2;(-2)-(-1))=(-5;-1);\quad \left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-5)^2+(-1)^2}=\sqrt{26}.$

c) $\overrightarrow{CD}=(1-(-3);5-0)=(4;5);\quad \left|\overrightarrow{CD}\right|=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}.$

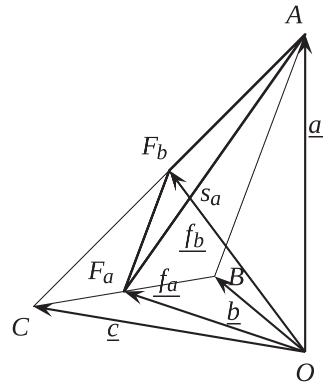
d) $\overrightarrow{BD}=(1-(-3);5-(-2))=(4;7);\quad \left|\overrightarrow{BD}\right|=\sqrt{4^2+7^2}=\sqrt{65}.$

19.2. A háromszög oldalaira illesztett vektorok hosszával kiszámolhatjuk az oldalak hosszát. $\overrightarrow{AB}=(0-4;2-(-1))=(-4;3),$ $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=\sqrt{25}=5,$ $\quad \overrightarrow{AC}=(1-4;0-(-1))=(-3;1);$ $\quad \left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10};$ $\quad \overrightarrow{BC}=(1-0;0-2)=(1;-2);$ $\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}.$ $\;k=a+b+c=5+\sqrt{10}+\sqrt{5}=10,4$ cm.

19.3. $\underline{f_a}=\frac{\underline{b}+\underline{c}}{2}=\left(\frac{0+(-1)}{2};\ \frac{5,2+1,4}{2}\right)=(-0,5;\ 3,3),\quad F_a(-0,5;3,3).\quad \underline{f_b}=\frac{\underline{a}+\underline{c}}{2}=\left(\frac{4,6+(-1)}{2};\ \frac{-3,4+1,4}{2}\right)=(1,8;\ -1),$

$F_b(1,8;-1).\quad \underline{f_c}=\frac{\underline{a}+\underline{b}}{2}=\left(\frac{4,6+0}{2};\ \frac{-3,4+5,2}{2}\right)=(2,3;\ 0,9),\quad F_b(2,3;\ 0,9).$

19.4. Számoljuk ki az oldalak felezőpontjának koordinátáit!



$\underline{f_a}=\frac{\underline{b}+\underline{c}}{2}=\left(\frac{1+(-5)}{2};\ \frac{(-2)+(-6)}{2}\right)=(-2;\ -4),\quad F_a(-2;-4).$

$\underline{f_b}=\frac{\underline{a}+\underline{c}}{2}=\left(\frac{4+(-5)}{2};\frac{3+(-6)}{2}\right)=(-0,5;-1,5),\quad F_b(-0,5;-1,5).$

$\overrightarrow{AF_b}=\left((-0,5)-4;(-1,5)-3\right)=(-4,5;-4,5);\quad \left|\overrightarrow{AF_b}\right|=\sqrt{(-4,5)^2+(-4,5)^2}=6,364.$

$\overrightarrow{F_bF_a}=\left((-2)-(-0,5);(-4)-(-1,5)\right)=(-1,5;-2,5);\quad \left|\overrightarrow{F_bF_a}\right|=\sqrt{(-1,5)^2+(-2,5)^2}=2,915.$

$\overrightarrow{F_aA}=\left(4-(-2);3-(-4)\right)=(6;7);\quad \left|\underline{s_a}\right|=\left|\overrightarrow{F_aA}\right|=\sqrt{6^2+7^2}=9,22.\quad k=\left|\overrightarrow{AF_b}\right|+\left|\overrightarrow{F_bF_a}\right|+\left|\overrightarrow{F_aA}\right|=6,364+3,536+9,22=19,12$ (cm).

19.5. A felezőpontok koordinátáinak meghatározása után a súlyvonalakra fektetett vektorok hosszát határozzuk meg!

$\underline{f_a} = \frac{\underline{b}+\underline{c}}{2} = \left(\frac{1+(-5)}{2}; \frac{(-4)+(-7)}{2}\right) = (-2;-5,5),\ \ F_a(-2;-5,5).\ \ \underline{f_b} = \frac{\underline{a}+\underline{c}}{2} = \left(\frac{4+(-5)}{2}; \frac{2+(-7)}{2}\right) = (-0,5;-2,5),\ \ F_b(-0,5;-2,5).$

$\underline{f_c} = \frac{\underline{a}+\underline{b}}{2} = \left(\frac{4+1}{2}; \frac{2+(-4)}{2}\right) = (2,5;-1),\ \ F_c(2,5;-1).$

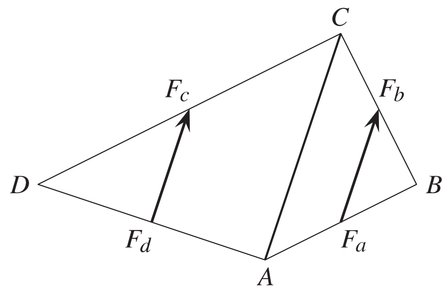
$\underline{s_a} = \overrightarrow{F_aA} = \underline{a} - \underline{f_a} = (4-(-2); 2-(-5,5)) = (6;7,5);\ \ \left|\underline{s_a}\right| = \left|\overrightarrow{F_aA}\right| = \sqrt{6^2+7,5^2} = 9,6.$

$\underline{s_b} = \overrightarrow{F_bB} = \underline{b} - \underline{f_b} = (1-(-0,5); -4-(-2,5)) = (1,5;-1,5);\ \ \left|\underline{s_b}\right| = \left|\overrightarrow{F_bB}\right| = \sqrt{1,5^2+(-1,5)^2} = 2,12.$

$\underline{s_c} = \overrightarrow{F_cC} = \underline{c} - \underline{f_c} = ((-5)-2,5; (-7)-(-1)) = (-7,5;-6);\ \ \left|\underline{s_c}\right| = \left|\overrightarrow{F_cC}\right| = \sqrt{(-7,5)^2+(-6)^2} = 9,6.$

$\left|\underline{s_a}\right| + \left|\underline{s_b}\right| + \left|\underline{s_c}\right| = 9,6+6,671+9,6 = 25,871$ (cm).

19.6. *a)* Az oldalfelező pontok meghatározása után fektessünk a kérdéses középvonalakra vektort!



$\underline{f_a} = \frac{\underline{a}+\underline{b}}{2} = \left(\frac{5+9}{2}; \frac{2+4}{2}\right) = (7;3),\ \ F_a(7;3).$

$\underline{f_b} = \frac{\underline{b}+\underline{c}}{2} = \left(\frac{9+7}{2}; \frac{4+8}{2}\right) = (8;6),\ \ F_b(8;6).$

$\underline{f_c} = \frac{\underline{c}+\underline{d}}{2} = \left(\frac{7+(-1)}{2}; \frac{8+4}{2}\right) = (3;6),\ \ F_c(3;6).$

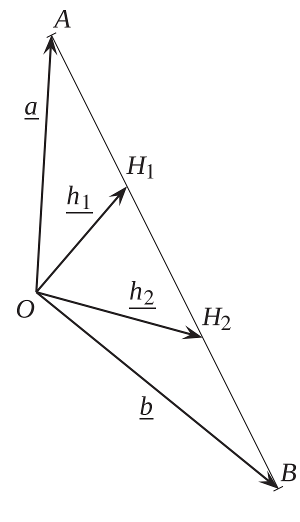
$\underline{f_d} = \frac{\underline{d}+\underline{a}}{2} = \left(\frac{-1+5}{2}; \frac{4+2}{2}\right) = (2;3),\ \ F_d(2;3).$

$\overrightarrow{F_aF_b} = \underline{f_b} - \underline{f_a} = (8-7; 6-3) = (1;3);\ \ \overrightarrow{F_dF_c} = \underline{f_c} - \underline{f_d} = (3-2; 6-3) = (1;3).$

b) Az *a)* pont eredményei alapján $\overrightarrow{F_aF_b} = \overrightarrow{F_dF_c}$, azaz a két vektor egyenlő hosszúságú és párhuzamos. Ha egy négyszög egy szemközti oldalpárja párhuzamos és egyenlő hosszúságú, akkor a négyszög paralelogramma.

19.7. $\underline{s}_{ABC} = \frac{\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}}{3} = \left(\frac{(-2)+6+1}{3}; \frac{(-2)+(-2)+9}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right).\ \ \ \underline{s}_{EFG} = \frac{\underline{e}+\underline{f}+\underline{g}}{3} = \left(\frac{5+(-3)+3}{3}; \frac{3+2+(-1)}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right).$

Nem egyeznek meg a súlypontok koordinátái, tehát nem esnek egybe.



19.8. $\underline{h_1} = \frac{2\underline{a}+\underline{b}}{3} = \left(\frac{2(-4)+11}{3}; \frac{2\cdot 7+(-23)}{3}\right) = (1;3),\ \ H_1(1;3).$

$\underline{h_2} = \frac{\underline{a}+2\underline{b}}{3} = \left(\frac{(-4)+2\cdot 11}{3}; \frac{7+2\cdot(-23)}{3}\right) = (6;-13),\ \ H_1(6;-13).$

Az ötödölőpontok koordinátái az A ponttól indulva:

$\underline{o_1} = \frac{4\underline{a}+\underline{b}}{5} = \left(\frac{4\cdot(-4)+11}{5}; \frac{4\cdot 7+(-23)}{5}\right) = (-1;1),\ \ O_1(-1;1);$

$\underline{o_2} = \frac{3\underline{a}+2\underline{b}}{5} = \left(\frac{3\cdot(-4)+2\cdot 11}{5}; \frac{3\cdot 7+2\cdot(-23)}{5}\right) = (2;-5),\ \ O_2(2;-5);$

$\underline{o_3} = \frac{2\underline{a}+3\underline{b}}{5} = \left(\frac{2\cdot(-4)+3\cdot 11}{5}; \frac{2\cdot 7+3\cdot(-23)}{5}\right) = (5;-11),\ \ O_3(5;-11);$

$\underline{o_4} = \frac{\underline{a}+4\underline{b}}{5} = \left(\frac{(-4)+4\cdot 11}{5}; \frac{7+4\cdot(-23)}{5}\right) = (8;-17),\ \ O_4(8;-17).$

20. feladatlap

20.1. *a)* $3\underline{a} = (3\cdot 2; 3\cdot(-1)) = (6;-3);$

b) $\frac{1}{2}\underline{a} = \left(\frac{2}{2}; \frac{-1}{2}\right) = (1;-0,5);$

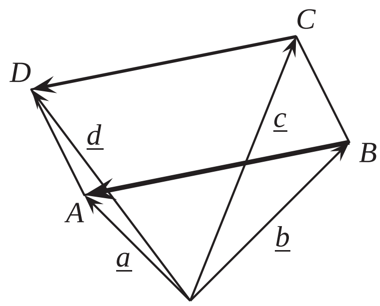
c) $-\frac{5}{2}\underline{a} = \left(-\frac{5}{2}\cdot 2; -\frac{5}{2}\cdot(-1)\right) = \left(-5; \frac{5}{2}\right);$

d) $-\frac{4}{3}\underline{a} = \left(-\frac{4}{3}\cdot 2; -\frac{4}{3}\cdot(-1)\right) = \left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}\right).$

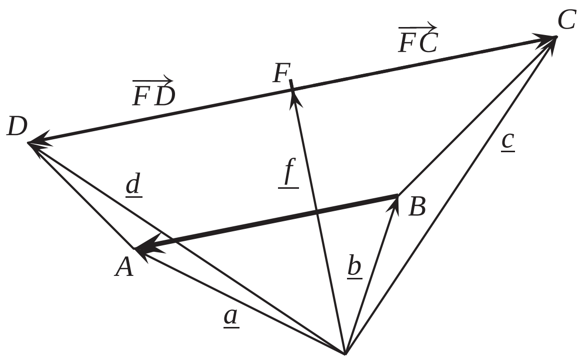
20.2. *a)* $\underline{p}+4\underline{a}=(-2+4\cdot 2;1+4\cdot(-1))=(6;-3)$. *b)* $\underline{p}-1,4\underline{a}=(-2-1,4\cdot 2;1-1,4\cdot(-1))=(-4,8;2,4)$.

20.3. $\overrightarrow{BA}=\underline{a}-\underline{b}=(-2-3;2-3)=(-5;-1)$.

A $\underline{d}$ helyvektor: $\underline{d}=\underline{c}+\overrightarrow{BA}=(2+(-5);5+(-1))=(-3;4)$.
$D(-3;4)$.



20.4. $\overrightarrow{BA}=\underline{a}-\underline{b}=(-2-3;2-3)=(-5;-1)$.



A $\underline{c}$ helyvektor:

$\underline{c}=\underline{f}+\overrightarrow{FC}=\underline{f}-\overrightarrow{BA}=\left(1-(-5);5-(-1)\right)=(6;6)$. $C(6;6)$.

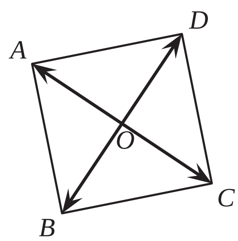
A $\underline{d}$ helyvektor:

$\underline{d}=\underline{f}+\overrightarrow{FD}=\underline{f}+\overrightarrow{BA}=\left(1+(-5);5+(-1)\right)=(-4;4)$. $D(-4;4)$.

20.5.

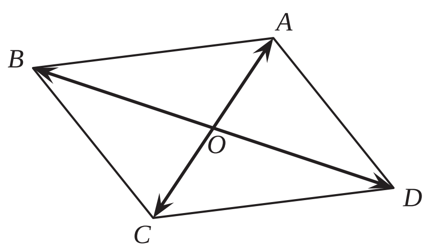
	$\underline{v}$	$\underline{w}_1$ (pozitív irányú forgatott)	$\underline{w}_2$ (negatív irányú forgatott)
a)	$(2;-5)$	$(5;2)$	$(-5;-2)$
b)	$(5;4)$	$(-4;5)$	$(4;-5)$
c)	$(-2;1)$	$(-1;-2)$	$(1;2)$
d)	$(-3;0)$	$(0;-3)$	$(0;3)$

20.6. $\overrightarrow{OA}=\underline{a}-\underline{o}=(-1-2;5-3)=(-3;2)$. Az $\overrightarrow{OB}$ vektor az $\overrightarrow{OA}$ pozitív 90°-os elforgatottja: $\overrightarrow{OB}=(-2;-3)$. $\underline{b}=\underline{o}+\overrightarrow{OB}=$ $=\left(2+(-2);3+(-3)\right)=(0,0)$, $B(0,0)$. Az $\overrightarrow{OC}$ vektor az $\overrightarrow{OB}$ pozitív 90°-os elforgatottja: $\overrightarrow{OC}=(3;-2)$.
$\underline{c}=\underline{o}+\overrightarrow{OC}=\left(2+3;3+(-2)\right)=(5,1)$, $C(5;1)$. Az $\overrightarrow{OD}$ vektor az $\overrightarrow{OC}$ pozitív 90° -os elforgatottja: $\overrightarrow{OD}=(2;3)$. $\underline{d}=\underline{o}+\overrightarrow{OD}=(2+2;3+3)=(4;6)$, $D(4;6)$.

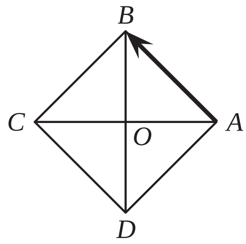


20.7. $\overrightarrow{OA}=\underline{a}-\underline{o}=(4-2;6-3)=(2;3)$. Az $\overrightarrow{OB}$ vektor az $\overrightarrow{OA}$ pozitív 90°-os elforgatottjának kétszerese: $\overrightarrow{OB}=2\cdot(-3;2)=(-6;4)$. $\underline{b}=\underline{o}+\overrightarrow{OB}=\left(2+(-6);3+4\right)=(-4;7)$, $B(-4;7)$.

Az $\overrightarrow{OC}$ vektor az $\overrightarrow{OB}$ pozitív 90°-os elforgatottjának fele:
$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(-4;-6)=(-2;-3)$. $\underline{c}=\underline{o}+\overrightarrow{OC}=\left(2+(-2);3+(-3)\right)=(0,0)$, $C(0,0)$. Az $\overrightarrow{OD}$ vektor az $\overrightarrow{OC}$ pozitív 90°-os elforgatottjának kétszerese:
$\overrightarrow{OD}=2\cdot(3;-2)=(6;-4)$. $\underline{d}=\underline{o}+\overrightarrow{OD}=\left(2+6;3+(-4)\right)=(8;1)$, $D(8;-1)$.



20.8. $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} = (-2-1;4-1) = (-3;3)$. Az $\overrightarrow{AD}$ vektor az $\overrightarrow{AB}$ pozitív 90°-os elforgatottja: $\overrightarrow{AD} = (-3;-3)$. $\underline{d} = \underline{a} + \overrightarrow{AD} = \big(1+(-3);1+(-3)\big) = (-2;-2)$, $D(-2;-2)$. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = (-3;-3)$. $\underline{c} = \underline{b} + \overrightarrow{BC} = \big(-2+(-3);4+(-3)\big) = (-5;1)$, $C(-5;1)$. A szimmetria-középpont az AC átló felezőpontja: $\underline{o} = \frac{\underline{a}+\underline{c}}{2} = \left(\frac{1+(-5)}{2};\frac{1+1}{2}\right) = (-2;1)$. $O(-2;1)$.



21. feladatlap

21.1. A normálvektor koordinátái az egyenes egyenletében egy oldalon lévő változók együtthatói. Az első koordináta az x együtthatója, a második pedig az y együtthatója.

a) $\underline{n}(2;-3)$, $\underline{v}(3;2)$; *b)* $\underline{n}(-2;-1)$, $\underline{v}(1;-2)$;

c) $\underline{n}(1;0{,}6)$, $\underline{v}(-0{,}6;1)$; *d)* $\underline{n}(1;-1)$, $\underline{v}(1;1)$;

21.2. A normálvektor és a pont koordinátáit helyettesítsük be az $Ax + By = Ax_0 + By_0$ egyenletbe!

a) $2x+4y = 2\cdot1+4\cdot3 = 14$, $x+2y=7$; *b)* $5x = 5\cdot(-1)+0\cdot0 = -5$, $x=-1$;

c) $-2x-3y = -2\cdot2-3\cdot(-3) = 5$, $-2x-3y=5$; *d)* $x-y = 1\cdot0-1\cdot0 = 0$, $x-y=0$.

21.3. Az irányvektort előbb el kell forgatni 90°-kal, aztán helyettesítsük be a koordinátákat az egyenletbe!

a) $\underline{n}(-4;2)$, $-4x+2y = -4\cdot1+2\cdot3 = 2$, $-4x+2y=2$. *b)* $\underline{n}(0;5)$, $0x+5y = 5\cdot0+0\cdot5 = 0$, $5y=0$, $y=0$.

c) $\underline{n}(3;-2)$, $3x-2y = 3\cdot2+(-2)(-3) = 0$. *d)* $\underline{n}(1;1)$. $x+y = 1\cdot0+1\cdot0 = 0$, $x+y=0$.

21.4. A szakasz két végpontjába mutató helyvektor segítségével megadható a szakaszra fektethető vektor $\left(\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}\right)$, és ez éppen a keresett egyenes irányvektora. Az irányvektor 90°-os elforgatásával megkapjuk az egyenes egy normálvektorát. Az egyenes adott pontjának bármelyik végpontot tekinthetjük.

a) $\underline{v_e} = \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} = (-2-2;-4-4) = (-4;-8)$, $\underline{n_e}(8;-4)$, $8x-4y = 8\cdot2-4\cdot4 = 0$, $8x-4y=0$, $2x-y=0$.

b) $\underline{v_e} = \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} = (-1-0;3-0) = (1;3)$, $\underline{n_e}(3;1)$, $3x+1y = 3\cdot0+1\cdot0 = 0$, $3x+y=0$.

c) $\underline{v_e} = \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} = \big(1-0;0-(-4)\big) = (1;4)$, $\underline{n_e}(-4;1)$, $-4x+y = -4\cdot0+1\cdot(-4) = -4$, $-4x+y=-4$.

d) $\underline{v_e} = \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} = \big(2{,}5-(-1);-3{,}2-1\big) = (3{,}5;-4{,}2)$, $\underline{n_e}(4{,}2;3{,}5)$, $4{,}2x+3{,}5y = 4{,}2\cdot(-1)+3{,}5\cdot1 = -0{,}7$, $4{,}2x+3{,}5y=-0{,}7$, esetleg $6x+5y=-1$.

21.5. Az AB szakaszra merőleges egyenes normálvektora pont az $\overrightarrow{AB}$ vektor. Az egyenes adott pontja az A pont.

a) $\underline{n_e} = \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} = \big(-1-4;-1-(-1)\big) = (-5;0)$. $-5x+0y = -5\cdot4+0\cdot(-1) = -20$, $x=4$.

b) $\underline{n_e} = \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} = \big((-3)-2;1-(-3)\big) = (-5;4)$. $-5x+4y = -5\cdot2+4\cdot(-3) = -22$, $-5x+4y=-22$.

c) $\underline{n_e} = \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} = \big(4-0;0-(-3)\big) = (4;3)$. $4x+3y = 4\cdot0+3\cdot(-3) = -9$, $4x+3y=-9$.

d) $\underline{n_e} = \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} = \big(2{,}5-(-1{,}5);-3{,}2-3\big) = (4;-6{,}2)$. $4x-6{,}2y = 4\cdot(-1{,}5)-6{,}2\cdot3 = -24{,}6$, $2x-3{,}1y=-12{,}3$.

21.6. Számítsuk ki a szakaszfelező pontot (F), majd az $\overrightarrow{AB}$ vektort! Az $\overrightarrow{AB}$ vektor az egyenes normálvektora, az adott pontja pedig a szakaszfelező pont.

a) $\underline{f} = \frac{\underline{a}+\underline{b}}{2} = \left(\frac{1+1}{2};\frac{1+(-1)}{2}\right) = (1;0)$, $F(1;0)$. $\underline{n_e} = \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} = \big(1-1;1-(-1)\big) = (0;2)$. $0x+2y = 0\cdot1+2\cdot0 = 0$, $y=0$.

b) $\underline{f} = \frac{\underline{a}+\underline{b}}{2} = \left(\frac{1+3}{2};\frac{-3+(-1)}{2}\right) = (2;-2)$, $F(2;-2)$. $\underline{n_e} = \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} = \big(3-1;-1-(-3)\big) = (2;2)$. $2x+2y = 2\cdot2+2\cdot(-2) = 0$, $x+y=0$. *c)* $\underline{f} = \frac{\underline{a}+\underline{b}}{2} = \left(\frac{0+5}{2};\frac{-2+0}{2}\right) = (2{,}5;-1)$, $F(2{,}5;-1)$. $\underline{n_e} = \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} = \big(5-0;0-(-2)\big) = (5;2)$.

$5x+2y = 5\cdot2{,}5+2\cdot(-1) = 10{,}5$, $5x+2y=10{,}5$. *d)* $\underline{f} = \frac{\underline{a}+\underline{b}}{2} = \left(\frac{-2{,}5-1{,}5}{2};\frac{2-3{,}2}{2}\right) = (-2;-0{,}6)$, $F(-2;-0{,}6)$.

$\underline{n_e} = \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} = \big(-2{,}5-(-1{,}5);-3{,}2-2\big) = (-1;-5{,}2)$. $-x-5{,}2y = -1\cdot(-2)-5{,}2\cdot(-0{,}6) = 5{,}12$, $-x-5{,}2y=5{,}12$.

22. feladatlap

22.1. Helyettesítsük be az egyenes x változójába A pont első és az y változójába az A pont második koordinátáját! Ha így igaz az egyenlőség, akkor pontja az egyenesnek, ellenkező esetben pedig nem az.

e: $2x-3y=2\cdot 2-3\cdot(-1,5)=8,5\neq 7,5$ tehát nem pontja; f: $x-y=2-(-1,5)=3,5=3,5,$ tehát pontja;

g: $2x-2,5y=2\cdot 2-2,5\cdot(-1,5)=7,75\neq 7,25,$ tehát nem pontja; h: $3x=3\cdot 2=6=6,$ tehát pontja. Két egyenesnek pontja az A pont.

22.2. $A\left(1;-\frac{3}{2}\right)$; $B(-1;3)$; $C\left(\frac{3}{5};-\frac{9}{5}\right)$; $D\left(\frac{7}{4};-1\right)$.

A: $-\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y=-\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2}\left(=-\frac{3}{2}\right)$, pontja az egyenesnek.

B: $-\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y=-\frac{1}{2}(-1)+\frac{2}{3}\cdot 3=\frac{5}{2}\left(\neq-\frac{3}{2}\right)$, nem pontja az egyenesnek.

C: $-\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y=-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\left(-\frac{9}{5}\right)=-\frac{3}{2}\left(=-\frac{3}{2}\right)$, pontja az egyenesnek.

D: $-\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y=-\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{4}+\frac{2}{3}(-1)=-\frac{37}{21}\left(\neq-\frac{3}{2}\right)$, nem pontja az egyenesnek.

22.3. Az egyenes és az x tengely metszéspontjának y koordinátája 0. Ezt az értéket az egyenes egyenletébe helyettesítve megkapjuk az x koordinátát. *a)* $2,5x+3,2\cdot 0=-8,\ \ x=-3,2.$ *b)* $-1,2x+2,4\cdot 0=4,8,\ \ x=-4.$ *c)* $x+2\cdot 0=6,\ \ x=6.$ *d)* $0,4x-0,6\cdot 0=1,8,$ $x=4,5.$

Az egyenes és az y tengely metszéspontjának x koordinátája 0. Ezt az értéket az egyenes egyenletébe helyettesítve megkapjuk az y koordinátát. *a)* $2,5\cdot 0+3,2y=-8,\ \ y=-2,5.$ *b)* $-1,2\cdot 0+2,4y=4,8,\ \ y=2.$ *c)* $x\cdot 0+2y=6,\ \ y=3.$ *d)* $0,4\cdot 0-0,6y=1,8,$ $y=-3.$

22.4. Helyettesítsünk be az f egyenes egyenletének x változójába $\frac{1}{3}$-ot! $-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}y=3,\ \ y_f=\frac{19}{4}=4,75.$ Helyettesítsünk be az e egyenes egyenletének x változójába $-\frac{1}{3}$-ot! $\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}y=2,\ \ y_e=-\frac{15}{2}=-7,5.$ A két ordináta különbsége: $y_f-y_e=\frac{19}{4}-\left(-\frac{15}{2}\right)=\frac{49}{4}=12,25.$

23. feladatlap

23.1. Használjuk a nevezetes szögfüggvényértékeket! *a)* $m=\operatorname{tg}30°=\frac{\sqrt{3}}{3},\ \ b=-2,\ \ y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2.$

b) $m=\operatorname{tg}45°=1,\ \ b=1,\ \ y=x+1.$ *c)* $m=\operatorname{tg}135°=-1,\ \ b=0,\ \ y=-x.$

23.2. Használjuk az $m=\frac{v_2}{v_1}$ összefüggést! *a)* $m=\frac{3}{2},\ \ \underline{v}(2;3),\ \ \underline{n}(-3;2);$ *b)* $m=-\frac{2}{5},\ \ \underline{v}(5;-2),\ \ \underline{n}(2;5);$

c) $m=\frac{1}{3},\ \ \underline{v}(3;1),\ \ \underline{n}(-1;3);$ *d)* $m=0,$ például $\underline{v}(1;0),\ \ \underline{n}(0;1).$

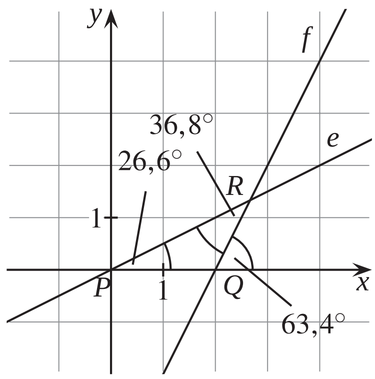
23.3. Használjuk az $m=-\frac{A}{B}$ és a $\operatorname{tg}\alpha=m$ összefüggést! *a)* $m=\frac{2}{5},\ \ \operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{5},\ \ \alpha=21,8°.$

b) $m=-2,\ \ \operatorname{tg}\alpha=-2,\ \ \alpha=180°-63,4°=116,6°.$ *c)* $m=-\frac{3}{2},\ \ \operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{2},\ \ \alpha=180°-56,3°=123,7°.$

23.4. Használjuk az $m=-\frac{A}{B}$ és a $\operatorname{tg}\alpha=m$ összefüggést! $m=-\frac{2}{3},\ \ \operatorname{tg}\alpha=-\frac{2}{3},\ \ \alpha=146,3°.$

23.5. Iránytényezős alakúvá alakítsuk át az egyenesek egyenleteit! Olvassuk le a meredekséget, és számítsuk ki az x tengelyhez tartozó hajlásszöget! e: $y=\frac{1}{2}x$, $m=\frac{1}{2}$, $\alpha_e=26{,}6°$.

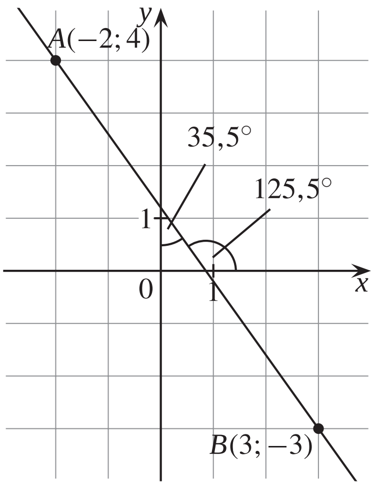
f: $y=2x-4$. $m=2$, $\alpha_f=63{,}4°$. A háromszög P csúcsánál lévő szöge $26{,}6°$, a Q csúcsnál lévő szög $180°-63{,}4°=116{,}6°$, az R csúcsnál lévő szöge $180°-26{,}6°-116{,}6°=36{,}8°$.



23.6. Helyettesítsük be a egyenes iránytényezős alakjába ($y=mx+b$) a két pont koordinátáit! $4=m(-2)+b$, $-3=m\cdot 3+b$, és az elsőfokú, kétismeretlenes egyenletrendszer megoldásából kiszámolhatjuk a meredekséget! $4+2m=-3m-3$, $m=-\frac{7}{5}$, $b=\frac{6}{5}$.

$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{7}{5}$. $\alpha=125{,}5°$ -os szöget zár be az egyenes az x tengellyel.

Az egyenes y tengellyel bezárt szöge $90°-(180°-125{,}5°)=35{,}5°$.



24. feladatlap

24.1. Írjuk fel az egyenesek normálvektorát, és a párhuzamosság feltételével ellenőrizzük a normálvektorok párhuzamosságát! Ha fennáll az egyenlőség, akkor párhuzamos a két vektor, így a két egyenes is, ha pedig nem, akkor nem párhuzamos a két egyenes.

$\underline{n_a}(5;-2)$; $\underline{n_b}(-1;0{,}4)$; $\underline{n_c}(-1;-2{,}5)$; $\underline{n_d}(14;35)$; $\underline{n_e}(0{,}6;-0{,}25)$; $\underline{n_f}(-5;-12)$. Az egymással párhuzamos egyenesek: $\underline{a}\parallel\underline{b}$, $\underline{c}\parallel\underline{d}$. Az egymásra merőleges egyenesek normálvektorainak skaláris szorzata 0. Az egymásra merőleges egyenesek: $\underline{a}\perp\underline{c}$, $\underline{a}\perp\underline{d}$, $\underline{b}\perp\underline{c}$, $\underline{b}\perp\underline{d}$, $\underline{e}\perp\underline{f}$.

24.2. *a)* Párhuzamos: $\frac{3}{1}=\frac{p}{5}$, $p=15$. Merőleges: $(1;5)\cdot(3;p)=1\cdot 3+5\cdot p=0$, $p=-\frac{3}{5}$. *b)* Párhuzamos: $\frac{p}{1}=\frac{-2}{5}$, $p=-0{,}4$. Merőleges: $(1;5)\cdot(p;-2)=1\cdot p+5\cdot(-2)=0$, $p=10$. *c)* Párhuzamos: $\frac{-10}{1}\neq\frac{2}{5}$, p megadásával nem tehetők párhuzamossá. Merőleges: $(1;5)\cdot(-10;2)=1\cdot(-10)+5\cdot 2=0$. Az egyenlőség p-től függetlenül fennáll, így tetszőleges p esetén merőlegesek egymásra az egyenesek.

24.3. *a)* A két párhuzamos egyenes normálvektora megegyezik. $\underline{n}(2;-5)$. A keresett egyenes $n_1\cdot x+n_2\cdot y=n_1\cdot x_0+n_2\cdot y_0$, $2x-5y=2\cdot 1-5\cdot 4=-18$. $2x-5y=-18$.

b) Az adott egyenes $\underline{n}(2;-5)$ normálvektora a keresett merőleges egyenes irányvektora, így a keresett normálvektor $\underline{n}(5;2)$. $5x+2y=5\cdot 1+2\cdot 4=13$. $5x+2y=13$.

24.4. *a)* Az iránytényezős egyenlettel ($y=mx+b$) meghatározott egyenesek akkor párhuzamosak, ha iránytényezőjük egyenlő $m=-\frac{3}{2}$. Helyettesítsük be a pont koordinátáit! $4=-\frac{3}{2}(-1)+b$, $b=\frac{5}{2}$. Az egyenlet $y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$.

b) Határozzuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a $P(-1;4)$ ponton és merőleges az $y=-\frac{3}{2}x+1$ egyenesre! Az iránytényezős egyenlettel ($y=mx+b$) meghatározott egyenesek akkor merőlegesek egymásra, ha iránytényezőik szorzata -1, így a keresett iránytényező $m=\frac{2}{3}$. Helyettesítsük be a pont koordinátáit! $4=\frac{2}{3}(-1)+b$, $b=\frac{14}{3}$. Az egyenlet $y=\frac{2}{3}x+\frac{14}{3}$.

25. feladatlap

25.1. A két egyenes egyenleteivel meghatározott egyenletrendszer megoldása adja meg a metszéspont koordinátáit.
a) $x=4$, $y=2$. A metszéspont $M(4;2)$. *b)* $x=-3,5$, $y=0,35$. A metszéspont $M(-3,5;0,35)$.

c) $x=7$, $y=5$. A metszéspont $M(7;5)$. *d)* $x=2$, $y=-\frac{2}{3}$. A metszéspont $M\left(2;-\frac{2}{3}\right)$.

25.2. Az egyenesek egyenlete által meghatározott egyenletrendszer megoldása $x=-\frac{1}{3}$, $y=\frac{8}{3}$. A metszéspont: $M\left(-\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right)$. Az irányvektorból a normálvektor meghatározható $\underline{n}(1;2)$. Az egyenes egyenlete: $x+2y=-\frac{1}{3}+2\cdot\frac{8}{3}=\frac{15}{3}=5$, $x+2y=5$.

25.3. A két egyenes metszéspontja $M(2;-1)$. Az $\overrightarrow{MP}=\underline{p}-\underline{m}=\left(1-2;0-(-1)\right)=(-1;1)$ vektor a keresett egyenes irányvektora, ekkor a normálvektora $\underline{n}(1;1)$. A keresett egyenes: $x+y=1\cdot1+1\cdot0=1$, $x+y=1$.

25.4. Az *A* és *C* pontokat összekötő átló irányvektora az $\overrightarrow{AC}=\underline{c}-\underline{a}=\left(5-(-3);3-(-1)\right)=(8;4)$. A normálvektor $\underline{n}(-4;8)$. Az *AC* átló egyenese $-4x+8y=-4\cdot5+8\cdot3=4$, $-x+2y=1$.

A *B* és *D* pontokat összekötő átló irányvektora: $\overrightarrow{BD}=\underline{d}-\underline{b}=\left(-6-2;5-(-3)\right)=(-8;8)$. A normálvektor $\underline{n}(8;8)$. A *BD* átló egyenese $8x+8y=8\cdot2+8\cdot(-3)=-8$, $x+y=-1$.
A $-x+2y=1$ és $x+y=-1$ egyenletrendszer megoldása $x=-1$, $y=0$. A keresett metszéspont $M(-1;0)$.

25.5. A háromszög egyes csúcspontjainak koordinátáit megkaphatjuk a megfelelő oldalegyenesek metszéspontjának kiszámolásával. A *C* csúcs az *a* és *b* egyenes metszéspontja: A $12x+5y=54$ és $x+y=1$ egyenesek metszéspontja $C(7;-6)$. Az *A* csúcs a *b* és *c* egyenes metszéspontja: $x+y=1$ és $-4x+3y=10$ egyenesek metszéspontja $A(-1;2)$. Az *B* csúcs az *a* és *c* egyenes metszéspontja: $12x+5y=54$ és $-4x+3y=10$ egyenesek metszéspontja $B(2;6)$.

A csúcspontok ismeretében a oldalszakaszokra fektetett vektorok és azok hossza meghatározható.

$\overrightarrow{AB}=\underline{b}-\underline{a}=(3;4)$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$, $\overrightarrow{AC}=\underline{c}-\underline{a}=(8;-8)$; $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{8^2+(-8^2)}=\sqrt{2\cdot64}=8\sqrt{2}$; $\overrightarrow{BC}=\underline{c}-\underline{b}=(5;-12)$; $\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{25+144}=\sqrt{13}$. A kerület $k=a+b+c=5+\sqrt{128}+\sqrt{13}=19,9$.

26. feladatlap

26.1. Írjuk fel az egyenes egyenletének nullára redukált alakját! $2x+y-5=0$.

Az $\underline{n}(2;1)$ normálvektor hossza $|\underline{n}|=\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$. Helyettesítsünk be a távolság-összefüggésbe!

$d=\left|\frac{Ax_0+By_0+c}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|=\left|\frac{2x+y-5}{\sqrt{5}}\right|$. Az *A* pont távolsága $d_A=\left|\frac{2x+y-5}{\sqrt{5}}\right|=\left|\frac{2(-3)+1\cdot1-5}{\sqrt{5}}\right|=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$. Az *B* pont távolsága

$d_B=\left|\frac{2x+y-5}{\sqrt{5}}\right|=\left|\frac{2\cdot3+1(-1)-5}{\sqrt{5}}\right|=0$, a pont rajta van az egyenesen.

26.2. Az *a* oldal egyenletét felírhatjuk a *B* és a *C* csúcsok segítségével. Az *a* oldal irányvektora $\overrightarrow{BC}=\underline{c}-\underline{b}=(3-2;-2-5)=(1;-7)$, normálvektora $\underline{n}(7;1)$. Az egyenes egyenlete $7x+y=7\cdot2+1\cdot5=19$, $7x+y=19$. A keresett magasság megegyezik az *A* csúcs és az *a* egyenes távolságával: $m_a=\left|\frac{7x+y-19}{\sqrt{7^2+1^2}}\right|=\left|\frac{7(-1)+2-19}{\sqrt{50}}\right|=\frac{24}{\sqrt{50}}=\frac{12}{25}\sqrt{50}$. Az *a* oldal hossza: $a=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{7^2+1^2}=\sqrt{50}$.

A terület: $T=\frac{a\cdot m}{2}=\frac{\frac{12}{25}\sqrt{50}\cdot\sqrt{50}}{2}=12$.

26.3. Ellenőrizzük, hogy a két egyenes normálvektorai egymással párhuzamosak! A párhuzamosság feltétele teljesül: $\frac{3}{-3}=\frac{-4}{4}=-1$.
Határozzuk meg az *e* egyenes egy *P* pontját, és határozzuk meg a pontnak az *f* egyenestől való távolságát! A *P* pont ordinátája legyen 0. $3x-4\cdot0=3$, $x=1$, $P(1;0)$. Írjuk fel a távolság-összefüggését:

$d_B = \left|\frac{-3x+4y-2}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}\right| = \left|\frac{-3\cdot 1+4\cdot 0-2}{5}\right| = 1.$ A két egyenes egységnyi távolságra van egymástól.

26.4. Használjuk a távolság-összefüggést mind a két egyenesre!

Az e egyenestől vett távolság: $d_{A,e} = \left|\frac{-x+2y-5}{\sqrt{(-1)^2+2^2}}\right| = \left|\frac{-1\cdot 6+2\cdot 2-5}{\sqrt{5}}\right| = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7}{5}\sqrt{5} = 3{,}13.$

Az f egyenestől vett távolság: $d_{A,f} = \left|\frac{x+3y-6}{\sqrt{1^2+3^2}}\right| = \left|\frac{1\cdot 6+3\cdot 2-6}{\sqrt{10}}\right| = \frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{3}{5}\sqrt{10} = 1{,}9.$ Az f egyeneshez van közelebb az A pont.

26.5. A négyzet oldalának hosszát a távolság-összefüggésbe való behelyettesítéssel kaphatjuk meg.

$d_A = \left|\frac{-4x+3y-0}{\sqrt{(-4)^2+3^2}}\right| = \left|\frac{-4(-1)+3\cdot 7}{5}\right| = \frac{25}{5} = 5.$ A négyzet oldala tehát 5 egység hosszúságú, a kerülete pedig $4\cdot 5 = 20.$

27. feladatlap

27.1. Helyettesítsük be a megfelelő értékeket a kör $(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$ egyenletébe!

a) $(x-0)^2+(y-0)^2=5^2,\ x^2+y^2=25;$ *b)* $(x-3)^2+(y-4)^2=10^2,\ (x-3)^2+(y-4)^2=100;$

c) $\left(x-(-2)\right)^2+(y-3)^2=\left(\sqrt{7}\right)^2,\ (x+2)^2+(y-3)^2=7;$ *d)* $(x-0)^2+\left(y-(-5)\right)^2=5^2,\ x^2+(y+5)^2=25;$

e) $\left(x-(-2)\right)^2+\left(y-(-5)\right)^2=1^2,\ (x+2)^2+(y+5)^2=1.$

27.2. Az $(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$ összefüggés alapján olvashatjuk ki a megfelelő értékeket.

a) $C(0;0),\ r=12;$ *b)* $C(0;0),\ r=\sqrt{2};$ *c)* $C(1;-1),\ r=1;$ *d)* $C(-2;3),\ r=0{,}3;$ *e)* $C(1;-5),\ r=2{,}5.$

27.3. Alakítsuk át a kör egyenleteit! *a)* $x^2-4x+y^2-1=(x-2)^2-4+y^2-1=0,\ (x-2)^2+y^2=5,\ C(2;0),\ r=\sqrt{5}.$

b) $x^2+2x+y^2-3=(x+1)^2-1+y^2-3=0,\ (x+1)^2+y^2=4,\ C(-1;0),\ r=2.$

c) $x^2+5x+y^2-3y+2{,}25=(x+2{,}5)^2-6{,}25+(y-1{,}5)^2-2{,}25+2{,}25=0,\ (x+2{,}5)^2+(y-1{,}5)^2=6{,}25,\ C(-2{,}5;1{,}5),\ r=2{,}5.$

d) $x^2-6x+y^2-2y-15=(x-3)^2-9+(y-1)^2-1-15=0,\ (x-3)^2+(y-1)^2=25,\ C(3;1),\ r=5.$

e) $2x^2-4x+2y^2-4y+2=2(x-1)^2-2+2(y-1)^2-2+2=0,\ (x-1)^2+(y-1)^2=1,\ C(1;1),\ r=1.$

27.4. *a)* Nem köregyenlet, mert a négyzetes tagok együtthatója nem egyenlő.
b) Az xy tag nem szerepelhet a köregyenletben.

c) $x^2+y^2-3y+2{,}25=x^2+(y-1{,}5)^2-2{,}25+2{,}25=0,\ x^2+(y-1{,}5)^2=0.$ Nem köregyenlet. (A 0 sugarú kör egy pont.)

d) $4x^2+8x+4y^2-16y-5=4(x+1)^2-4+4(y-2)^2-16-5=0,\ (x+1)^2+(y-2)^2=\frac{25}{4},\ C(-1;2),\ r=\frac{5}{2}.$

e) $x^2-4x+4+y^2+4y+20=(x-2)^2-4+4+(y+2)^2-4+20=0,\ (x-2)^2+(y+2)^2=-16.$ Nem köregyenlet.

27.5. A kör sugara a $\overrightarrow{CP}=\underline{p}-\underline{c}=\left(5-2;2-(-1)\right)=(3;3)$ vektor hossza. $\left|\overrightarrow{CP}\right|=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}.$ A kör egyenlete $(x-2)^2+(y+1)^2=18.$

27.6. A kör középpontja az AB szakasz felezőpontja. $c=\frac{a+b}{2}=\left(\frac{-3+5}{2};\frac{2-4}{2}\right)=(1;-1),\ C(1;-1).$

A kör sugara az $\overrightarrow{CA}=\underline{a}-\underline{c}=\left(-3-1;2-(-1)\right)=(-4;3)$ vektor hossza. $\left|\overrightarrow{CA}\right|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5.$

A kör egyenlete $(x-1)^2+(y+1)^2=25.$

28. feladatlap

28.1. A kör egyenletébe helyettesítsük be a pont koordinátáit! Ha a sugár négyzeténél kisebb számot kapunk, akkor a körön belül, ha egyenlő, akkor a körön, ha nagyobb, akkor a körön kívül van a pont.

a) A: $(-6)^2+5^2=61<100$, belső pont. B: $(-6)^2+8^2=100=100$, a körív pontja.

C: $7^2+7^2=98<100$, belső pont. D: $10^2+0^2=100=100$, a körív pontja.

b) A: $(8-3)^2+(-12)^2=169=169$, a körív pontja. B: $(-9-3)^2+(-5)^2=169=169$, a körív pontja.

C: $(6-3)^2+11^2=130<169$, belső pont. D: $(14-3)^2+1^2=122<169$, belső pont.

c) A: $(-0,5)^2+(1,5+2)^2=0,5<1$, belső pont. B: $0^2+(-1+2)^2=1=1$, a körív pontja.

C: $0,5^2+(0+2)^2=4,25>1$, külső pont. D: $0,9^2+(0,1+2)^2=5,22>1$, külső pont.

d) A: $(1-2)^2+(1,5-3)^2=3,25<5$, belső pont. B: $(1-2)^2+(4-3)^2=2<5$, belső pont.

C: $(0-2)^2+(1-3)^2=8>5$, külső pont. D: $(1-2)^2+(4,5-3)^2=3,25<5$, belső pont.

28.2. Helyettesítsük be a kör egyenletébe az x koordinátát, majd fejezzük ki az y koordinátát!

a) $(4-3)^2+(y+1)^2=10$; $1+y^2+2y+1=10$; $y^2+2y-8=0$. $y_1=-4$, $y_2=2$.

b) $(0-3)^2+(y+1)^2=10$; $9+y^2+2y+1=10$; $y^2+2y=0$. $y_1=-2$, $y_2=0$.

c) $(5-3)^2+(y+1)^2=10$; $4+y^2+2y+1=10$; $y^2+2y-5=0$. $y_1=-1-\sqrt{6}$, $y_2=-1+\sqrt{6}$.

d) $(2,5-3)^2+(y+1)^2=10$; $0,25+y^2+2y+1=10$; $y^2+2y-8,75=0$. $y_1=-4,12$, $y_2=2,12$.

28.3. Helyettesítsük be a kör egyenletébe az y koordinátát, majd fejezzük ki az x koordinátát!

a) $(x-3)^2+(-2+5)^2=34$; $x^2-6x+9+9=34$; $x^2-6x-16=0$. $x_1=-2$, $x_2=8$.

b) $(x-3)^2+(0+5)^2=34$; $x^2-6x+9+25=34$; $x^2-6x=0$. $x_1=0$, $x_2=6$.

c) $(x-3)^2+(1+5)^2=34$; $x^2-6x+9+36=34$; $x^2-6x+11=0$. Nincs megoldás.

d) $(x-3)^2+(-4+5)^2=34$; $x^2-6x+9+1=34$; $x^2-6x-24=0$. $x_1=3-\sqrt{33}$, $x_2=3+\sqrt{33}$.

28.4. *a)* Az x tengely metszete $x_1=-3$, $x_2=3$. Az y tengely metszete $y_1=-1$, $y_2=9$.

b) Az x tengely metszete $x_1=-8$, $x_2=0$. Az y tengely metszete $y_1=0$, $y_2=6$.

c) Nincs x tengelymetszet. Az y tengelyt $y=4$-nél érinti.

28.5. A kör $(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$ egyenletébe az x és y változó helyébe behelyettesíthetjük a pontok koordinátáit, és az így kapott két darab kétismeretlenes egyenletrendszer megoldásakor megkapjuk a kör középpontjának u és v koordinátáját.

A: A pont behelyettesítésével $(-3-u)^2+(2-v)^2=29$, $u^2+v^2+6u-4v-16=0$.

B: B pont behelyettesítésével $(4-u)^2+(9-v)^2=29$, $u^2+v^2-8u-18v+68=0$.

Vonjuk ki egymásból a két egyenletet: $14u+14v-84=0$, $u+v=6$, $u=6-v$.

Helyettesítsünk vissza az első egyenletbe: $(6-v)^2+v^2+6(6-v)-4v-16=0$, $v^2-11v+28=0$. $v_1=4$, $v_2=7$. $u_1=6-v_1=2$, $u_2=6-v_2=-1$. A keresett kör egyenlete tehát: $(x-2)^2+(y-4)^2=29$ vagy $(x+1)^2+(y-7)^2=29$.

28.6. A feladatot úgy oldjuk meg, mint ahogy a kör középpontját megszerkesztenénk. Két-két pont által meghatározott szakaszok felezőmerőlegeseinek metszéspontja lesz a kör középpontja.

Az AC szakasz felezőmerőlegese: A felezőpont koordinátái $f_{AC}=\dfrac{\underline{a}+\underline{c}}{2}=(3;-2)$, $F_{AC}(3;-2)$; normálvektor $\overrightarrow{AC}=\underline{c}-\underline{a}=(2;2)$.

az egyenes egyenlete: $x+y=1$. Az AB szakasz felezőmerőlegese: A felezőpont koordinátái $f_{AB}=\dfrac{\underline{a}+\underline{b}}{2}=(5;-4)$, $F_{AB}(5;-4)$.

normálvektor $\overrightarrow{AB}=\underline{b}-\underline{a}=(6;-2)$; az egyenes egyenlete: $3x-y=19$. A két egyenes metszéspontja a kör középpontja $C_{\text{kör}}(5;-4)$.

A kör sugara pl. az $\overrightarrow{C_{\text{kör}}A}=\underline{a}-\underline{c_{\text{kör}}}=(-3;1)$ vektor hossza: $\left|\overrightarrow{C_{\text{kör}}A}\right|=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$. A kör egyenlete: $(x-5)^2+(y+4)^2=10$.

29. feladatlap

29.1. Fejezzük ki az egyenes egyenletéből x-et! $x = 11 + 2y$. Helyettesítsük be a körök egyenleteibe! Az így kapott másodfokú egyenlet megoldásszáma megegyezik a kör és egyenes metszéspontjainak számával.

k_1: $\left((11+2y)-6\right)^2 + (y+5)^2 = 10$, $25 + 20y + 4y^2 + y^2 + 10y + 25 = 10$, $y^2 + 6y + 8 = 0$. A másodfokú egyenlet diszkriminánsa $D = 36 - 32 = 4 > 0$, tehát az egyenes két pontban metszi a kört.

k_2: $\left((11+2y)-3\right)^2 + (y-1)^2 = 25$, $64 + 32y + 4y^2 + y^2 - 2y + 1 = 25$, $5y^2 + 30y + 40 = 0$. A másodfokú egyenlet diszkriminánsa $D = 36 - 32 = 4 > 0$, tehát az egyenes két pontban metszi a kört.

29.2. Helyettesítsük be a pontok koordinátáit a kör érintőjének $(x-u)(x_0-u) + (y-v)(y_0-v) = r^2$ egyenletébe!

E: $(x-2)\cdot(5-2) + (y+1)\cdot(3+1) = 25$, $3x - 6 + 4y + 4 = 25$. Az érintő egyenlete: $3x + 4y = 27$.

F: $(x-2)\cdot(-2-2) + (y+1)\cdot(2+1) = 25$, $-4x + 8 + 3y + 3 = 25$. Az érintő egyenlete: $-4x + 3y = 14$.

29.3. Fejezzük ki az egyik ismeretlent az egyenes egyenletéből, és helyettesítsük be a kör egyenletébe! $y = -x - 4$.

$(x+1)^2 + \left((-x-4)+2\right)^2 = 25$; $x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = 25$, $x^2 + 3x - 10 = 0$. $x_1 = -5$, $x_2 = 2$. $y_1 = 1$, $y_2 = -6$.

A két metszéspont $M_1(-5;1)$, $M_2(2;-6)$. A húr hossza megegyezik az $\overrightarrow{M_1M_2} = \underline{m_2} - \underline{m_1} = (7;-7)$ vektor hosszával:

$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{7^2 + (-7)^2} = \sqrt{2\cdot 49} = 7\sqrt{2}$.

29.4. Bontsuk fel az egyenletek bal oldalán lévő zárójeleket. Vonjuk ki egymásból a két egyenletet, majd az így kapott elsőfokú egyenletből fejezzük ki az egyik ismeretlent! Valamelyik köregyenletbe való behelyettesítés után a közös pontok koordinátái meghatározhatók. k_1: $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 9$; k_2: $x^2 - 10x + 25 + y^2 + 2y + 1 = 4$. A két egyenlet különbsége: $3x - 2y = 13$,

$y = \dfrac{3x-13}{2}$. $(x-2)^2 + \left(\dfrac{3x-13}{2} - 1\right)^2 = 9$, $13x^2 - 106x + 205 = 0$. $x_1 = \dfrac{41}{13}$, $x_2 = 5$. $y_1 = -\dfrac{23}{13}$, $y_2 = -1$. A két metszéspont $M_1\left(\dfrac{41}{13}; -\dfrac{23}{13}\right)$, $M_2(5;-1)$.

29.5. Bontsuk fel a köregyenletekben a zárójeleket, majd vonjuk ki egymásból a két egyenletet! k_1: $x^2 - 8x + y^2 - 8y + 7 = 0$;

k_2: $x^2 - 11x + y^2 - 4y + 28 = 0$. A két kör különbsége: $3x - 4y - 21 = 0$, $y = \dfrac{3x-21}{4}$. A k_1 egyenletbe behelyettesítve:

$(x-4)^2 + \left(\dfrac{3x-21}{4} - 4\right)^2 = 25$, $x^2 - 14x + 49 = 0$. $x = 7$, $y = \dfrac{3x-21}{4} = 0$. Az érintési pont $E(7;0)$.

30. feladatlap

30.1. *a)* Az AB szakaszra felírt vektor $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} = (8;-6)$, a vektor hossza $\overrightarrow{AB} = \sqrt{64+36} = 10$. Az A és B pont távolsága 10.

b) Az AB oldal felezőpontjába mutató helyvektor koordinátái $\underline{f} = \dfrac{\underline{a}+\underline{b}}{2} = (1;3)$. Az egyenes egyik normálvektora az $\overrightarrow{AB}$ vektor.

Felírva az egyenes egyenletét $8x - 6y = 8 - 18 = -10$. Az oldalfelező merőleges egyenlete: $4x - 3y = -5$.

c) Az AB szakasz felezőpontja a kör középpontja $C(1;3)$. A kör sugara $\overrightarrow{CA}$ vektor hossza: $\overrightarrow{CA} = \sqrt{(-3-1)^2 + (6-3)^2} = 5$. A kör egyenlete: $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$.

30.2. Az y tengely metszéspontjait az $x = 0$ behelyettesítéssel kaphatjuk meg. $y^2 + 10y - 8 = 0$ egyenlet megoldása $y_1 = -5 - \sqrt{33}$ és $y_2 = -5 + \sqrt{33}$. A tengelymetszet pontjai: $P_1\left(0; -5-\sqrt{33}\right)$ és $P_1\left(0; -5+\sqrt{33}\right)$.

b) Az eredeti kör egyenlete: $(x-4)^2 + (y+5)^2 = 49$. A koncentrikus körök középpontja megegyezik, így csak a sugarat kell kicserélni 1-re. A keresett kör egyenlete: $(x-4)^2 + (y+5)^2 = 1$.

30.3. *a)* Jelöljük a négyzet csúcsait pozitív körüljárási irány szerint *A*, *B*, *C* és *D* betűvel! $\overrightarrow{AO}(-2;5)$. $\underline{c}=\overrightarrow{AO}+\underline{o}=(1;6)$, $C(1;6)$.

$\overrightarrow{AO}$ 90°-os elforgatottja $(5;2)$. $\underline{d}=(5;2)+\underline{o}=(8;3)$, $D(8;3)$. $\underline{b}=(-5;-2)+\underline{o}=(-2;-1)$, $B(-2;-1)$.

b) Az oldalának hossza megegyezik az $\overrightarrow{AB}=\underline{b}-\underline{a}=(-7;3)$ vektor hosszával. $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-7)^2+3^2}=\sqrt{58}$. A négyzet területe $t=a^2=58$.

30.4. *a)* $C(c_1;c_2)$. A súlypont kiszámolásának képletéből: $\underline{s}=\frac{\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}}{3}=\left(\frac{-2+6+c_1}{3};\frac{-4+6+c_2}{3}\right)=(0;4)$. $\frac{-2+6+c_1}{3}=0$, $c_1=-4$. $\frac{-4+6+c_2}{3}=4$, $c_2=10$. $C(-4,10)$.

b) $h_A=\frac{2\underline{a}+\underline{b}}{3}=\left(\frac{2(-2)+6}{3};\frac{2\cdot(-4)+6}{3}\right)=\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$, $H_A\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$.

c) A keresett súlyvonal a *B* és az *S* ponton halad át. $\overrightarrow{SB}=\underline{b}-\underline{s}=(6;2)$ irányvektorból $\underline{n}(-2;6)$ a normálvektor. A súlyvonal egyenlete: $-x+3y=12$.

30.5. *a)* Derékszögű a háromszög, ha két oldalára fektetett vektor skaláris szorzata 0. $\overrightarrow{CA}=\underline{a}-\underline{c}=(10;-5)$, $\overrightarrow{CB}=\underline{b}-\underline{c}=(4;8)$, a skaláris szorzat. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=10\cdot4+(-5)\cdot8=0$, tehát a háromszög derékszögű, és a *C* csúcsnál van a derékszög.

b) A derékszögű háromszög köré írt kör az átfogó Thalész-köre. A kör középpontja az *AB* átfogó felezőpontja $f_{AB}=\frac{\underline{a}+\underline{b}}{2}=(4;2,5)$. $F_{AB}\left(4;\frac{5}{2}\right)$. A kör sugara az *AB* vektor hosszának a fele. $\overrightarrow{AB}=\underline{b}-\underline{a}=(-6;13)$. $r=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|}{2}=\frac{\sqrt{6^2+13^2}}{2}=\frac{\sqrt{205}}{2}$. A kör egyenlete: $(x-4)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{205}{4}$.

30.6. *a)* Helyettesítsük be a kör egyenletébe az $x=1$ értéket! $(1+2)^2+(y-4)^2=25$, $(y-4)^2=16$, $y_1=0$, $y_2=8$. A keresett pontok: $P_1(1;0)$, $P_2(1;8)$.

b) A kör középpontja $C(-2;4)$. A P_1 ponton átmenő érintő egyenletének meghatározásához felírjuk a normálvektort. $\underline{n_1}=\overrightarrow{P_1C}=\underline{c}-\underline{p_1}=(-3;4)$. A P_1 ponton átmenő érintő egyenlete $-3x+4y=3$. A P_2 ponton átmenő érintő egyenletének meghatározásához felírjuk a normálvektort. $\underline{n_2}=\overrightarrow{P_2C}=\underline{c}-\underline{p_2}=(-3;-4)$. A P_2 ponton átmenő érintő egyenlete $-3x-4y=-35$, $3x+4y=35$.

30.7. Alakítsuk teljes négyzetté a köregyenlet bal oldalát! $(x-2)^2+y^2=9$. A kör középpontja $C(2;0)$. A két egyenes metszéspontja az egyenesek egyenletei által megadott egyenletrendszer megoldása: $M(5;4)$. Az két pont távolsága: $\overrightarrow{MC}=\underline{c}-\underline{m}=(-3;-4)$. $\left|\overrightarrow{MC}\right|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5$.

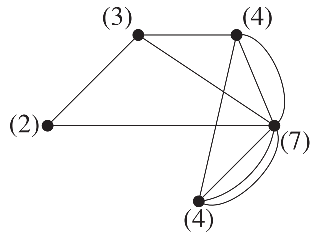
30.8. *a)* Ha a kör érinti az *x* tengelyt, akkor a sugara egyenlő a középpontja *v* koordinátájának abszolút értékével $r=|v|$. A kör egyenlete $(x-5)^2+(y+3)^2=9$.

b) Ha a kör érinti az *y* tengelyt, akkor a sugara egyenlő a középpontja *u* koordinátájának abszolút értékével $r=|u|$. A kör egyenlete $(x-5)^2+(y+3)^2=25$.

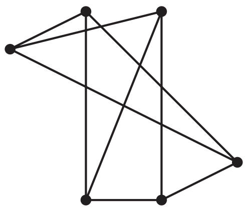
c) A pont és egyenes távolságának képletével $r=d=\left|\frac{2x-y-5}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}\right|=\left|\frac{10-(-3)-5}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}\right|=\frac{8}{\sqrt{5}}$. A kör egyenlete $(x-5)^2+(y+3)^2=\frac{64}{5}$.

31. feladatlap

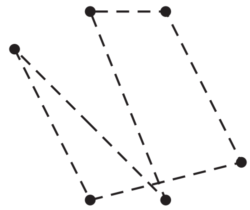
31.1. A feladatnak több megoldása is lehetséges. Például az egyik:



31.2. Egy lehetséges megoldás:



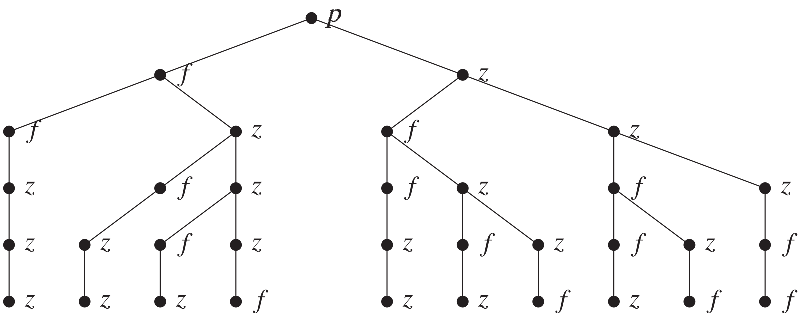
gráf



komplementer gráf

31.3. A csúcsok fokszáma 3. Összfokszámot megkapjuk, ha a csúcsok számát (8) megszorozzuk a csúcsok fokszámával: $8 \cdot 3 = 24$. Teljes gráf esetén $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ él lenne, 12 éle van a kockának, tehát $28 - 12 = 16$ él hiányzik.

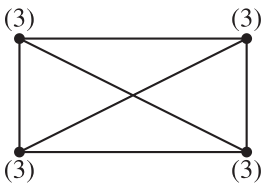
31.4. A kihúzási lehetőségek gráfja. (*p*: piros; *z*: zöld; *f*: fehér.) Az ábráról kiderül, hogy 10 kihúzási sorrend lehetséges.



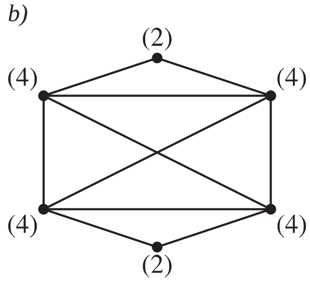
31.5. Nem, mert $15 \cdot 5 = 75$, vagyis páratlan lenne az összfokszám.

31.6. A feladatot csak azokon a gráfokon lehet végrehajtani, amelyek összes csúcspontja páros fokszámú, vagy pontosan két páratlan fokszámú csúcsa van. Megrajzolható gráfok: *b, c, d, e, f*.

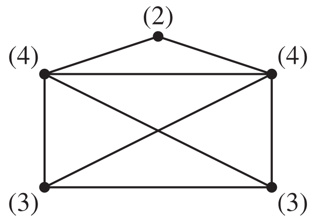
a)



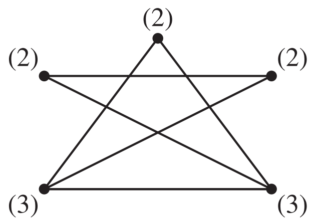
b)



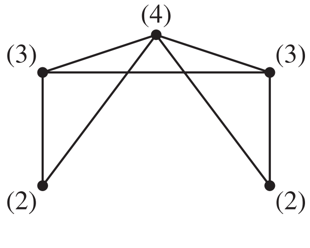
c)



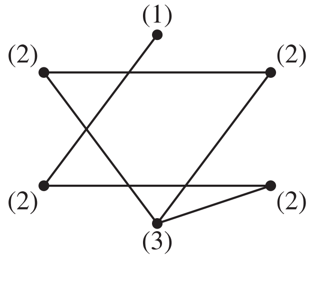
d)



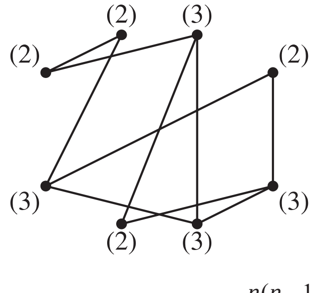
e)



f)



g)



31.7. Mivel mindenki kezet fog mindenkivel, a kézfogások gráfja teljes gráf. A teljes gráf éleinek száma $\frac{n(n-1)}{2} = 120$. Az $n^2 - n - 240 = 0$ másodfokú egyenlet megoldásai $n_1 = 16$ és $n_2 = -15$. Negatív nem lehet a megoldás, tehát a társaság 16 tagú volt.

31.8. *a)* igaz; *b)* hamis; *c)* hamis; *d)* igaz; *e)* igaz; *f)* hamis.

32. feladatlap

32.1. *a)* $4! = 24$; *b)* $3! = 6$.

32.2. *a)* $\binom{15}{12} = 455$; *b)* $\binom{4}{2} = 6$.

32.3. *a)* $5^5 = 3\,125$; *b)* $2^5 = 32$; *c)* $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$; *d)* $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27\,216$.

32.4. *a)* $7! = 5040$; *b)* $\frac{16!}{6! \cdot 3!} = 4\,843\,238\,400$.

32.5. *a)* $6 \cdot 3 = 18$; *b)* A feltételeket 8 darab prím elégíti ki. (11; 13; 23; 31; 41; 43; 53; 61); *c)* A feltételeknek megfelelő 4 darab négyzetszám létezik (16; 25; 36; 64).

32.6. *a)* $\binom{15}{10} = 3003$; *b)* $\binom{13}{8} = 1287$.

32.7. $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$.

33. feladatlap

33.1. *a)* $2^6 = 64$; *b)* $2^7 = 128$; *c)* $2^8 = 256$.

33.2. Ugyanannyi $\binom{12}{5} = \binom{12}{7}$.

33.3. *a)* $\binom{9}{6} = 84$; *b)* $\binom{22}{9} = 497\,420$.

33.4. *a)* A Pascal-háromszög egy eleme azt is megmutatja, hogy a kiindulási pontjától hányféle úton lehet hozzá eljutni. A betűnégyzetre ráilleszthető egy Pascal-háromszög úgy, hogy a bal felső sarokban lévő E betű a Pascal-háromszög csúcspontja. Így az X betű a 9. sor 5. átlója, vagyis $\binom{9}{5} = 126$ módon lehet oda eljutni, ennyiféle módon lehet kiolvasni a szót. *b)* Az E betűk a Pascal-háromszög teljes 7. sorát kiteszik, ezen elemek összege $2^7 = 128$. *c)* A felső téglalap kiolvasási száma $\binom{6}{4}$, az alsóé $\binom{4}{2}$. A kiolvasási lehetőségek: $\binom{6}{4} \cdot \binom{4}{2} = 15 \cdot 6 = 90$.

33.5. *a)* $(x+3)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3 \cdot 3 + \binom{4}{2}x^2 \cdot 3^2 + \binom{4}{3}x \cdot 3^3 + \binom{4}{4}3^4 = x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81.$

b) $(2x-5)^5 = \binom{5}{0}(2x)^5 + \binom{5}{1}(2x)^4(-5) + \binom{5}{2}(2x)^3(-5)^2 + \binom{5}{3}(2x)^2(-5)^3 + \binom{5}{4}(2x)(-5)^4 + \binom{5}{5}(-5)^5 =$

$= 32x^5 - 400x^4 + 2000x^3 - 5000x^2 + 6250x - 3125.$

c) $(3a+2b)^6 = \binom{6}{0}(3a)^6 + \binom{6}{1}(3a)^5(2b) + \binom{6}{2}(3a)^4(2b)^2 + \binom{6}{3}(3a)^3(2b)^3 + \binom{6}{4}(3a)^2(2b)^4 +$

$+ \binom{6}{5}(3a)(2b)^5 + \binom{6}{6}(2b)^6 = 729a^6 + 2916a^5b + 4860a^4b^2 + 4320a^3b^3 + 2160a^2b^4 + 576ab^5 + 64b^6.$

34. feladatlap

34.1. *a)* $\binom{8}{2} = 28$; *b)* $\binom{8}{3} = 56$.

34.2. *a)* $5!=120$; *b)* $4!=24$; *c)* $4\cdot 3!=24$; *d)* $5!-4!=96$; *e)* $4!=24$.

34.3. Az egyjegyű prímszámok halmaza $\{2;\ 3;\ 5;\ 7\}$. *a)* $\binom{4}{2}=6$; *b)* $4^3=64$; *c)* 2.

34.4. *a)* $\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{24}{2}=9936$. *b)* $\binom{24}{6}=134\ 596$; *c)* $\binom{32}{6}-\binom{24}{6}=771\ 596$; *d)* $\binom{8}{5}\binom{24}{1}=1344$.

34.5. *a)* $\binom{23}{5}=33\ 649$; *b)* $23\cdot 22\cdot 21\cdot 20\cdot 19=4\ 037\ 880$; *c)* $23^5=6\ 436\ 343$.

34.6. *a)* $\frac{20!}{10!\cdot 10!}=184\ 756$; *b)* $\frac{20!}{6!\cdot 6!\cdot 8!}=116\ 396\ 280$; *c)* $\frac{20!}{(5!)^4}=1\ 173\ 274\ 502$.

34.7. *a)* $2\cdot\frac{n(n-1)}{2}=2\cdot\frac{10\cdot 9}{2}=90$; *b)* $2\cdot\frac{16\cdot 15}{2}=240$.

35. feladatlap

35.1. Az összes eset száma: 5!. A kedvező esetek száma: 4!. P (legidősebb a 2.) $=\frac{4!}{5!}=\frac{1}{5}=0,2$.

35.2. Az összes eset száma: 4!. A kedvező esetek száma: $2!\cdot 2^2$. P(a házaspárok egymás mellett ülnek) $=\frac{2!\cdot 2^2}{4!}=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$.

35.3. Az összes eset száma: $\binom{32}{5}=201\ 376$. *a)* A kedvező esetek száma: $\binom{4}{4}\binom{28}{1}=28$. $P(\text{négy ász})=\frac{28}{201\ 376}=0,00014$.

b) A kedvező esetek száma: $\binom{8}{3}\binom{8}{2}=1568$. $P(\text{három zöld és két makk})=\frac{1568}{201\ 376}=0,0078$.

c) A kedvező esetek száma, mivel 8 darab tök van és négy hetes, de az egyik tök hetes: $\binom{21}{5}=20\ 349$. P(se tök, se hetes) =

$=\frac{20\ 349}{201\ 376}=0,1$.

35.4. Az összes eset száma: $\binom{10}{2}=45$, a kedvező esetek száma: $\binom{7}{2}+\binom{3}{2}=24$. $P(\text{a golyók azonos színűek})=\frac{24}{45}=0,533$.

35.5. Az összes eset száma: $6\cdot 6=36$.

A kedvező esetek száma: 5, mivel $6+2$; $2+6$; $5+3$; $3+5$; $4+4$. $P(\text{az összeg } 8)=\frac{5}{36}=0,139$.

35.6. Az összes eset száma: $6^2=36$. *a)* A kedvező esetek száma 8, mivel 11, 13, 23, 31, 41, 43, 53, 61: $P(\text{prím})=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$;

b) A kedvező esetek száma 12, mert 11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26. $P(<30)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$;

c) A kedvező esetek száma 6, mert 12, 24, 36, 42, 54, 66. $P(\text{osztható 6-tal})=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$;

d) A kedvező esetek száma 3, mert 12, 15, 24. $P(\text{120 osztója})=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

35.7. Az összes eset száma: $2^3=8$. A kedvező esetek száma: 1. $P(\text{csak az első fej})=\frac{1}{8}=0,125$.

35.8. $\binom{6}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^4=0,2$.

35.9. *a)* $\binom{15}{4}\cdot 0,3^4\cdot 0,7^{11}=0,219$; *b)* $\binom{15}{15}\cdot 0,3^{15}$.