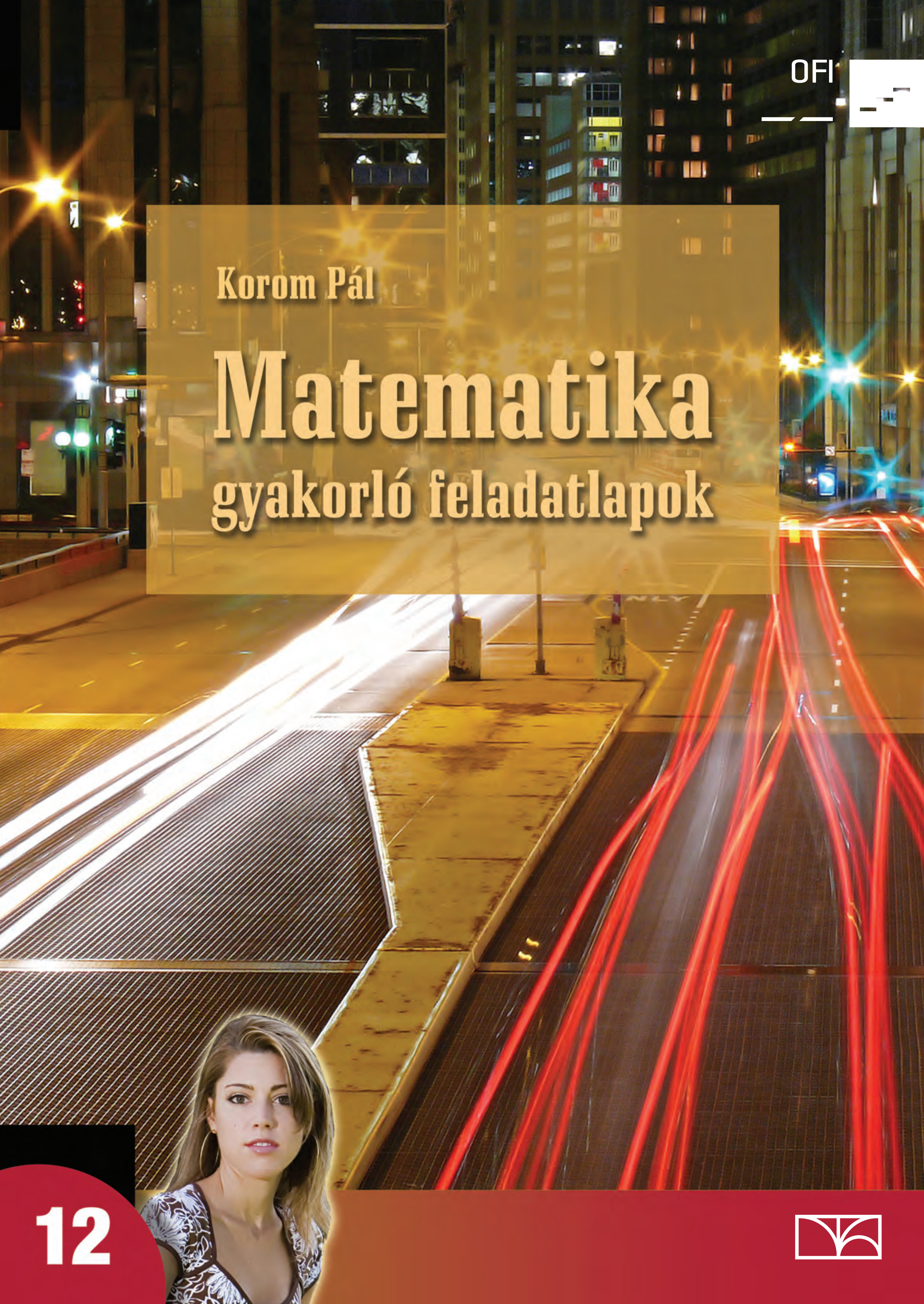
OFI

Korom Pál

Matematika

gyakorló feladatlapok



12

A kiadvány 2018. 10. 26-tól tankönyvvé nyilvánítási engedélyt kapott a TKV/3483-9/2018. számú határozattal.

A könyv megfelel az Oktatási Minisztérium kerettantervének [17/2004. (V. 20.)]
és az érettségi vizsga követelményeinek [40/2002. (V. 24.)].

Lektorok: Füleki Lászlóné, Beck Zsuzsa

Az ábrákat készítette: dr. Fried Katalin

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban kirendelt szakértők:
dr. Várady Ferenc, Zarubay Attila

ISBN 978-963-19-6459-2

Eszterházy Károly Egyetem
3300 Eger, Eszterházy tér 1.
Tel.: (+36-1) 460-1873
Fax: (+36-1) 460-1822
E-mail: kiado@ofi.hu

A kiadásért felel: dr. Liptai Kálmán rektor
Raktári szám: NT-16402/F
Felelős szerkesztő: Tóthné Szalontay Anna
Műszakiiroda-vezető: Horváth Zoltán Ákos
Műszaki szerkesztő: Orlai Márton
Grafikai szerkesztő: Görög Istvánné
Terjedelem: 15,45 (A/5) ív
Tömeg: 310 gramm
1. kiadás, 2019
Tördelés: Könyv Művek Bt.

Készült a Gyomai Kner Nyomda Zrt.-ben, 2019-ben
Magyar Könyvkiadók és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja

Az igazgatóság elnöke Balla László
Vezérigazgató Erdős Tamás
Telefon: 66/887-400

Tartalom

A feladatlap-gyűjtemény elsősorban a középiskolai matematika-tananyag gyakorlásának céljából készült. A tematikus sorrendben felépülő feladatlapok segítik az órai munkát, a szakköri, illetve korrepetáló foglalkozást, az önálló gyakorlást vagy a középszintű matematika-érettségire való felkészülést.

A feladatlapok a 12. évfolyamos kerettanterv tananyagát követik.

A feladatlapok feldolgozását két fontos egység segíti. Az első egységcsoport a minden nagyobb téma előtt a témához kapcsolódó elméleti emlékeztető. Ezek a részek az adott témához tartozó definíciókat, tételeket, illetve a fontosabb eljárásokat, módszereket tartalmazzák. A másik alapvető egység pedig a feladatlap-gyűjtemény végén található megoldások, amelyek az eredményeken túl az azokhoz vezető fontosabb lépéseket is magukban foglalják.

A feladatlap-gyűjtemény készítésekor elsődleges cél volt, hogy lehetőleg minden feladatot a feladatlap oldalain oldjon meg a tanuló.

Sorozatok

1. feladatlap

Sorozatok

EMLÉKEZTETŐ

sorozat: Számsorozaton olyan függvényt értünk, amelynek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza, az értékkészlete a valós számok részhalmaza. A sorozat jelölése: a_n, b_n, ... Például $a_8 = 7{,}1$ jelentése, az a jelű sorozat 8. tagjának értéke 7,1.

sorozat megadása:

1. ***Egyértelmű utasítással:*** Kapcsos zárójelpár között szerepel az utasítás. Például a_n = {Egymást követő, hárommal nem osztható pozitív egész számok.}. A sorozat első öt tagja: $a_1 = 1$; $a_2 = 2$; $a_3 = 4$; $a_4 = 5$; $a_5 = 7$.

2. ***Képlettel:*** A sorozat általános (n-edik) tagját az n sorszámmal fejezzük ki. Például $a_n = 3n^2 + \frac{1}{n+1}$. A sorozat első öt tagja: $a_1 = 3\frac{1}{2}$; $a_2 = 12\frac{1}{3}$; $a_3 = 27\frac{1}{4}$; $a_4 = 48\frac{1}{5}$; $a_5 = 75\frac{1}{6}$.

3. ***Rekurzív módon:*** Megadjuk a sorozat néhány kezdő tagját és egy szabályt, amellyel az általános tag az előző tagokkal előállítható. Például a sorozat első három tagja $a_1 = 1$; $a_2 = 1$; $a_3 = 1$; $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + a_{n-3}$.

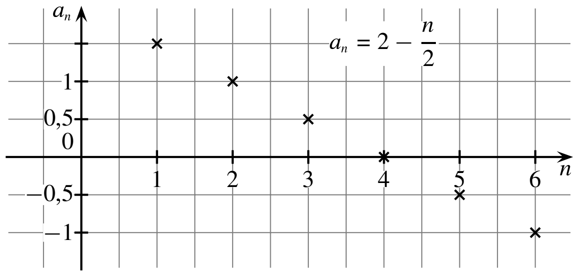
A sorozat 4. tagját az $a_4 = a_3 + 2a_2 + a_1 = 1 + 2 \cdot 1 + 1 = 4$ szabállyal állíthatjuk elő.

$a_5 = a_4 + 2a_3 + a_2 = 4 + 2 \cdot 1 + 1 = 7$;

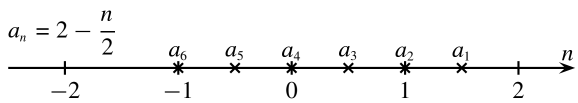
$a_6 = a_5 + 2a_4 + a_3 = 7 + 2 \cdot 4 + 1 = 16$; ....

sorozat ábrázolása:

1) ***Koordináta-rendszerben:*** A sorozatok elemei pontok a koordináta-rendszerben, a pontok x koordinátái a sorszámok, y koordinátái a sorozat értékei.



2) ***Számegyenesen:*** A sorozat tagjainak értékét a számegyenes megfelelő helyein helyezzük el.



Fibonacci-sorozat: Nevezetes rekurzív sorozat. Az első két tag 1, 1, minden további tag pedig az előző két tag összege.

$a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

FELADATOK

1.1. Add meg a sorozat első hét elemét!

a) {A sorozat első tagja 1. A második tag az első tag és a 2 összege. Minden következő tag egyenlő az előző tag és az előző tagot követő páros szám összegével.}

$a_1 =$; $a_2 =$; $a_3 =$; $a_4 =$;

$a_5 =$; $a_6 =$; $a_7 =$.

b) {A sorozat első tagja 1. A második tag az első tag és a 3 összege. Minden következő tag egyenlő az előző tag és az előző tagot követő páratlan szám összegével.}

$a_1 =$; $a_2 =$; $a_3 =$; $a_4 =$;

$a_5 =$; $a_6 =$; $a_7 =$.

c) {A sorozat első tagja 2. A következő tag az előző tag ellentettje.}

$a_1 =$; $a_2 =$; $a_3 =$; $a_4 =$;
$a_5 =$; $a_6 =$; $a_7 =$.

d) {Egymást követő pozitív páros számok 0,1-del csökkentett értéke.}

$a_1 =$; $a_2 =$; $a_3 =$; $a_4 =$;
$a_5 =$; $a_6 =$; $a_7 =$.

e) {Egymást követő pozitív öttel osztható számok.}=

$a_1 =$; $a_2 =$; $a_3 =$; $a_4 =$;
$a_5 =$; $a_6 =$; $a_7 =$.

1.2. Add meg a sorozat első hét elemét!

a) $a_n = 2^n - 20$

$a_1 =$; $a_2 =$; $a_3 =$; $a_4 =$;
$a_5 =$; $a_6 =$; $a_7 =$.

b) $b_n = n^2 - 10$

$a_1 =$; $a_2 =$; $a_3 =$; $a_4 =$;
$a_5 =$; $a_6 =$; $a_7 =$.

c) $c_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$

$a_1 =$; $a_2 =$; $a_3 =$; $a_4 =$;
$a_5 =$; $a_6 =$; $a_7 =$.

d) $a_n = (-1)^n \cdot n$

$a_1 =$; $a_2 =$; $a_3 =$; $a_4 =$;
$a_5 =$; $a_6 =$; $a_7 =$.

e) $a_n = (-2)^{n-1}$

$a_1 =$; $a_2 =$; $a_3 =$; $a_4 =$;
$a_5 =$; $a_6 =$; $a_7 =$.

1.3. Add meg képlettel a következő sorozatokat!

a) {Az egymást követő pozitív számok háromszorosai.}. $a_n =$ ....

b) {Az egymást követő pozitív számok négyzete.}. $b_n =$ ....

c) {Az egymást követő pozitív számok faktoriálisa.}. $c_n =$ ....

d) $\{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots\}$. $d_n =$ ....

e) $\{1, -4, 7, -10, 13, -14, 17, \ldots\}$. $e_n =$ ....

1.4. A következő sorozatokba írd be a hiányzó tagokat (a sorozat 3. és 5. elemét)! Írd fel a képleteket is!

a) $2;\quad 1\frac{1}{2};$ ....; $1\frac{1}{4};$ ....; $1\frac{1}{6}; \dots$ $a_n =$ ....

b) $1\frac{1}{2};\quad 2\frac{1}{2};$ ....; $4\frac{1}{2};$ ....; $6\frac{1}{2}; \dots$ $b_n =$ ....

c) $1;\quad -\frac{1}{2};$ ....; $-\frac{1}{4};$ ....; $-\frac{1}{6}; \dots$ $c_n =$ ....

d) $0;\quad \frac{1}{2};$ ....; $\frac{3}{4};$ ....; $\frac{5}{6}; \dots$ $d_n =$ ....

1.5. Állapítsd meg a rekurzív sorozatok 8. tagját!

a) $a_1 = 1,\quad a_2 = 3,\quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$

$a_8 =$

b) $a_1 = 0,\quad a_2 = 1,\quad a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}.$

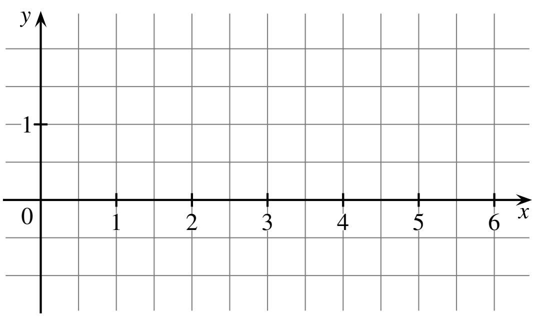
$a_8 =$

c) $a_1 = 1,\quad a_2 = -1,\quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$

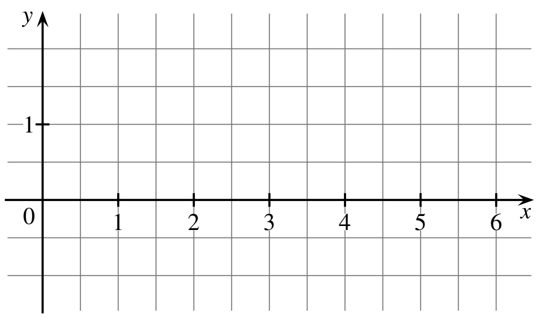
$a_8 =$

1.6. Ábrázold grafikonon a következő sorozatok első négy elemét!

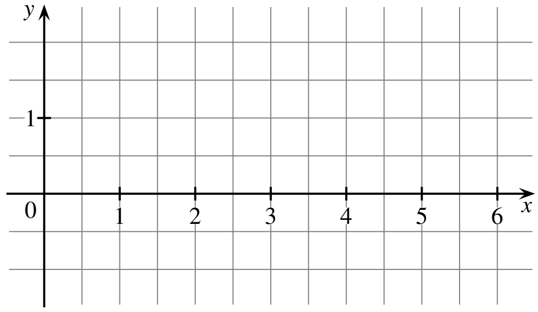
a) $a_n = 2 - \frac{1}{n}$



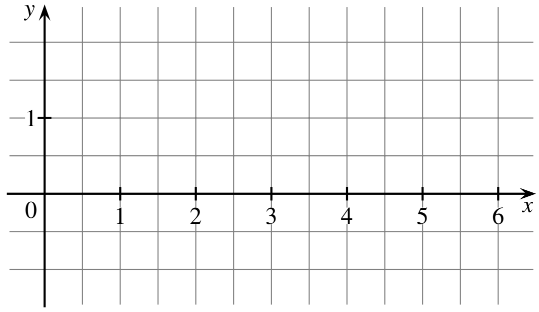
b) $b_n = -2 + \frac{n}{2}$



c) $c_n = (-1)^{n-1}$

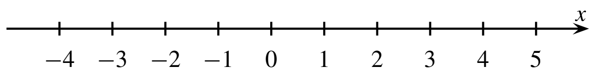


d) $d_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

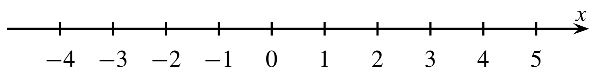


1.7. Ábrázold számegyenesen a következő sorozatokat!

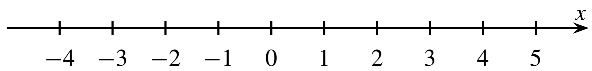
a) $a_n = -4 + \frac{2}{3}n$



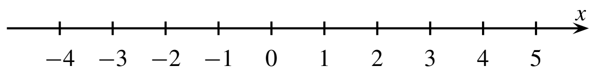
b) $b_n = 4 - n$



c) $c_n = (-1)^n \cdot \frac{4}{n}$

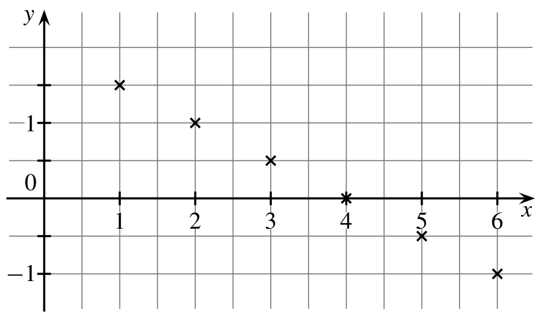


d) $d_n = \frac{6}{n \cdot (n+1)}$

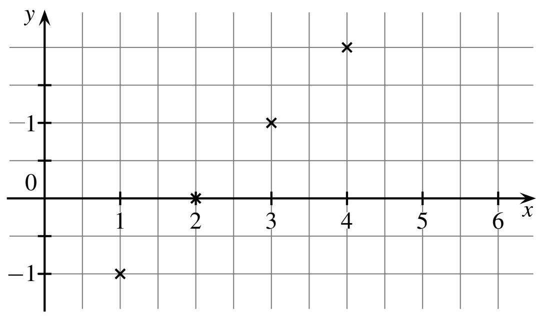


1.8. Keress a grafikonnal ábrázolt sorozatokhoz megfelelő képletet!

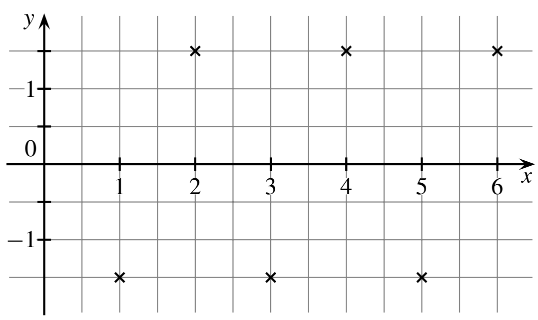
a) $a_n =$



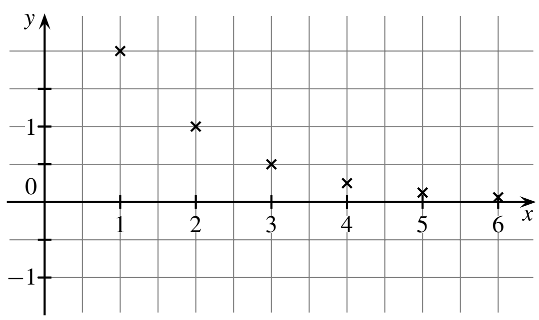
b) $b_n =$



c) $c_n =$



d) $d_n =$



1.9. Tagja-e a következő sorozatoknak a 64? Ha igen, akkor hányadik tagja az adott sorozatnak?

a) $a_n = n^2$ *b)* $b_n = 1 + 3n$

c) $c_n = 2 + 4(n - 2)$ *d)* $d_n = \frac{1}{8} \cdot 2^{n-1}$

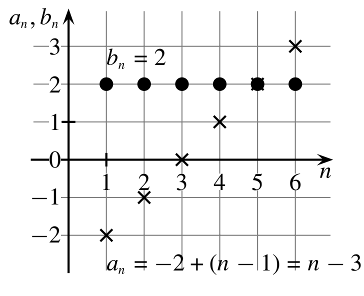
1.10. Döntsd el, hogy az a_n sorozat 8. tagja tagja-e a b_n sorozatnak!

a) $a_n = \frac{n+2}{n}$; $b_n = \frac{1}{4}n^2 - \frac{19}{8}n$. *b)* $a_n = 4n - 7$; $b_n = n^2 - 39$.

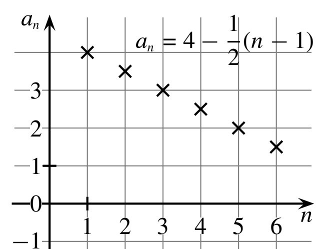
2. feladatlap

Számtani sorozat 1.

EMLÉKEZTETŐ



számtani sorozat: A számtani sorozat bármelyik tagjának (a másodiktól kezdve) és az azt megelőző tagjának a különbsége állandó. Az állandót ***differenciának*** (d) nevezzük. $a_n - a_{n-1} = d$. Például a $-2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ sorozat számtani sorozat, mivel az egymást követő tagok különbsége: $-1 - (-2) = 1$, $0 - (-1) = 1$, $1 - 0 = 1$, $2 - 1 = 1$, $3 - 2 = 1 \ldots$ állandó. (Az ábrán ez az a_n sorozat.) De számtani sorozat a $2, 2, 2, \ldots$ sorozat is, mert az egymást követő tagok különbsége 0. (Az ábrán ez a b_n sorozat.)



a számtani sorozat *n.* tagja: A számtani sorozat n. tagjának képlet alakja: $a_n = a_1 + (n - 1)d$, ahol a_1 a sorozat első eleme, d a sorozat differenciája. Például a sorozat első tagja $a_1 = 4$, különbsége $d = -\frac{1}{2}$. A sorozat általános tagja $a_n = 4 - \frac{1}{2}(n - 1)$. A 10. tag $a_{10} = 4 - \frac{1}{2}(10 - 1) = -0{,}5$.

***n.* tag mint számtani közép:** 1) A számtani sorozat bármelyik tagja (a másodiktól kezdve) két szomszédjának számtani közepe: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, ahol $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}^+$.) A számtani sorozat bármelyik tagja két azonos távolságra ($m \in \mathbb{N}^+$) lévő szomszédjának (amennyiben léteznek) számtani közepe: $a_n = \frac{a_{n-m} + a_{n+m}}{2}$, ahol $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}^+$.

FELADATOK

2.1. Írd fel a számtani sorozatok általános tagját, és számítsd ki a megadott tagokat!

a) A sorozat első tagja −5, és a differencia 2,2.

a_n = ...

a_6 = ...

a_{20} = ...

b) A sorozat első tagja 6, és a differencia −0,7.

b_n = ...

b_7 = ...

b_{16} = ...

c) A sorozat első tagja 4, és a differencia 0.

c_n = ...

c_8 = ...

c_{100} = ...

d) A sorozat első tagja 0, és a differencia −0,5.

d_n = ...

d_6 = ...

d_{51} = ...

2.2. Döntsd el, hogy az alábbi sorozatképletek közül melyek számtani sorozat képletei? Amennyiben számtani sorozat, határozd meg a első tagját és különbségét is!

a) $a_n = 2n^2 - 3n$;

a_1 = ... d = ...

b) $b_n = 4n$;

b_1 = ... d = ...

c) $c_n = 7 - 3n$;

c_1 = ... d = ...

d) $d_n = \dfrac{n^2 - 1}{n + 1}$;

d_1 = ... d = ...

e) $e_n = \dfrac{n^2 - 1}{n - 1}$;

e_1 = ... d = ...

f) $f_n = 4 + \dfrac{n - 2}{n + 2}$;

f_1 = ... d = ...

g) $g_n = 5$;

g_1 = ... d = ...

h) $h_n = \dfrac{3n + 1}{5}$;

h_1 = ... d = ...

i) $i_n = (-1)^n n$.

i_1 = ... d = ...

2.3. A számtani sorozat két tagjából határozd meg a sorozat első tagját és differenciáját! Írd fel az általános tagját, majd határozd meg a 20. elemét!

a) $a_5 = 14;\ a_9 = 58.$

$a_1 =$ ....

$d =$ ....

$a_n =$ ....

$a_{20} =$ ....

b) $b_8 = \frac{34}{3};\ b_{21} = \frac{86}{3}.$

$b_1 =$ ....

$d =$ ....

$b_n =$ ....

$b_{20} =$ ....

c) $c_5 = 87;\ c_{21} = 7.$

$c_1 =$ ....

$d =$ ....

$c_n =$ ....

$c_{20} =$ ....

d) $d_2 = -0{,}3;\ d_{15} = -19{,}8.$

$d_1 =$ ....

$d =$ ....

$d_n =$ ....

$d_{20} =$ ....

2.4. Egy számtani sorozatról tudjuk, hogy a harmadik és az ötödik tagjának összege 43. A negyedik és a hatodik tag összege 37. Mekkora a sorozat 100. tagja?

2.5. Egy számtani sorozat első három tagjának összege 30. A 10. és a 20. tag összege 540. Mekkora a 30. tag?

2.6. A Király utcára az 57. számú háznál kanyarodott rá egy taxi. Hányadik ház lesz a keresett 163. számú ház, feltéve, ha nincs osztott és üres telek?

2.7. Hány 6-tal osztható szám található 1000 és 2000 között?

2.8. Károly egy bál tombolasorsolásán csak 13-mal osztható szelvényeket volt hajlandó vásárolni. Mennyi zsetont fizetett a szelvényekért, ha darabja 20 zsetonba került, és az 501-től 750-ig tartó tömbből megvásárolta az összes szelvényt?

2.9. A számtani sorozat két tagja ismert. Határozd meg az ismeretlen tagját!

a) $a_5 = -5$; $a_7 = -1$; $a_6 =$

b) $b_1 = 6$; $b_3 = 16$; $b_2 =$

c) $c_{10} = -7$; $c_{20} = 27$; $c_{15} =$

d) $d_3 = 0$; $d_7 = 1$; $d_5 =$

3. feladatlap

Számtani sorozat 2.

EMLÉKEZTETŐ

a számtani sorozat első *n* tagjának összegképlete: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, ahol a_1 a sorozat első, a_n a sorozat n. tagja. Az összegképlet másik alakja: $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$. Például az $a_n = 10 - 2(n-1)$ sorozat első 20 tagjának összege $S_{20} = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{2 \cdot 10 + (20-1)(-2)}{2} \cdot 20 = 20$.

FELADATOK

3.1. Egy számtani sorozat első tagja 100, a differenciája 5.

a) Mekkora az első 100 tag összege?

b) Mekkora a következő 100 tag összege?

3.2. Egy számtani sorozat ötödik tagja 30, nyolcadik tagja 54. Mekkora az első 20 tag összege?

3.3. Egy számtani sorozat kezdő tagja 4, differenciája −2.

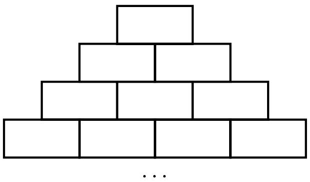
a) Hányadik tagja a sorozatnak a −50?

b) Hány tagot kell összeadni, hogy −2646-ot kapjunk?

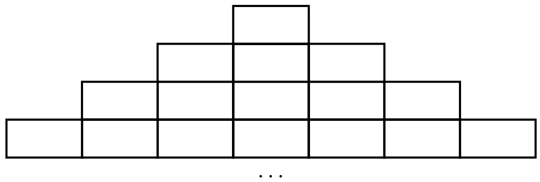
3.4. Hány gépkocsi fér el abban a parkolóban, ahol az első sorban 16 autó és minden további sorban 3-mal több autó fér el? Az utolsó sorban 31 autó parkolhat.

3.5. Gyerekek építőkockából az ábrán látható „várakat” építették. Hány építőkockát használtak fel, ha a vár mindkét esetben nyolc emelet magas?

a)



b)



3.6. Mennyi 93-tól 172-ig a pozitív egész számok összege?

3.7. Mennyi a háromjegyű páratlan számok összege?

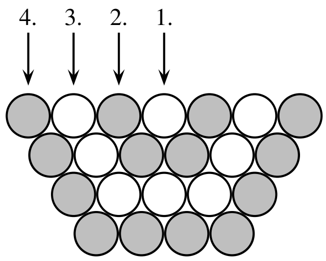
3.8. Mennyi az 1000 és 2000 közé eső héttel osztható számok összege?

3.9. A horgászegyesületben 8 tag van. Egyesületi találkozókor mindenki kezet fog mindenkivel.

a) Mennyivel nő a kézfogások száma, ha 5-tel nő a tagság létszáma?

b) Hányan lesznek akkor az egyesületben, amikor a kézfogások száma 136 lesz?

3.10. Kati egyforma méretű fehér és piros korongokat illesztett egymás mellé az ábrán látható módon. Először letett egy fehér korongot (1.), majd félkör alakban 4 piros korongot tett köré (2.), és így tovább. A 10. ív letevése után hány piros és hány fehér korongot tartalmaz az alakzat?



4. feladatlap

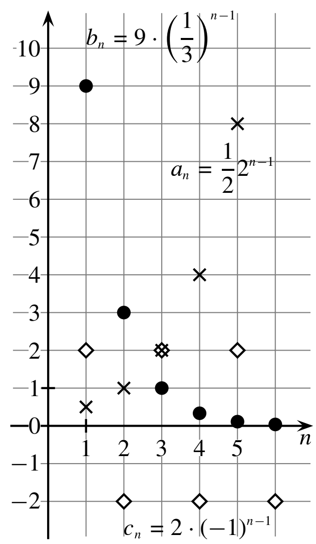
Mértani sorozat 1.

EMLÉKEZTETŐ

mértani sorozat: A mértani sorozat bármelyik tagjának (a másodiktól kezdve) és az azt megelőző tagjának a hányadosa állandó. Az állandót ***hányadosnak (kvóciensnek)*** (q) nevezzük. $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$. Például az 1, 2, 4, 8, 16, ... sorozat mértani sorozat, mivel $q = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \ldots = 2 =$ állandó.

a mértani sorozat *n*. tagja: A mértani sorozat n. tagjának képlet alakja: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, ahol a_1 a sorozat első eleme, q a sorozat hányadosa. Például a sorozat első tagja $a_1 = 7$, hányadosa $q = 4$. A sorozat általános tagja $a_n = 7 \cdot 4^{n-1}$. A 10. tag $a_{10} = 7 \cdot 4^9 = 1\,835\,008$.

***n*. tag mint mértani közép:** 1) Ha a hányados nem negatív, akkor a mértani sorozat bármelyik tagja (a másodiktól kezdve) két szomszédjának mértani közepe: $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$, ahol $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}^+$. 2) A mértani sorozat bármelyik tagja két azonos távolságra ($m \in \mathbb{N}^+$) lévő szomszédjának (amennyiben léteznek) mértani közepe: $a_n = \sqrt{a_{n-m} \cdot a_{n+m}}$, ahol $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}^+$.



FELADATOK

4.1. Írd fel a mértani sorozatok általános tagját, és számítsd ki a megadott tagokat!

a) A sorozat első tagja −5, és a hányados 2.

b) A sorozat első tagja 16, és a hányados $-\frac{1}{2}$.

$a_n =$ .... $b_n =$ ....

$a_6 =$ .... $b_3 =$ ....

$a_{10} =$ .... $b_6 =$ ....

c) A sorozat első tagja 4, és a hányados −10. *d)* A sorozat első tagja −1, és a hányados 0,1.

$c_n =$.. $d_n =$..

$c_8 =$.. $d_6 =$..

$c_{49} =$.. $d_{21} =$..

4.2. Döntsd el, hogy az alábbi sorozatképletek közül melyek mértani sorozatok képletei! Amennyiben lehetséges, határozd meg a mértani sorozat kezdeti tagját és hányadosát is!

a) $a_n = 2n^3 - 5n$;

b) $b_n = -n$;

c) $c_n = n^n$;

d) $d_n = 3^n$;

e) $e_n = 2 \cdot 5^n$;

f) $f_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$;

g) $g_n = 5$;

h) $h_n = \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}$;

i) $i_n = (-1)^n$.

4.3. A mértani sorozat két tagjából határozd meg a sorozat első tagját és hányadosát! Írd fel az általános tagját, majd határozd meg a kérdezett elemét!

a) $a_5 = 48$; $a_7 = 192$.

$a_n = $ ....

$a_6 = $ ....

b) $b_3 = -\frac{5}{27}$; $b_5 = -\frac{5}{243}$.

$b_n = $ ....

$b_7 = $ ....

c) $c_5 = \sqrt{3}$; $c_6 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$c_n = $ ....

$c_8 = $ ....

d) $d_2 = 6$; $d_6 = 486$.

$d_n = $ ....

$d_5 = $ ....

4.4. Egy mértani sorozatról tudjuk, hogy a harmadik és az ötödik tagjának összege 90. A negyedik és a hatodik tag összege 270. Mekkora a sorozat 2. tagja?

4.5. Egy mértani sorozat első három tagjának összege $\frac{21}{4}$. A első és a negyedik tag különbsége $\frac{21}{8}$. Mekkora az ötödik tag?

4.6. Egy mértani sorozat ötödik tagja 20,25. A sorozat hányadosa 1,5.

a) Mekkora a sorozat hatodik tagja?

b) Mekkora a sorozat első tagja?

4.7. A $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ mértani sorozatnak hány tagja esik 50 és 500 közé?

4.8. Kezdetben 5 amőba volt a táptalajon. Ez az amőbafajta két óránként osztódik.

a) Hány óra múlva lesz 2560 amőba a mintában?

b) Hány óra múlva lesz 100 000 darab amőba a mintában?

4.9. A mértani sorozat két ismert tagjának segítségével határozd meg az ismeretlen tagját!

a) $a_5 = -18$; $a_7 = -2$; $a_6 =$

b) $b_1 = 1$; $b_3 = 49$; $b_2 =$

c) $c_{10} = 7$; $c_{20} = 28$; $c_{15} =$

d) $d_3 = -7$; $d_7 = 28$; $d_5 =$

5. feladatlap

Mértani sorozat 2.

EMLÉKEZTETŐ

a mértani sorozat első *n* tagjának összegképlete: $S_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, ahol a_1 a sorozat első tagja, $q \neq 1$ a sorozat hányadosa.

Például az $a_n = 10 \cdot 3^{n-1}$ mértani sorozat első 10 tagjának összege $S_{10} = 10 \cdot \dfrac{3^{10} - 1}{3 - 1} = 295\,240$.

FELADATOK

5.1. Egy mértani sorozat első tagja 100, a hányadosa 5.

a) Mekkora az első 5 tag összege?

b) Mekkora az első 5 tag összege, ha a hányados -5?

5.2. Egy mértani sorozat első öt tagjának összege $\frac{355}{64}$, a sorozat hányadosa $\frac{3}{4}$. Mekkora a sorozat első tagja?

5.3. Egy mértani sorozat negyedik tagja $\frac{250}{3}$. A sorozat hányadosa $\frac{5}{2}$.

a) Mekkora a sorozat első tagja?

b) Az első tagtól kezdve hány tagot adjunk össze, hogy 864,5-et kapjunk?

5.4. Nagy felületű, 0,1 mm vastagságú papírlapot többször egymás után félbehajtunk.

a) Mekkora lesz a vastagsága a többszörösen félbehajtott papírlapnak az 5. hajtogatás után?

b) Hány hajtogatás után lesz a papír vastagsága nagyobb, mint 10 cm?

5.5. Egy mértani sorozat első két tagjának összege 16, a negyedik és ötödik tagjának összege 432. Mennyi a sorozat első öt tagjának összege?

5.6. A Világváros egyik divatházában megfigyelték, hogy a sikeres ruhamodellből minden hónapban az előző hónap elkelt mennyiségének másfélszeresét adták el. Megközelítőleg hány ruhát adtak el fél év alatt, ha az első hónapban 32 darabot adtak el?

5.7. A Világváros egyik üzlete végkiárusítást tart. Minden héten a még meglevő árukészletének harmada fogy el.

a) Mekkora volt az árukészlet, ha 8 hét után még 256 darab áru maradt?

b) Összesen mennyi árut adtak el a nyolc hét során?

5.8. Tamás képregény-gyűjteményét rendezgeti. Amikor az első oszlopba 93 darabot rakott és minden további oszlopba háromszor annyit, mint az előzőbe, akkor 5 újságoszlopot kapott. Aztán az első oszlopba 11-et tett és minden további oszlopba az előző oszlop kétszeresét. Ekkor hány újságoszlop született?

6. feladatlap

Vegyes feladatok

FELADATOK

6.1. A 16 és a 625 közé iktass be 3 számot úgy, hogy

a) számtani,

b) mértani sorozat alkossanak!

6.2. Egy növekvő számtani sorozat második tagja 9. Az első, a hatodik és a harmincegyedik tag mértani sorozatot alkot. Mekkora a számtani sorozat 10. tagja?

6.3. Egy mértani sorozat hányadosa 2. Ha az első tagot 1-gyel, a harmadikat 3-mal, a negyediket 8-cal csökkentjük, egy számtani sorozat 3 egymást követő tagját kapjuk. Mekkora a mértani sorozat első tagja?

6.4. Egy számtani sorozat első három tagjának összege 39. Ha az első tagot 5-tel, a harmadik tagot 6-tal csökkentjük, a negyedik tagot 25-tel növeljük, akkor az így kapott 3 szám mértani sorozatot alkot. Mekkora az eredeti sorozat differenciája?

6.5. Egy háromjegyű szám számjegyei mértani sorozatot alkotnak. Ha a számot 4-gyel csökkentjük, a számjegyek számtani sorozatot alkotnak. Az eredeti szám számjegyeinek összege 13. Melyik ez a szám?

6.6. A szórakozott professzor elfelejtette telefonja négyjegyű PIN kódját. Arra emlékszik, hogy az első 3 szám számtani, de az utolsó három mértani sorozatot alkot. A középső két szám összege egyenlő az első számmal és az utolsó két szám összege feleakkora, mint az első számjegy. Mi lehetett a professzor PIN kódja?

7. feladatlap

Kamatos kamat számítása

EMLÉKEZTETŐ

kamatos kamat számítása: Az alapfeladat: A bankba tett t (Ft vagy más pénznem) évi tőkésítéssel, p%-kos **kamatlábbal**, n év elteltével ***a tőke kamatos kamattal növelt értéke*** $T = t\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ (Ft vagy más pénznem) lesz.

kamattényező: A $1 + \frac{p}{100}$ kifejezést, ahol p a kamatláb, kamattényezőnek nevezzük.

Például 120 000 Ft 10%-os kamatlábbal 5 év múlva $T = t\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = 120\,000 \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right)^5 = 193\,261{,}2$ Ft. A betét tehát $193\,261{,}2 - 120\,000 = 73\,261{,}2$ Ft-tal növekedett.

FELADATOK

7.1. Bankba tett 360 000 Ft-unk egy év alatt 388 880 Ft-ra növekedett.

a) Mennyi az éves kamat?

b) Hány forintunk lesz 5 év múlva, ha nem nyúlunk a betéthez?

c) Hány év alatt duplázódna meg a pénzünk?

7.2. Egy város lakossága évente átlagosan 3%-kal növekszik. A jelenleg 900 000 lakosú városban hányan éltek 15 évvel ezelőtt?

7.3. Egy szarvasmarha tenyésztő telepen az éves szaporulat 6%. Három évente eladják az állomány 4%-át. Mekkora lesz az állatállomány 11 év múlva, ha jelenleg 3200 egyedből áll?

7.4. 500 000 Ft kölcsönt szeretnénk felvenni. Mennyi lesz a havi törlesztőrészlet, ha a kölcsönt 6 évre veszünk fel évi 12,5%-os kamat mellett?

7.5. Mekkora lesz a havi kamat, ha az éves kamat 9%?

7.6. Januárban a fiatal munkavállaló kezdő fizetése 130 000 Ft. A következő lehetőségek közül választhat.

A: A fizetése fél évig nem változik, majd a következő félévben havonta 7000 Ft-tal emelkedik.

B: A fizetése az első évben havonta 2%-kal emelkedik.

a) Melyik esetben lesz nagyobb az éves jövedelem?

b) Mennyi lesz az október havi fizetése A, illetve B esetben?

Térgeometria

8. feladatlap

Területszámítás 1.

EMLÉKEZTETŐ

síkidom kerülete: A síkidom kerülete egyenlő a határolóvonalai hosszának összegével. A kerület jele: K, k. A kerület mértékegysége: $[K] = \text{m}$.

sokszög területe: A sokszög területe a sokszöghöz hozzárendelt pozitív szám, amelyre teljesül a következő két feltétel:

a) Az egybevágó sokszögek területe egyenlő;

b) Ha egy sokszög véges sok összetevő-sokszög egyesítéséből áll, akkor területe egyenlő az összetevő-sokszögek területének összegével.

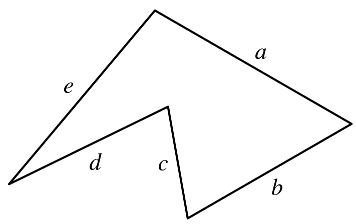
A terület jele: T, t. A terület mértékegysége: $[T] = \text{m}^2$.

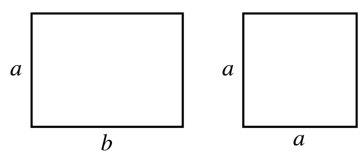
területegység: Az egységnyi oldalú négyzet területe.

téglalap kerülete, területe: A téglalap két szomszédos oldala a és b. A téglalap kerülete: $K = 2(a + b)$, területe: $T = a \cdot b$.

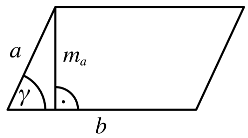
négyzet kerülete, területe: A négyzet oldala a. A négyzet kerülete: $K = 4a$, területe: $T = a^2$.

$K = a + b + c + d$



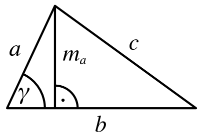


paralelogramma kerülete, területe: A paralelogramma két szomszédos oldala a és b. A paralelogramma kerülete: $K = 2(a + b)$, területe: $T = a \cdot m_a = a \cdot b \cdot \sin\gamma$, ahol m_a a paralelogramma magassága.



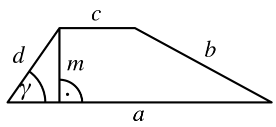
háromszög kerülete, területe: A háromszög három oldala a, b és c.

A háromszög kerülete: $K = a + b + c$, területe: $T = \dfrac{am_a}{2}$, $T = \dfrac{ab\sin\gamma}{2}$, $T = rs$, $T = \dfrac{abc}{4R}$, ahol s a kerület fele, r a háromszögbe írható kör sugara, R a háromszög köré írható kör sugara.

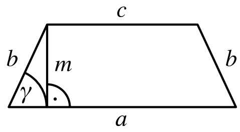


szabályos háromszög kerülete, területe: A háromszög oldala a. A háromszög kerülete: $K = 3a$, területe: $T = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

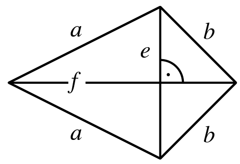
trapéz kerülete, területe: A trapéz két párhuzamos oldala (alapja) a és c, két szára pedig b és d. A trapéz kerülete: $K = a + b + c + d$, területe: $T = \dfrac{a + c}{2}m$.



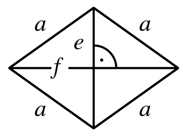
szimmetrikus trapéz kerülete, területe: A trapéz két párhuzamos oldala (alapja) a és c, szárai pedig b. A trapéz kerülete: $K = a + 2b + c$, területe: $T = \dfrac{a + c}{2}m$.



konvex deltoid kerülete, területe: Az ábra jelöléseivel a deltoid kerülete: $K = 2(a+b)$, területe: $T = \dfrac{e \cdot f}{2}$.

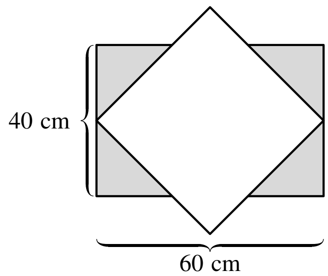


rombusz kerülete, területe: Az ábra jelöléseivel a rombusz kerülete: $K = 4a$, területe: $T = \dfrac{e \cdot f}{2}$.

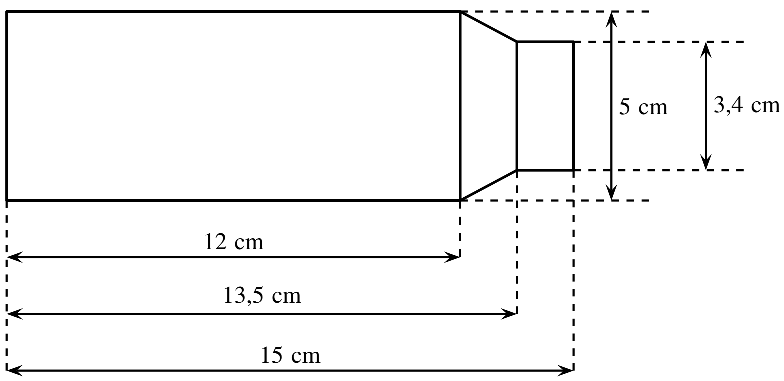


FELADATOK

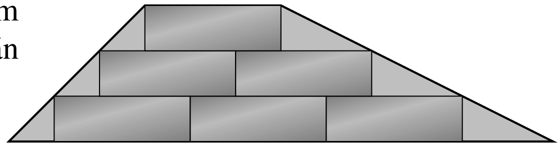
8.1. A téglalap alakú asztal oldalai 40 cm és 60 cm hosszúságúak. A háziasszony egy négyzet alakú terítőt tett rá az ábrán látható módon. (A terítő átlósan pont átéri az asztalt.) A terítő az asztal hány százalékát fedi be?



8.2. Az úthenger áthajtott a fogkrém tubusán, és a következő alakzatot kaptuk. Legalább mekkora területű fémlapból készült a tubus?



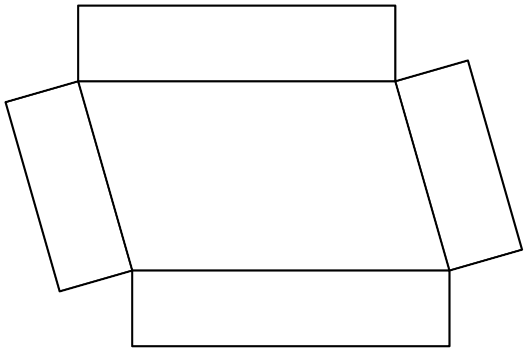
8.3. Trapéz alakú kerti medencében hat darab 60 cm széles és 180 cm hosszú gumimatrac fér el az ábrán látható módon.



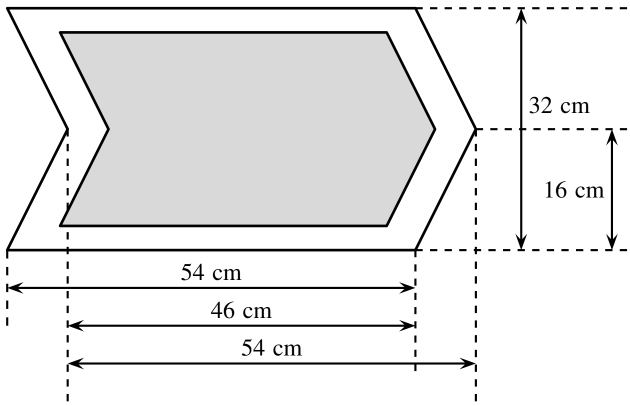
a) Mekkora a medence alapterülete?

b) Mekkora a medence alapjának kerülete, ha a gumimatracok pont harmadoló pontban érintik egymást?

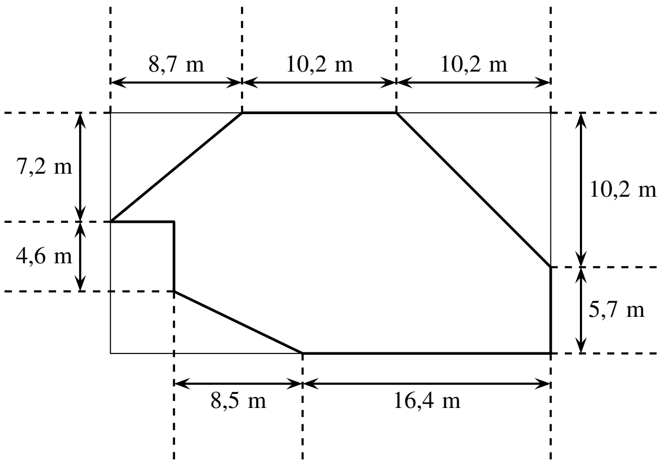
8.4. Egy paralelogramma 8,4 cm és 5,2 cm hosszú oldalaira kifelé azonos magasságú téglalapokat rajzolunk. A paralelogramma oldalai közötti hajlásszög 74°. Mekkora az alakzat területe és kerülete, ha a téglalapok összterülete 120%-a a paralelogramma területének?



8.5. Az ábrán látható zöld színű útjelző tábla szélére 5 cm széles fehér csíkot festenek. Hány százaléka a fehér terület a zöld területnek?



8.6. Mekkora az ábrán látható telek *a)* területe és *b)* kerülete?



9. feladatlap

Területszámítás 2.

EMLÉKEZTETŐ

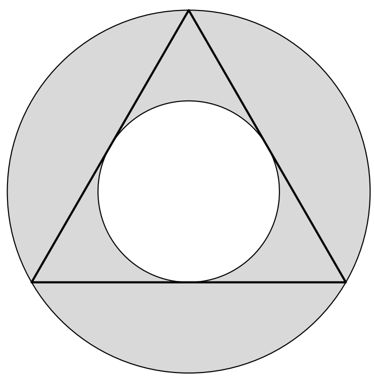
kör kerülete, területe: Az r sugarú kör kerülete: $K = 2\pi r$, területe: $T = \pi r^2$.

körcikk kerülete, területe: Az α szögű, r sugarú körcikk kerülete: $K = \left(2 + \frac{\pi}{180^\circ}\alpha^\circ\right) r$, területe: $T = \frac{\pi}{360^\circ}\alpha^\circ r^2$.

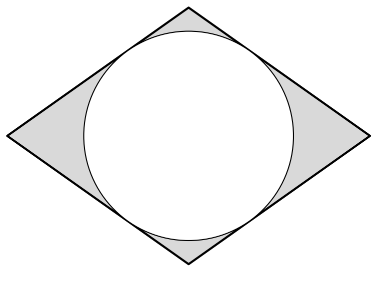
FELADATOK

9.1. *a)* Mekkora a 10 cm oldalú szabályos háromszög köré és a háromszögbe írt kör által közbezárt körgyűrű területe?

b) Oldd meg a feladatot általános a hosszúságú oldal esetén is!

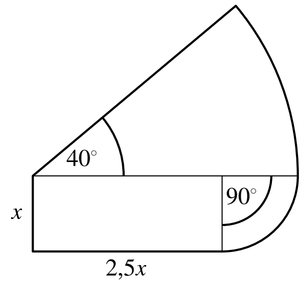


9.2. Mekkora a 9,6 cm és 6,8 cm átlójú rombuszba írható kör és a rombusz által közbezárt alakzat területe?

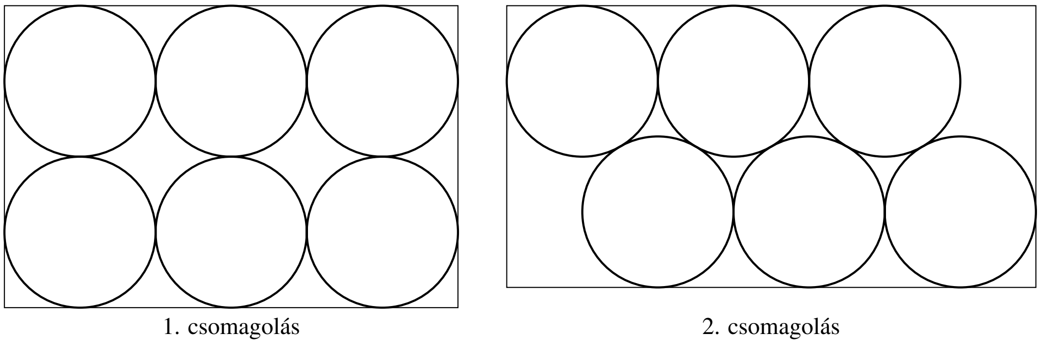


9.3. Az a befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszögből kivágjuk a beírható körét. Mekkora területű rész marad?

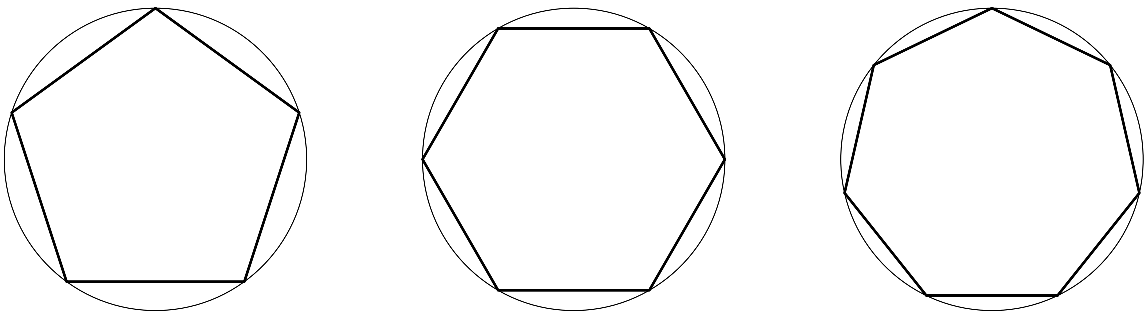
9.4. Mekkora a szakaszok és körívek által határolt épület
a) alapterülete és *b)* az alapjának kerülete x-szel kifejezve?



9.5. Hat darab egyforma $r = 6$ cm sugarú konzervet kétféleképpen csomagolunk be. Hány százalékkal igényel nagyobb területet a második megoldás az első megoldáshoz képest?



9.6. *a)* Mekkora a kerülete és területe az $r = 10$ cm sugarú körbe írt szabályos ötszögnek, hatszögnek és hétszögnek?



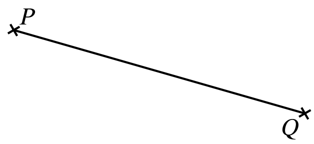
b) Milyen tendenciát figyelhetünk meg a szabályos sokszög csúcsainak száma és a sokszög kerülete, illetve területe között?

10. feladatlap

Test részeinek kiszámítása 1.

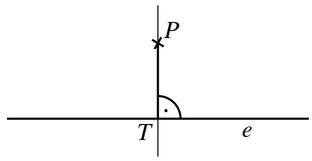
EMLÉKEZTETŐ

síkmetszet: A test és a testet elmetsző sík által meghatározott sík alakzat.

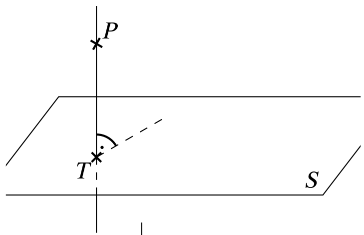


pont és pont távolsága: A pontokat összekötő szakasz hossza. Ha a két pont egybeesik, akkor a távolságuk 0.

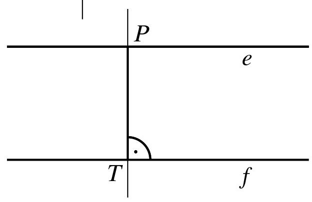
pont és egyenes távolsága: A pont, és a pontból az egyenesre bocsátott merőleges talppontjának a távolsága.



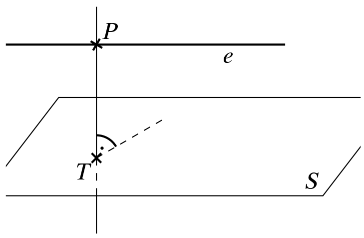
pont és sík távolsága: A pont, és a pontból a síkra bocsátott merőleges talppontjának a távolsága.



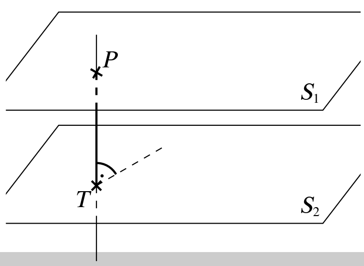
egyenes és egyenes távolsága: *a)* Két metsző egyenes távolsága 0. *b)* Két párhuzamos egyenes távolságát megkapjuk, ha az egyik egyenes tetszőleges pontjának és a másik egyenesnek a távolságát határozzuk meg.



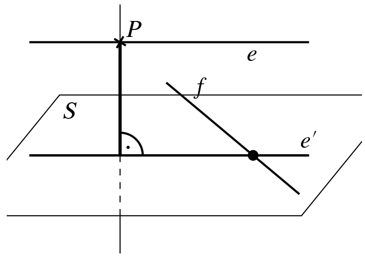
egyenes és sík távolsága: *a)* A sík és a síkot döfő egyenes távolsága 0. *b)* A párhuzamos egyenes és sík távolsága egyenlő az egyenes egy tetszőleges pontjának és a sík távolságával.



sík és sík távolsága: *a)* Két egymást metsző sík távolsága 0. *b)* Két párhuzamos sík távolsága egyenlő az egyik sík egy tetszőleges pontjának és a másik sík távolságával.



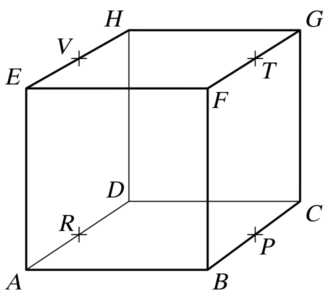
két kitérő egyenes távolsága: Az egyik egyenessel párhuzamost húzunk a másik egyenes egy tetszőleges pontján át. A kitérő egyenesek (*e* és *f*) távolsága egyenlő az egyenes és a két metsző egyenes által kifeszített sík távolságával.



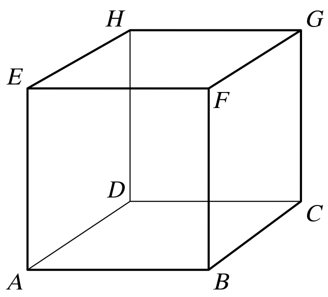
FELADATOK

10.1. Határozd meg a kockák következő síkmetszetének alakját! Az O, P, Q, R, S, T, U és V pontok oldalfelező pontok. (A metsző síkot csak három pontjával adjuk meg, de ez nem feltétlenül jelenti azt, hogy a síkmetszet háromszög alakú lesz!)

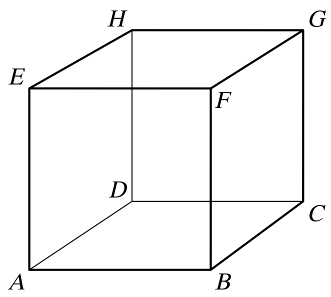
a) A metsző sík: RPT.



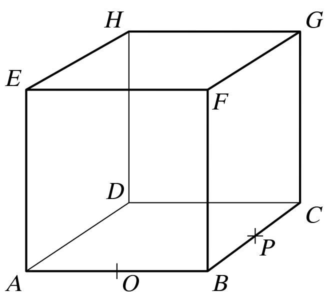
b) A metsző sík: EFC.



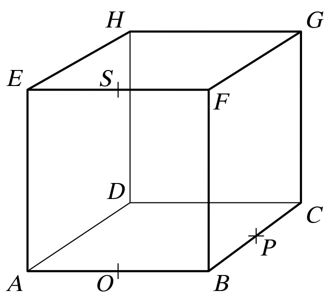
c) A metsző sík: HFA.



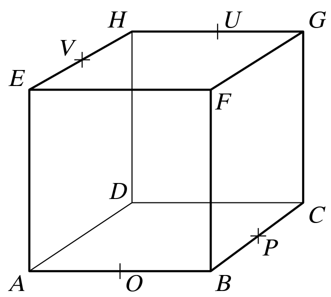
d) A metsző sík: OPG.



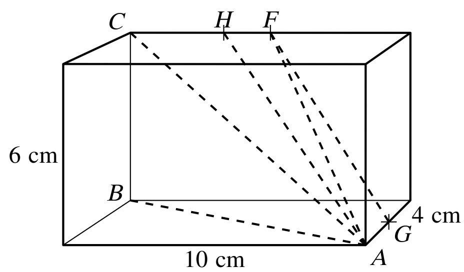
e) A metsző sík: OPS.



f) A metsző sík: OPU.



10.2. A téglatest oldalai 10 cm, 6 cm és 4 cm. G és F pontok élfelező pontok, H pedig az él harmadolópontja. Mekkorák a következő szakaszok hosszai:



$AB =$

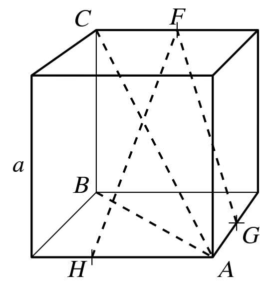
$AC =$

$AF =$

$AH =$

$FG =$

10.3. Határozd meg az a oldalú kocka következő szakaszainak hosszát! G és F pontok élfelező pontok, H pedig az él harmadolópontja.



$AB =$

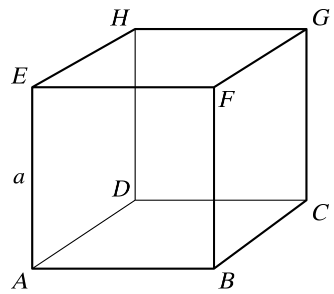
$AC =$

$AF =$

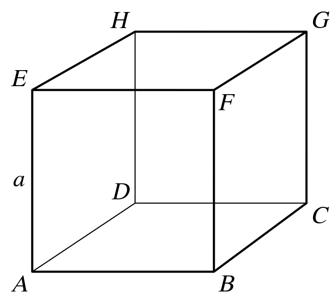
$FH =$

$FG =$

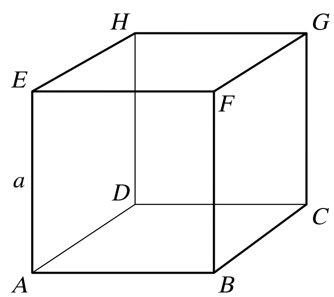
10.4. Adott az 5 cm oldalú kocka. Milyen távol van a BE egyenes a kocka A; C; D; F; G; H pontjaitól?



10.5. Adott az a oldalú kocka. Milyen távol van a CE egyenes a kocka A; B; D; F; G; H pontjaitól?



10.6. Határozd meg az $a = 10$ cm élű kocka pontjai által meghatározott alábbi egyenesek távolságát!



a) A BF és GH egyenes távolsága?

b) A BF és DH egyenes távolsága?

c) A BF és AH egyenes távolsága?

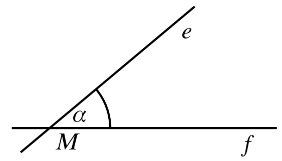
d) A BF és AG egyenes távolsága?

11. feladatlap

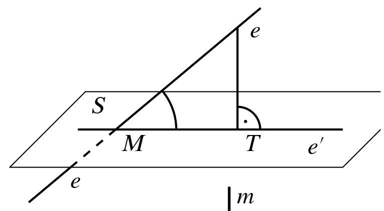
Test részeinek kiszámítása 2.

EMLÉKEZTETŐ

két egyenes hajlásszöge: *a)* Két metsző egyenes hajlásszöge egyenlő a metszéspontjukból kiinduló két félegyenes derékszögnél nem nagyobb hajlásszögével. *b)* Két kitérő egyenes hajlásszöge egyenlő az egyik egyenessel párhuzamos, a másik egyenest metsző egyenes és a másik egyenes hajlásszögével.

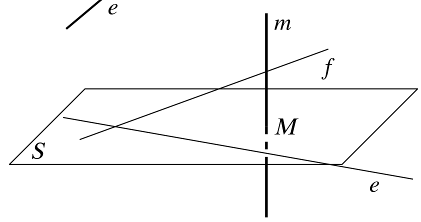


egyenes és sík hajlásszöge: *a)* Egymással párhuzamos sík és egyenes hajlásszöge 0°. *b)* A síkot döfő egyenes és a sík hajlásszöge egyenlő az egyenes és a síkon levő merőleges vetületének a hajlásszögével.

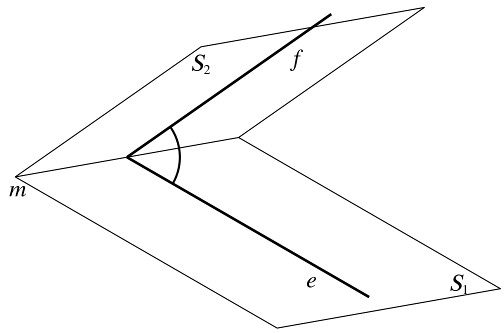


síkra merőleges egyenes: Egy síkra akkor és csak akkor merőleges egy egyenes, ha a sík összes egyenesére merőleges. Tehát, ha az egyenes a sík két nem párhuzamos egyenesére merőleges, akkor a síkra is merőleges.

$$\left.\begin{array}{l} m \perp e \\ m \perp f \end{array}\right\} \Rightarrow m \perp S$$

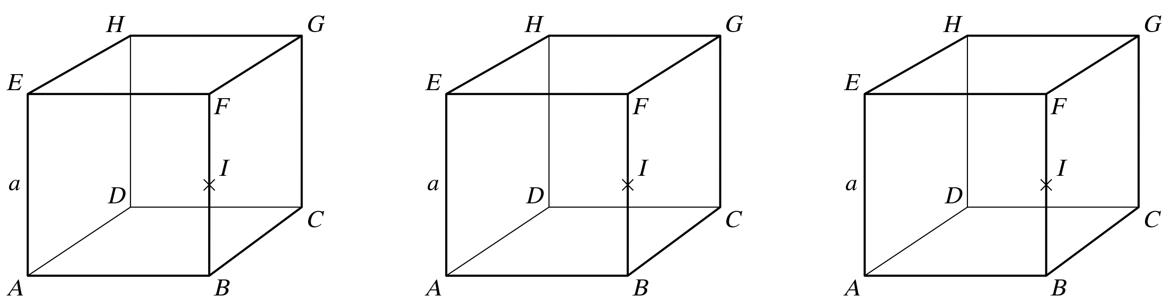


két sík hajlásszöge: *a)* Két párhuzamos sík hajlásszöge 0°. *b)* A síkok metszésvonalának egy tetszőleges pontjába húzott, a metszésvonalra merőleges egy-egy egyenesének a hajlásszöge.



FELADATOK

11.1. Határozd meg az $a = 12$ cm élű kocka pontjai által meghatározott alábbi egyenesek hajlásszögét! Az I pont élfelező pont.



a) A BF és EG egyenes hajlásszöge?

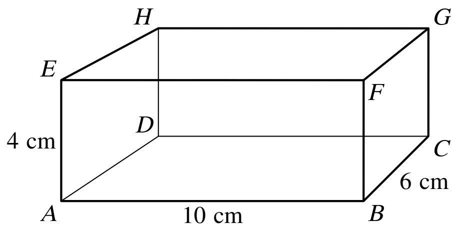
b) A BF és EC egyenes hajlásszöge?

c) A BF és BH egyenes hajlásszöge?

d) A BF és HI egyenes hajlásszöge?

e) Az AG és HB egyenes hajlásszöge?

11.2. Határozd meg a téglatest pontjai által meghatározott alábbi egyenesek hajlásszögét!



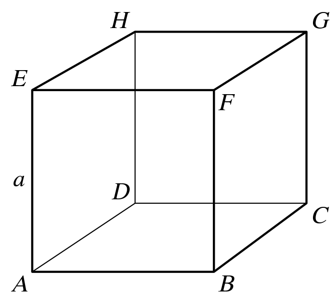
a) A HF és a DF egyenes hajlásszöge?

b) A HF és a HA egyenes hajlásszöge?

c) Az AF és az FG egyenes hajlásszöge?

d) Az AF és az FH egyenes hajlásszöge?

11.3. Határozd meg az $a = 8$ cm élű kocka pontjai által meghatározott alábbi egyenesek és síkok hajlásszögét!



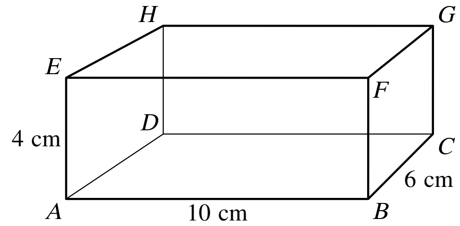
a) Az FH egyenes és a BCG sík hajlásszöge?

b) A DF egyenes és a BCG sík hajlásszöge?

c) Az AG egyenes és az ABC sík hajlásszöge?

d) Az AB egyenes és az AGE sík hajlásszöge?

11.4. Határozd meg a téglatest pontjai által meghatározott alábbi egyenesek és síkok hajlásszögét!



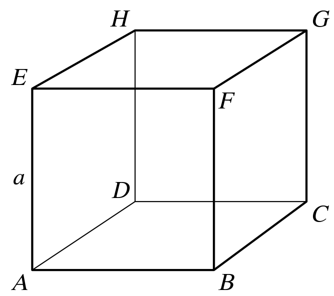
a) Az FH egyenes és a BCG sík hajlásszöge?

b) A DF egyenes és a BCG sík hajlásszöge?

c) Az AG egyenes és az ABC sík hajlásszöge?

d) Az AB egyenes és az AGE sík hajlásszöge?

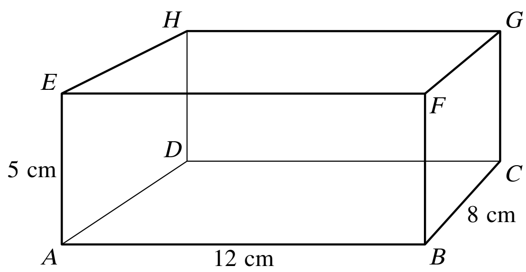
11.5. Határozd meg az a = 20 cm élű kocka pontjai által meghatározott alábbi síkok hajlásszögét!



a) Az $EFGH$ sík és a $BDHF$ sík hajlásszöge?

b) Az $EFGH$ sík és az ACF sík hajlásszöge?

11.6. Határozd meg a téglatest pontjai által meghatározott alábbi síkok hajlásszögét!



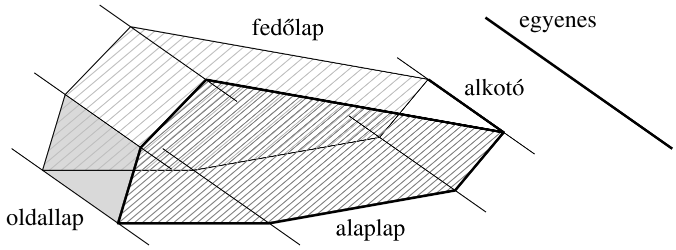
a) Az $ABGH$ és az $ABCD$ sík hajlásszöge?

b) A $BFHD$ és az $ABCD$ sík hajlásszöge?

c) A $HFBD$ és az $ACGE$ sík hajlásszöge?

Hasáb felszíne és térfogata 1.

EMLÉKEZTETŐ



poliéder: Kizárólag sokszöglapokkal határolt test.

hasáb: Húzzunk párhuzamost egy sokszög minden határolópontjából, a sokszög síkjával nem párhuzamos egyenessel. Ezeket a párhuzamos egyeneseket messük el a sokszög síkjával párhuzamos síkkal. Az így kapott térbeli alakzat a hasáb.

alaplap: A hasáb alaplapja a kiindulási sokszög.

fedőlap: A hasáb alaplapjával párhuzamos síkkal való metszéssel kapott sokszög.

alkotó: Az egyenessel párhuzamos egyenesek az alaplap és fedőlap közé eső szakasza.

oldallap: Az alkotók által meghatározott paralelogramma alakú síklapok.

palást: Az oldallapok összessége.

egyenes hasáb: Olyan hasáb, ahol a sokszög síkja és az alkotó merőleges egymásra.

hasáb magassága: Az alaplap és a fedőlap távolsága. Az egyenes hasábnál a hasáb magassága egyenlő az alkotó hosszával.

hálózat: A hasáb egy síkba kiterített oldal-, alap-, és fedőlapjai.

téglatest: Téglalap alapú egyenes hasáb.

kocka: Olyan téglatest, amelynek minden éle egyenlő.

négyzetes hasáb: Négyzet alapú egyenes hasáb.

hasáb térfogata: A hasáb alaplapterületének és a magasságának szorzata: $V = T_a \cdot m$.

hasáb felszíne: Az alaplap, a fedőlap és a palást területének az összege: $A = 2T_a + P$.

egyenes hasáb térfogata: A hasáb alaplapterületének és a magasságának szorzata: $V = T_a \cdot m$.

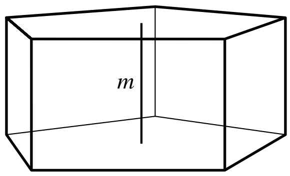
egyenes hasáb felszíne: Az alaplap, a fedőlap és a palást az alaplap kerületének és a magasság szorzata: $A = 2T_a + m \cdot k$.

téglatest térfogata: $V = abc$, ahol a, b, és c a téglatest éle.

téglatest felszíne: $A = 2(ab + ac + bc)$, ahol a, b, és c a téglatest éle.

kocka térfogata: $V = a^3$, ahol a a kocka éle.

kocka felszíne: $A = 6a^2$, ahol a a kocka éle.



Szabályos ötoldalú hasáb

FELADATOK

12.1. A téglatest alakú szoba hossza 5,5 méter, szélessége 4,2 méter és magassága 3,8 méter.

a) Hány köbméter a szoba térfogata?

b) Mekkora a szoba felszíne?

c) Legalább mekkora felületű tapéta szükséges a falakra, ha a nyílászárók összterülete 8 m^2?

12.2. A kocka testátlója $\sqrt{12}$ cm. Mekkora a kocka felszíne és térfogata?

12.3. A négyzetes oszlop alaplapjának átlója 12 cm, a testátlója 13 cm. Mekkora a négyzetes oszlop térfogata és felszíne?

12.4. Mekkora egy egyenlő szárú háromszög alapú egyenes hasáb felszíne és térfogata, ha az alaplap alapja 6 cm és szára 8 cm, és a test magassága 5 cm?

12.5. A téglatest alapjának élei 5 cm és 15 cm. Mekkora a téglatest felszíne, ha a térfogata 600 cm^3?

12.6. A kocka felszíne 20%-kal növekedett. Hány százalékos a térfogatváltozás?

12.7. A téglatest éleinek aránya $2:3:4$. Hány százalékkal változik a téglatest felszíne és térfogata, ha a legkisebb él 50%-kal, a középső él 100%-kal nő, míg a harmadik él változatlan marad?

Hasáb felszíne és térfogata 2.

FELADATOK

13.1. A 20 méter hosszú, 5 méter széles és 1,6 méter mély medence kiásásakor hány köbméter földet mozgattak meg a munkások? Hány négyzetméter felületet kell kicsempézni?

13.2. Egy szabályos háromszög alapú hasáb alakú tolltartó alapéle 8 cm, hossza 20 cm. Mekkora a tolltartó térfogata és felszíne?

13.3. Egy édességet tároló egyenes doboz alaplapja 10 cm és 25 cm oldalú paralelogramma. Az oldalak hajlásszöge 85°. A doboz magassága 8 cm. A doboz áttervezésekor a hajlásszöget 75°-osra változtatták. Mekkora lett a magasság, ha a doboz térfogata azonos maradt?

13.4. Mekkora a szabályos hatoldalú hasáb felszíne és térfogata, ha alapjának oldaléle 10 cm, a magassága pedig 20 cm?

13.5. Mekkora a szabályos nyolcoldalú hasáb felszíne és térfogata, ha alapja köré írható kör sugara 2,5 cm, a magassága pedig 8,2 cm?

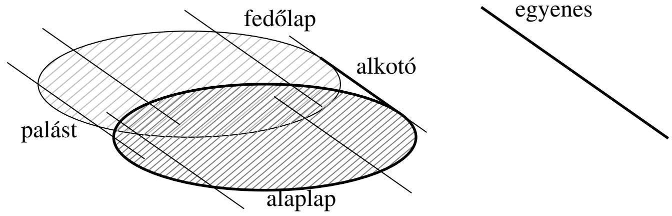
13.6. Mekkora a szabályos ötoldalú hasáb felszíne és térfogata, ha alapjába írható kör sugara 5 cm, a magassága pedig 25 cm?

14. feladatlap

Henger felszíne és térfogata

EMLÉKEZTETŐ

henger: Húzzunk párhuzamost egy zárt síkgörbe minden határolópontjából, a görbe síkjával nem párhuzamos egyenessel. Ezeket a párhuzamos egyeneseket messük el a görbe síkjával párhuzamos síkkal. Az így kapott térbeli alakzat a henger.



alaplap: A henger alaplapja a kiindulási zárt síkgörbe.

fedőlap: A henger alaplapjával párhuzamos síkkal való metszéssel kapott síkgörbe.

a henger alkotója: Az egyenessel párhuzamos egyenesek az alaplap és fedőlap közé eső szakasza.

a henger palástja: Az alkotók által meghatározott felület.

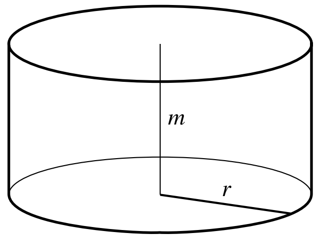
egyenes henger: Olyan henger, ahol az alaplap síkja és az alkotó merőleges egymásra.

a henger magassága: Az alaplap és a fedőlap távolsága. Az egyenes hengernél a magasság egyenlő az alkotó hosszával.

körhenger: Kör alapú egyenes henger.

egyenes henger térfogata: A henger alaplapjának területének és magasságának szorzata: $V = \pi r^2 m$.

egyenes henger felszíne: Az alaplap, a fedőlap és a palást területének az összege: $A = 2\pi r(r + m)$.



FELADATOK

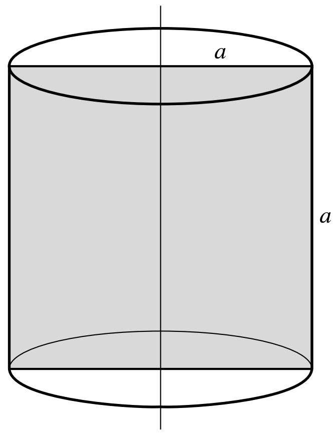
14.1. Kartonlapból ajándék számára körhenger alakú dobozt szeretnénk készíteni. Az alapkör sugara 10 cm, a henger magassága 5 cm. Mekkora a körhenger térfogata és felszíne?

14.2. Körhenger alakú konzervdoboz térfogata 2,3 dl, alapkörének átmérője 6 cm. Mekkora a konzervdoboz felszíne?

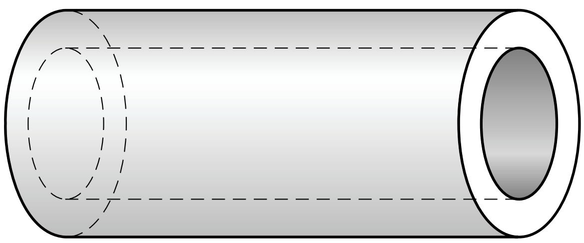
14.3. Körhenger alakú kenőcstégely felszíne 314,2 cm^2, magassága 5 cm. Mekkora az alapkörének átmérője?

14.4. Mekkora annak a körhengernek a magassága, amelynek alapköre 5 cm sugarú, és a felszínének mérőszáma egyenlő a térfogatának mérőszámával?

14.5. Egy 8 cm oldalhosszúságú négyzetet megforgatunk a szemközti oldalfelező pontjain áthaladó tengely körül. Mekkora az így kapott henger felszíne és térfogata?



14.6. Hány köbméter betonból készült az a betoncső, amelynek hossza 6 méter, a külső átmérője 1 méter, belső átmérője 86 cm?



14.7. Mekkora a $\dfrac{\pi}{10}$ középponti szögű, 4 cm sugarú körcikk alapú, 1,5 cm magasságú sajt térfogata és felszíne?

15. feladatlap

Gúla felszíne és térfogata

EMLÉKEZTETŐ

gúla: Kössük össze egy sokszög minden határolópontját, egy nem a sokszög síkjában lévő ponttal (***csúccsal***). Az így kapott térbeli alakzat a gúla.

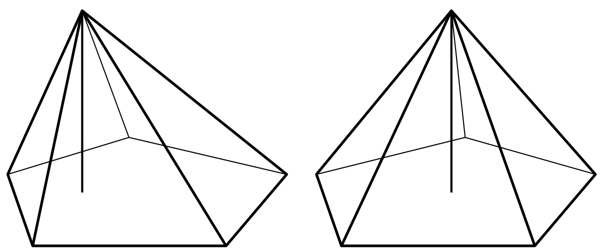
alaplap: A gúla alaplapja a kiindulási sokszög.

alkotó: A gúla csúcsát és az alaplap sokszögét összekötő szakasz.

oldallap: A sokszög oldala és a csúcs által meghatározott háromszög alakú síklap.

palást: Az oldallapok összessége.

gúla magassága: A csúcsból az alaplapra bocsátott merőleges szakasz hossza.



Gúla — Szabályos ötoldalú gúla

tetraéder: Háromoldalú gúla.

szabályos *n*-oldalú gúla: A gúla alapja szabályos n-oldalú sokszög és a gúla magasságának a talppontja a sokszög középpontja.

gúla térfogata: A gúla alaplapterületének és a magasság harmadának szorzata: $V = \dfrac{T_a \cdot m}{3}$.

gúla felszíne: Az alaplap és a palást területének az összege: $A = T_a + P$.

szabályos tetraéder felszíne: $A = \sqrt{3}a^2$.

szabályos tetraéder térfogata: $V = \dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$.

FELADATOK

15.1. A gizai piramis közel szabályos, négyzet alapú gúla, amelynek alapéle 229 méter, magassága 145 méter.

a) Mekkora a piramis térfogata, és palástjának területe?

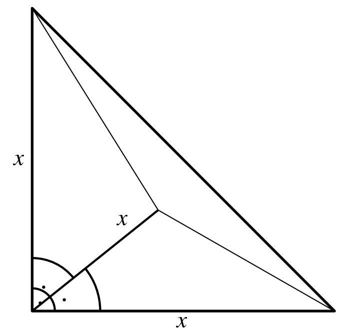
b) Mekkora szöget zárnak be az oldallapok az alaplappal?

15.2. *a)* Mekkora a 10 cm oldalú szabályos tetraéder felszíne és térfogata?

b) Mekkora szöget zár be két oldallap egymással?

15.3. 5 méter és 6 méter oldalú téglalap alapú toronyra 8 méter magas gúla alakú tető készül. Körülbelül mennyi cserép kell rá, ha egy cserép területe 16 dm^2?

15.4. Az ábrán látható egyenlőszárú derékszögű háromszög alapú gúla alakú 2,3 dl-es üdítős papírdobozt szeretnénk készíteni.



a) Mekkora legyen az x?

b) Rajzold le a tetraéder hálóját!

c) Mekkora a felszín?

15.5. Egy gúla alapja szabályos hatszög. A hatszög köré írható kör átmérője 10 cm. Mekkora a gúla felszíne és térfogata, ha magassága 30 cm?

15.6. Egy egyenlőszárú háromszög alakú sátorlap alapja 2 méter, szára 3 méter.

a) Hat sátorlapot összekötve milyen magas rúddal kell középen megtámasztani, hogy kifeszüljön a sátor?

b) Mekkora a sátor térfogata?

c) Mekkora felületet kell vízhatlanító viasszal bedörzsölni?

16. feladatlap

Kúp felszíne és térfogata

EMLÉKEZTETŐ

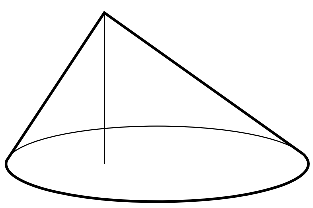
gúla: Kössük össze egy zárt síkgörbe (***vezérgörbe***) minden határolópontját, egy nem a síkgörbe síkjában lévő ponttal (***csúccsal***). Az így kapott térbeli alakzat a kúp.

alaplap: A kúp alaplapja a kiindulási görbe.

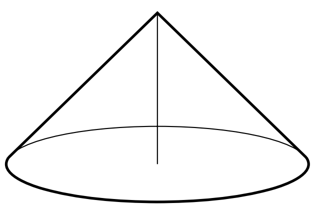
alkotó: A kúp csúcsát és a síkgörbét összekötő szakasz.

palást: Az alkotók által leírt felület a palást.

magasság: A csúcs és az alaplap távolsága.



Körkúp



Egyenes körkúp

körkúp: Olyan kúp, ahol az alaplap kör.

egyenes körkúp: Olyan körkúp, amelynek magasságának talppontja egybeesik az alapkör középpontjával.

egyenes körkúp térfogata: A henger alaplapjának területének és a magasság szorzata: $V = \frac{\pi r^2 m}{3}$.

egyenes körkúp felszíne:. Az alaplap és a palást területének az összege: $A = \pi r^2 + \pi r a = \pi r(r + a)$.

FELADATOK

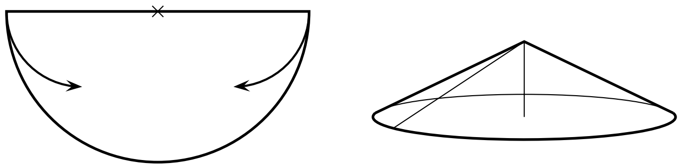
16.1. Egyenes körkúp alapkörének sugara 0,5 méter, magassága 1,2 méter. Mekkora a kúp felszíne és térfogata?

16.2. Az egyenes körkúp magassága 10 cm, térfogata pontosan 1 liter. Mekkora a kúp felszíne?

16.3. Iskolai demonstrációs egyenes körkúp alkotója 6 cm, felszíne 150 cm^2. Mekkora a térfogata?

16.4. Mekkora az egyenes körkúp alakú pohár űrtartalma, ha fedőkörének átmérője 6 cm, és alkotója 4 cm?

16.5. 30 cm sugarú félkörből egyenes körkúpot hajtogatunk. Mekkora az így kapott kúp alapkörének területe, és mekkora a kúp magassága?



16.6. Egyenes körkúp magassága az alapkör r sugarának a fele. Mekkora a körkúp térfogata és felszíne?

16.7. A 4 cm és 6 cm befogójú derékszögű háromszöget megforgatjuk előbb a 4 cm-es majd a 6 cm-es befogója mint tengely körül. Mekkora az így kapott kúpok térfogatának a különbsége? Mekkora a kúppalástok területének a különbsége?

17. feladatlap

Csonkagúla felszíne és térfogata

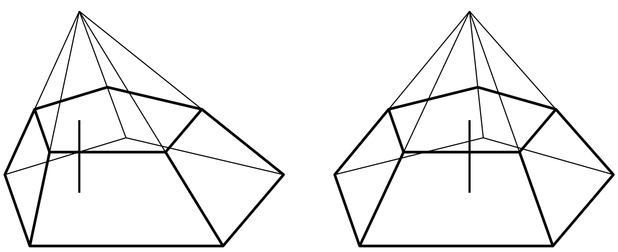
EMLÉKEZTETŐ

csonkagúla: A kúpot az alaplappal párhuzamos síkkal elmetszve két testet kapunk. Az alaplap és a síkmetszet közötti test a csonkagúla.

alaplap: Azonos a kiindulási gúla alaplapjával.

fedőlap: A kiindulási gúlából az alaplap síkjával párhuzamos síkkal kimetszett alakzat. A fedőlap és az alaplap hasonló alakzat.

alkotó: A kiindulási gúla csúcsát és az alaplap sokszögét összekötő egyenes alaplap és a fedőlap közé eső része.



oldallap: A csonkagúla alkotói által meghatározott síkidom. Az oldallap trapéz, mivel az alaplappal és a fedőlappal közös oldalai párhuzamosak.

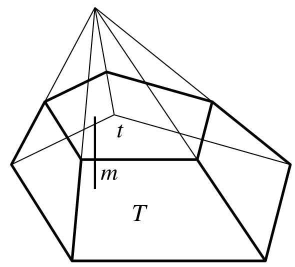
palást: Az oldallap-trapézok összessége.

csonkagúla magassága: Az alaplap és a fedőlap távolsága.

szabályos *n*-oldalú csonkagúla: Szabályos *n*-oldalú gúlából keletkezett csonkagúla.

csonkagúla térfogata: $V = \frac{m_t}{3}\left(T_a + \sqrt{T_a \cdot T_f} + T_f\right)$, ahol m_t a csonkagúla magassága, T_a az alaplap területe, T_f a fedőlap területe.

csonkagúla felszíne: Az alaplap, a fedőlap és a palást területének az összege: $A = T_a + T_f + P$, ahol T_a az alaplap területe T_f a fedőlap területe, P a palást területe.



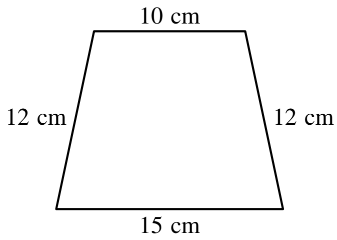
FELADATOK

17.1. A szabályos négyoldalú csonkagúla alaplapjának az éle 10 cm, a fedőlap éle pedig 6 cm. A két lap távolsága 3 cm. Mekkora a csonkagúla felszíne és térfogata?

17.2. A betontuskó formája szabályos négyszög alapú csonkagúla. A csonkagúla alaplapjának éle 30 cm, a fedőlap éle pedig 15 cm. A tuskó magassága 20 cm. Hány darab betontuskó önthető ki 5 m^3 betonból?

17.3. A szabályos háromszög alapú gúla alakú sütemény alapéle 6 cm, magassága 9 cm. Mekkora lesz a sütemény térfogata, miután Kati a sütemény tetejét a magasságának felső harmadában vízszintesen levágta?

17.4. A szabályos négyoldalú csonkagúla oldala az ábrán látható trapéz.



a) Mekkora az oldallap magassága?

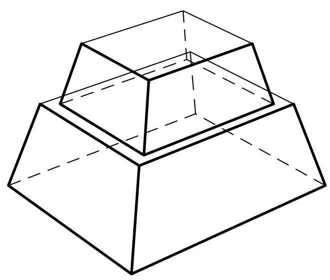
b) Mekkora a csonkagúla felszíne?

c) Mekkora a csonkagúla magassága?

d) Mekkora a csonkagúla térfogata?

17.5. Szabályos ötszög alapú virágváza méreteit megmértük. Az alaplapjának éle 6 cm, a fedőlapjának éle 4 cm, magassága 20 cm. Mennyi víz fér a vázába?

17.6. Tamás lépcsős piramis modellt készített az iskola számára. A piramis minden lépcsője négyzet alapú szabályos csonkagúla. A piramis legfelső „lépcsőjének” alapéle 5 cm, fedőlapjának oldala 4 cm, magassága 2 cm. Minden alul lévő piramis a felette lévőnek 1,35-szoros nagyítottja. Tamás összesen tíz „lépcsőt” készített.



a) Mekkora az így kapott piramis össztérfogata?

b) Legalább mekkora területű papírt használt fel összesen, ha statikai okokból a gúlák alját is bevonta papírral?

Csonkakúp felszíne és térfogata

EMLÉKEZTETŐ

csonkakúp: A kúpot az alaplappal párhuzamos síkkal elmetszve két testet kapunk. Az alaplap és a síkmetszet közötti test a csonkakúp.

alaplap: Azonos a kiindulási kúp alaplapjával.

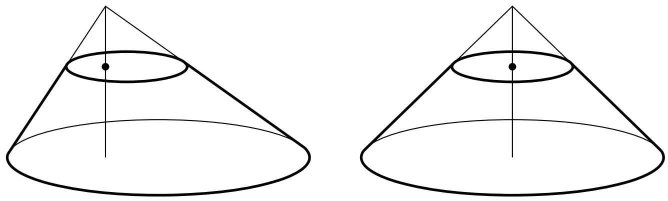
fedőlap: A kiindulási kúpból az alappal párhuzamos síkkal kimetszett alakzat. A fedőlap és az alaplap hasonló alakzat.

alkotó: A kiindulási gúla csúcsát és az alaplap sokszögét összekötő egyenes alaplap és a fedőlap közé eső része.

palást: A csonkakúp alkotói által meghatározott idom.

csonkakúp magassága: Az alaplap és az oldallap távolsága.

körkúp: Olyan kúp, ahol az alaplap kör.

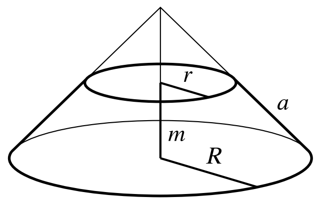


Körkúp Egyenes körkúp

egyenes csonkakörkúp: Olyan csonkakúp, amelyet egyenes körkúp elmetszésével kapunk. A továbbiakban csak ***csonkakúp*** néven említjük.

egyenes csonkakúp térfogata: $V = \frac{m\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2)$.

egyenes csonkakúp felszíne: Az alaplap, a fedőlap és a palást területének az összege: $A = \pi\left[R^2 + r^2 + (R + r)a\right]$. Ahol R az alaplap sugara, r a fedőlap sugara, m a csonkakúp magassága és a az alkotó hossza.

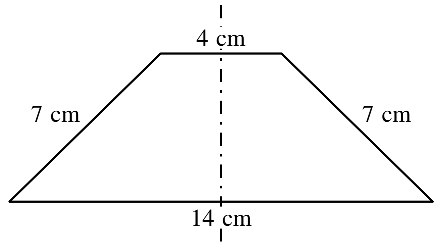


FELADATOK

18.1. A csonkakúp alapkörének átmérője 18,52 cm, fedőkörének átmérője 12,78 cm, magassága 6,74 cm. Mekkora a csonkakúp felszíne és térfogata?

18.2. Csonkakúp alakú tál alapkörének sugara 10 cm, fedőkörének sugara 13 cm. Mekkora legyen annak a henger alakú tálnak az átmérője, amelynek a magassága is és a térfogata is azonos a csonkakúp alakú táléval?

18.3. Az ábrán látható szimmetrikus trapézt a szimmetriatengelye körül megpörgetjük. Mekkora az így kapott csonkakúp felszíne és térfogata?



18.4. A kúp alapkörének átmérője 10 cm, magassága 8 cm. Milyen magasságú kúpot kell a csúcsáról levágni, ha azt akarjuk, hogy az így kapott csonkakúp térfogata az eredeti térfogat 82%-a legyen?

18.5. Egy csonkakúp térfogata 5000 cm^3, az alapkör sugara 6,5 cm, magassága 44 cm. Mekkora a fedőlap sugara?

18.6. Egy csonkakúp térfogata 450 cm^3, magassága 5 cm. Az alap- és fedőkör sugarának különbsége 4 cm. Mekkora a két sugár?

19. feladatlap

Gömb felszíne és térfogata

EMLÉKEZTETŐ

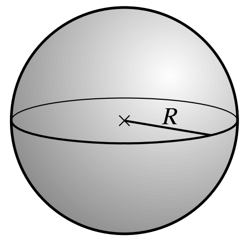
gömb: A tér egy O pontjától r távolságra lévő pontok halmaza.

gömb középpontja: Az O pont.

gömb sugara: Az r távolság.

gömb térfogata: $V = \frac{4\pi}{3} R^3$.

gömb felszíne: $A = 4\pi R^2$.



FELADATOK

19.1. A megközelítőleg gömb alakú Föld közepes sugara $R_{\text{Föld}} = 6371$ km. Mekkora a Föld térfogata és felszíne?

19.2. A nagymama 20 cm átmérőjű, 10 cm magas henger alakú tálban keveri ki a túrógombóc alapanyagát, és a tál pont tele van. Legfeljebb hány darab 4 cm átmérőjű egész gombóc készülhet a masszából?

19.3. Az 10 liter térfogatú gömbnek mekkora a felszíne?

19.4. A félgömb felszíne 1 m^2. Mekkora a térfogata?

19.5. Az űrállomás súlytalansági állapotában egy 2,3 cm és egy 3,1 cm sugarú gömb alakú vízcsepp egyesült egy nagyobb gömbbé.

a) Mekkora lett az új gömb sugara?

b) Az új gömb felszíne mennyivel lett kisebb a két eredeti gömb összfelszínéhez képest?

19.6. A gömb alakú mezőgazdasági víztározó tartály külső átmérője 3 méter, falának vastagsága 0,5 cm.

a) Hány tonna vizet tárol, ha a tartály 5%-a biztonsági okokból levegőt tartalmaz? A víz sűrűsége $1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

b) Üresen mekkora a tömege, ha a tartály $2800\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ sűrűségű anyagból készült? ($m = \varrho \cdot V$, ahol m a test tömege, V a test térfogata és ϱ a test anyagának sűrűsége.)

20. feladatlap

Testben lévő testek

FELADATOK

20.1. A kocka felszíne 181,5 cm^2.

a) Mekkora a köré és a beleírható gömb térfogatának különbsége?

b) Mekkora a köré és a beleírható gömb felszínének különbsége?

20.2. Az 5 cm és 9 cm párhuzamos oldalú szimmetrikus trapéz érintőnégyszög. A trapézt a szimmetriatengelye körül megforgatjuk.

a) Mekkora az így kapott csonkakúp térfogatának és a beírható gömb térfogatának a különbsége?

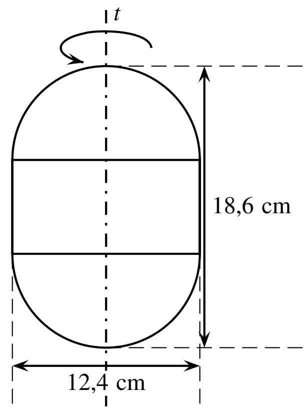
b) A gömb eltávolításával kapott alakzatnak mekkora a felszíne?

20.3. A 12,56 cm^2 keresztmetszetű, 1 méter hosszú fahengerből minimálisan mennyi anyag eltávolításával kaphatunk a lehető legnagyobb és legtöbb fagolyót?

20.4. Mekkora a gömb felszíne, ha a gömb belsejébe írt egyenes körkúp alapkörének sugara 10 cm, alkotója 28 cm?

20.5. Egy henger alakú pohár alapkörének sugara 2 cm. A pohárban 4 cm magasan áll a víz. Mennyivel változik a víz magassága, ha a pohárba négy darab 1 cm átmérőjű acélgömböt dobunk?

20.6. Az ábrán látható alakzatot az ábrán jelzett szimmetriatengelye körül megforgatjuk. Mekkora lesz a kapott test térfogata és felszíne?



Testek darabolása és összetevése

FELADATOK

21.1. *a)* A 8 cm oldalú négyzetet megpörgetjük az átlója körül. Mekkora az így kapott test felszíne és térfogata?

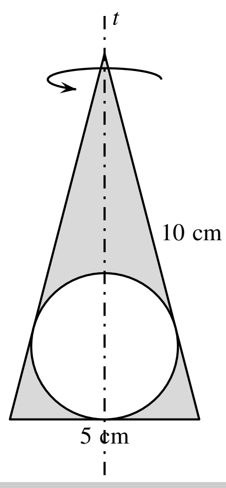
b) A 12 cm és 16 cm befogójú derékszögű háromszöget megforgatjuk az átfogója körül. Mekkora az így kapott test felszíne és térfogata?

21.2. 10 cm és 6 cm oldalú deltoidot megforgatjuk a szimmetriatengelye körül. A deltoid nem szimmetriaátlója 6 cm hosszú. Mekkora az így kapott test térfogata és felszíne, ha a deltoid

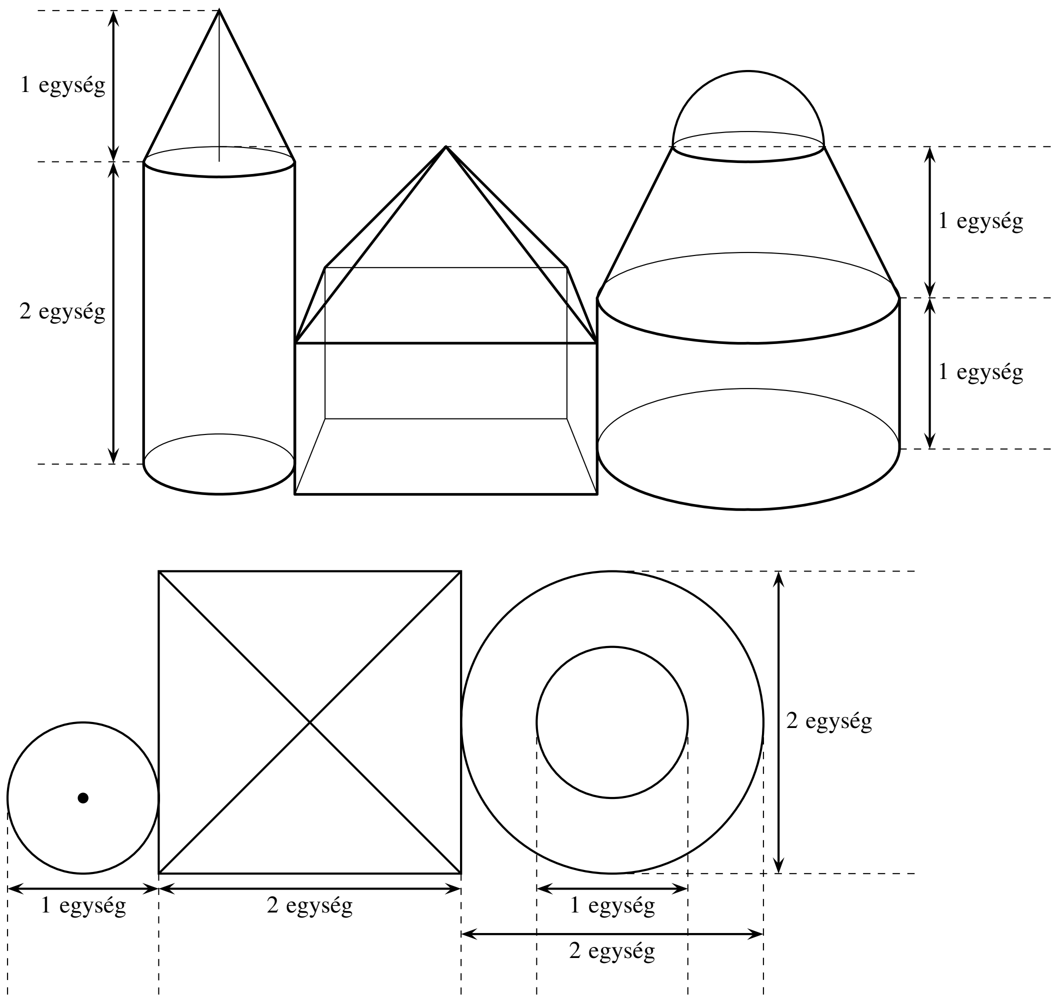
a) konvex;

b) konkáv?

21.3. 5 cm alapú és 10 cm szárú egyenlő szárú háromszögből kivágjuk a beírható körét. Az így kapott alakzatot megforgatjuk a szimmetriatengelye körül. Mekkora az így kapott test felszíne és térfogata?

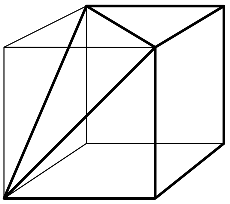


21.4. A gyerekek építőjátékból állították össze a képen látható „várat”. Mekkora a „vár” össztérfogata?

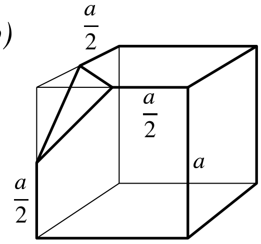


21.5. 10 cm oldalú kockáról leszeltük az egyik csúcsát az ábrán látható módon. Mekkora a maradék kocka térfogata?

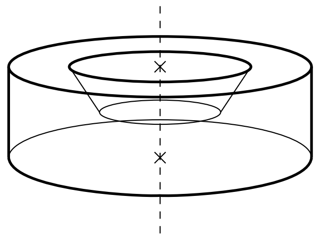
a)



b)



21.6. 10 cm sugarú, 6 cm magas egyenes hengerből kivágunk 6 cm fedőkörű és 4 cm alapkörű 3 cm magas csonkakúpot az ábrán látható módon. Mekkora a maradék test térfogata?



Logika

22. feladatlap

Logika

EMLÉKEZTETŐ

állítás: Olyan kijelentő mondat, amelyről egyértelműen eldönthető, hogy igaz vagy hamis. Az állítás jele: A, B, … .

logikai érték: Igaz vagy hamis.

logikai műveletek: Állításokra vonatkozó műveletek.

negáció (tagadás): Az A állítás negációján a „Nem igaz, hogy A” állítást értjük, amely igaz, ha A nem igaz, és nem igaz, ha A igaz. Jele: $\neg A$.

konjunkció (és): Az A és B konjunkcióján az „A és B” állítást értjük, amely akkor és csakis akkor igaz, ha A is és B is igaz. Jele: $A \wedge B$.

diszjunkció (megengedő vagy): Az A és B diszjunkcióján az „A vagy B” állítást értjük, amely akkor és csakis akkor hamis, ha A is és B is hamis. Jele: $A \vee B$.

implikáció: Az A és B implikációján a „ha A, akkor B” állítást értjük, amely akkor és csakis akkor hamis, ha A igaz de B hamis. Jele: $A \Rightarrow B$.

ekvivalencia: Az A és B ekvivalenciáján a „A akkor és csakis akkor, ha B” állítást értjük, amely akkor és csakis akkor igaz, ha A és B egyszerre igaz vagy egyszerre hamis. Jele: $A \Leftrightarrow B$.

$A \Rightarrow B$ **állítás megfordítása:** Az $A \Rightarrow B$ állítás megfordítása $B \Rightarrow A$. Az állítás megfordítása nem azonos az állítás tagadásával.

FELADATOK

22.1. A következő kijelentések közül válaszd ki az állításokat, és határozd meg a logikai értéküket!

a) Spanyolország fővárosa Madrid.

b) A bálna nem hal.

c) Az Oscar-díjat igazságosan adják.

d) A 13 szerencsétlen szám.

e) Egyiptom legnagyobb folyója a Nílus.

f) Magyarország zászlaja háromszínű.

22.2. Állapítsd meg a következő kijelentések logikai értékét!

a) Minden prímszám páratlan.

b) Van tengelyesen szimmetrikus paralelogramma.

c) Minden rombusz deltoid.

d) Van 7-re végződő négyzetszám.

e) Ha egy szám osztható 8-cal, akkor osztható 4-gyel is.

f) Minden 5-re végződő szám összetett szám.

g) A 24-nek több osztója van, mint a 32-nek.

22.3. Írd fel a következő állítás megfordítását! Döntsd el, hogy az állítás és megfordítása közül melyik hamis!

Ha egy négyszög húrnégyszög, akkor van derékszöge.

Megfordítás:

22.4. Készítsd el $A \vee B$, illetve $A \wedge B$ értéktáblázatát!

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$

22.5. Logikai táblázat segítségével igazold, hogy

a) $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$; *b)* $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$!

22.6. Fogalmazd meg a következő állítások tagadását!

a) Minden kutya ugat.

b) Van szőke hajú svéd.

c) Ha esik az eső, moziba megyünk.

d) Reggelire tojást eszünk és teát iszunk.

e) Este színházba megyünk vagy koncertre.

Ismétlő feladatok (válogatás a középiskolai anyagból)

23. feladatlap

Halmazok, statisztika, logika

FELADATOK

23.1. Adottak az $A := [-1; 5]$ és a $B := [3; 7]$ halmazok. Add meg és ábrázold számegyenesen az következő halmazokat!

a) $A \cap B$

b) $A \cup B$

c) $A \setminus B$

d) $B \setminus A$

23.2. Hány olyan 800-nál nem nagyobb szám van, mely relatív prímszám a 800-zal?

23.3. Sorold fel a három alapszínből (piros, sárga, kék) álló halmaz összes részhalmazát!

23.4. Adott az alábbi három halmaz

$A := \{12 \text{ osztói}\}$; $B := \{\text{egyjegyű prímek}\}$ $C := \{\text{az } (x-1)(x-3)(x+2) = 0 \text{ egyenlet megoldásai}\}$

a) Készíts Venn-diagramot!

b) Mekkora $|A \cap B \cap C|$?

c) Írd fel a $(B \cup C) \cap A$ halmaz elemeit!

23.5. Fogalmazd meg a következő állítás megfordítását, illetve tagadását! Karikázd be az állítások logikai értékét!

Állítás: Ha egy szám prímszám, akkor páratlan.

Megfordítás: I / H

Tagadás: I / H

23.6. Egészítsd ki az értéktáblázatot!

A	B	$\neg A \wedge B$		$A \vee \neg B$
i	*i*		*i*	
i	*h*		*i*	
h			*i*	
h		*h*	*h*	

23.7. Egy dobókockát 20-szor feldobunk. A dobások eredményét táblázatban rögzítettünk:

dobások értéke	1	2	3	4	5	6
dobások gyakorisága	2	7	3	4	0	4

a) Mennyi a dobások módusza?

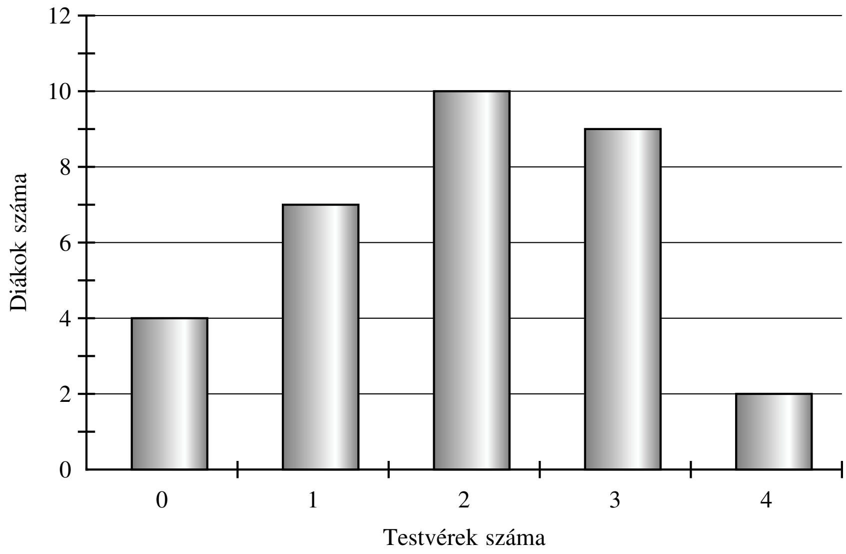
b) Mennyi a dobások mediánja?

c) Mennyi a dobások átlaga?

d) Mennyi a dobások relatív gyakorisága?

e) A dobások hány százaléka legalább 5?

23.8. Egy 32 fős osztályban a testvérek számát vizsgálták. Az alábbi diagram mutatja a felmérés végeredményét.



a) Az osztály hány százalékának van legfeljebb 2 testvére?

b) Mennyi az „egykék” relatív gyakorisága?

c) Mennyivel tér el a medián az átlagtól?

d) Véletlenszerűen kiválasztva két gyereket az osztályból, mennyi a valószínűsége, hogy mindkettőnek legalább 3 testvére van?

24. feladatlap

Számok, számelmélet, algebra

FELADATOK

24.1. Ábrázold Venn-diagramon az $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ halmazokat!

24.2. Törtek esetében a gyakorlat dönt arról, hogy normál tört vagy tizedes tört alakban használjuk-e őket. Írd át a következő számokat a nekik megfelelő másik alakba!

	Normáltört	Tizedestört
a)	$\frac{6}{5}$	
b)	$-\frac{1}{8}$	
c)	$\frac{32}{7}$	
d)		1,4
e)		$-8,\dot{3}$
f)		$0,\dot{1}\dot{7}$
g)		2,0006
h)	$-\frac{5}{9}$	
i)		131,8
j)	$\frac{105}{4}$	

24.3. Döntsd el a következő állításokról, hogy igazak vagy hamisak-e!

a) Ha egy szám osztható 3-mal, akkor páratlan.

b) Nincs 10-nél nagyobb páros prím.

c) Egy négyzetszám nem végződhet 2-re.

d) Ha két szám relatív prím, akkor legalább az egyik prím.

e) Ha egy számnak pontosan 3 osztója van, akkor négyzetszám.

24.4. Írd fel csökkenő sorrendben a következő számokat!

$\sqrt[3]{27}$; $\log_2 \frac{1}{16}$; $5^{1-\log_5 2}$; 100_3; $4^{-\frac{1}{2}}$.

24.5. Tekintsük a $\overline{637x12y}$ tízes számrendszerbeli számot! Mit írhatunk x és y helyébe, hogy

a) a szám osztható legyen 15-tel?

b) a szám osztható legyen 24-gyel?

c) a szám osztható legyen 18-cal?

24.6. Egyszerűsítsd a következő törteket a változók megengedett értékei mellett!

a) $\dfrac{24^5 \cdot 18^3 \cdot 72^4}{36^6 \cdot 48^5} =$

b) $\dfrac{(a^2b^3)^{-2} \cdot (a^7b^5)^3}{(a^3b)^4 \cdot (a^5b^2)^3} =$

24.7. Hozd egyszerűbb alakra!

a) $\dfrac{x^2 + xy}{x^2 - xy} \cdot \dfrac{xy}{x^2y + xy^2} =$

b) $\dfrac{5x^2 - 10xy + 5y^2}{x - y} : \dfrac{x^2 - y^2}{3x + 3y} =$

24.8. Add meg a $\left[-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{3}\right]$ intervallum 3 elemét!

25. feladatlap

Függvények

FELADATOK

25.1. Írd fel annak az elsőfokú függvénynek a hozzárendelési szabályát, amelynek grafikonja az x tengelyt 2-nél, az y tengelyt 5-nél metszi!

a) Mekkora szöget zár be az egyenes az x tengellyel?

b) Mely x-ekre pozitív a függvény?

25.2. Ábrázold közös koordináta-rendszerben az $f(x) = -|x + 4| + 5$ és $g(x) = (x - 3)^2 - 2$ függvényeket!

a) Mennyi $f(-2)$, $f(400)$, $g(5)$, $g\left(-\dfrac{3}{4}\right)$ értéke?

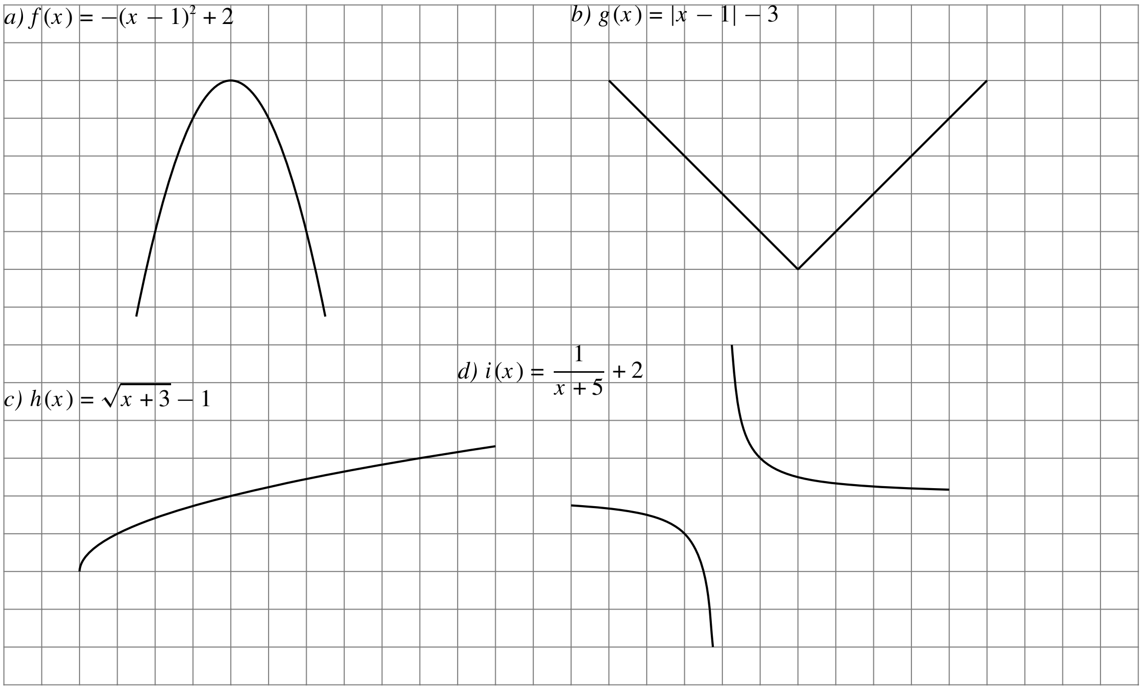
$f(-2) =$ $\qquad$ $f(400) =$ $\qquad$ $g(5) =$ $\qquad$ $g\left(-\dfrac{3}{4}\right) =$

b) Hol teljesül, hogy $f(x) = g(x)$?

c) Milyen szélsőértéke van a függvényeknek?

d) Határozd meg azt az intervallumot, ahol $g(x)$ szigorúan monoton csökken?

25.3. Rajzold be a koordinátatengelyeket!



25.4. Adj meg olyan függvényt, amelynek

a) értelmezési tartománya $\mathbb{R}^+$, értékkészlete $y \in [2; \infty[$;

b) zérushelyei $x_1 = -3$ és $x_2 = 6$;

c) maximuma van az $x = -2$ helyen és maximumának értéke $y = 5$.

25.5. Adott az $f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 - 2, & \text{ha } x \le -1 \\ \sqrt{x+1} + 2, & \text{ha } -1 < x < 8 \\ -|x-6| + 7, & \text{ha } 8 \le x \end{cases}$.

a) Ábrázold a függvényt a $[-5; 15]$ intervallumon!

b) Hol metszi a függvény az y tengelyt?

c) Határozd meg a függvény lokális és abszolút szélsőértékhelyeit az adott intervallumon!

25.6. Ábrázold közös koordináta-rendszerben!

$f(x) = 2^{x+3} - 5$; $g(x) = -2^{x+3} + 1$; $h(x) = \log_2(x - 3)$; $i(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 5$.

a) Melyek a szigorúan monoton növekedő függvények?

b) Számítsd ki a logaritmusfüggvények zérushelyeit!

c) Számítsd ki $f(-4)$, $f(2)$, $g(-2)$, $g(4)$ értékét!

$f(-4) =$ $f(2) =$ $g(-2) =$ $g(4) =$

Első- és másodfokú egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek

FELADATOK

26.1. Ábrázold számegyenesen a megoldáshalmazokat!

a) $\dfrac{2}{x} = 4;$ *b)* $\dfrac{2}{x} > 0;$

c) $\dfrac{2}{x} < 2.$

26.2. Mekkora a következő egyenletek megoldásainak szorzata együtt?

a) $x^2 - 4 = 0;$ *b)* $\dfrac{3}{x+1} = -1;$ *c)* $\dfrac{4x-3}{5} + 1 = \dfrac{x}{2}.$

A szorzat értéke:

26.3. Oldd meg grafikusan a következő egyenlőtlenségeket!

a) $|x-3| - 2 \leq -x^2 + 6x - 5;$ *b)* $|x-2| + 2 > |x+4| - 2;$

c) $\sqrt{x+2} - 2 < |x-2| - 4.$

26.4. Van-e a következő egyenletrendszereknek megoldása az egész számok halmazán?

a) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 14 \end{cases};$ *b)* $\begin{cases} x^2 + y^2 = 40 \\ xy = 12 \end{cases}.$

26.5. Add meg intervallumokkal a következő egyenlőtlenségek megoldásait!

a) $x^2 + x - 2 > 0;$

b) $x^2 + 6x + 10 \geq 0;$

c) $-\dfrac{2}{x-5} < 0;$

d) $-\dfrac{x+4}{3-x} \geq 0;$

e) $x + |x| \leq 2.$

27. feladatlap

Logaritmikus, exponenciális, trigonometrikus egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek

FELADATOK

27.1. Oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\lg x = \lg 5 + \lg 17;$

b) $\log_{25} x = -\dfrac{1}{2};$

c) $3^x = \dfrac{1}{81};$

d) $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ x \in [0; 2\pi];$

e) $\cos x < 0$;

f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5} \geq 2$;

g) $\log_9 x > -\frac{1}{2}$.

27.2. Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán! $4\cos x + 1 = 4\sin^2 x$

27.3. Van-e egész megoldása a következő egyenleteknek?

a) $\log_2\left(\sqrt{x+1} - 1\right) = 3$;

b) $36^x - 4 \cdot 6^x - 12 = 0$.

27.4. Ábrázold számegyenesen!

a) $\sin^2 x > \cos^2 x$;

b) $(x-4)^2 \geq 2^x$.

Szöveges feladatok

FELADATOK

28.1. Diophantosz sírfelitrata alapján állapítsd meg, hány évig élt!

„Itt nyugszik Diophantosz. Mily csoda! Sírköve is még
nagy tudományával hirdeti élte korát:
Egyhatodát gyermekkornak rendelte az isten.
Orcájára pehelyt tett feleannyi után.
Eltelt egyheted és fáklyát gyújtott lakodalmán.
Múlik öt év s fiúval áldja meg ekkor a nászt.
Jaj, későn született, jaj, vézna fiú! Feleannyit éltél,
mint apád, s máris a máglya emészt.
Négy évig gyászát tudománnyal csillapította,
S élete hosszát ím: – látod e bölcs sorokon.”

28.2. Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 8. Ha a számjegyeket felcseréljük és az így kapott számból kivonjuk az eredetit, akkor 10-zel többet kapunk a számjegyek összegénél. Melyik ez a szám?

28.3. 2 liter 60%-os málnaszörp-sűrítményhez hány liter vizet kell önteni, hogy 20%-os üdítőt kapjunk?

28.4. Hörcsög papa az összegyűjtött búzaszemeket 3 hét alatt, hörcsög mama 24 nap alatt, a kis hörcsög 40 nap alatt enné meg. Ha mindhárman egyszerre esznek a búzából, hány napig elég az eleségük?

28.5. A 200 és az 5 számokhoz keresünk egy harmadikat, amelyet az elsővel összeszorozva egy négyzetszámot ad, míg a másodikkal szorozva ennek a négyzetszámnak a négyzetgyökét adja.

28.6. Hány oldalú az a sokszög, amelynek átlóinak száma 114-gyel több, mint az oldalak számának 25-szöröse?

28.7. Legalább hány fős az az osztály, ahol biztosan van

a) két olyan tanuló, akinek ugyanannyi foga van?

b) öt olyan tanuló, akinek a hét ugyanazon napján van a születésnapja?

c) négy olyan tanuló, aki ugyanabban a hónapban ünnepli névnapját?

28.8. Egy matematika-versenyen az iskola tanulóinak 20%-a indult. Mindenki legalább egy feladatot megoldott a kitűzött két feladat közül. Az elsőt a versenyzők 60%-a, a másodikat a 65%-a oldotta meg. Csak a másodikat pontosan 80-an tudták megoldani. Hány fős az iskola?

Kombinatorika és valószínűségszámítás

FELADATOK

29.1. Egy pénzérmét egymás után négyszer feldobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy
a) mind a négyszer írást kapunk?

b) három fejet és egy írást kapunk?

29.2. Egy könyvespolcról leveszünk 10 könyvet, majd véletlenszerűen visszatesszük őket. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a köztük lévő két verseskötet egymás mellé kerül?

29.3. 6 fiúból és 4 lányból egy 5 fős csapatot kell kiállítani úgy, hogy a csapat „vegyes" legyen. Hányféle összeállítás lehetséges?

29.4. A morzeábécé pontokból és vonalakból áll. Hány jelet állíthatunk össze, ha egy jel
a) pontosan 4 egységből áll?

b) legfeljebb 3 egységből áll?

29.5. Hányféleképpen szállhat be 12 gyerek egy 3, egy 4 és egy 5 személyes csónakba?

29.6. Három kockával dobva minek nagyobb a valószínűsége, hogy a dobott összeg 9 vagy 10?

29.7. Egy gránátalma szállítmánynak a 12%-a romlik meg szállítás közben. 400 darabból találomra kiveszünk 80 almát. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) nem lesz közöttük romlott?

b) mind romlott lesz?

c) pont 9 romlott alma lesz közte?

29.8. A 2, 5, 6, 7, 8 cm hosszú szakaszok közül találomra kiválasztunk hármat. Hány esetben lehet belőlük háromszöget szerkeszteni?

Geometria

FELADATOK

30.1. Egy derékszögű háromszög befogói 10 cm és 24 cm. Számítsd ki a háromszög

a) kerületét;

b) területét;

c) a köré és a beírható kör sugarát;

d) magasságainak hosszát;

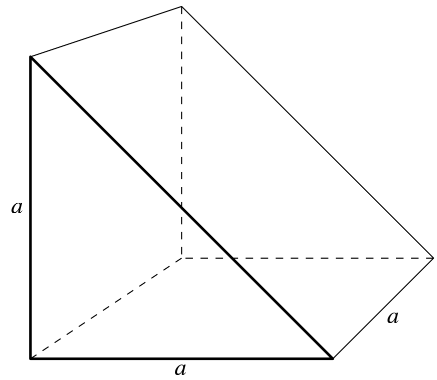
e) súlyvonalainak hosszát;

f) szögeit!

30.2. Mekkora sugarú körrel lehet egy 10 cm^2 területű szabályos háromszöget befedni?

30.3. Az ábrán látható tejesdoboz a élének hosszúsága 12 cm.

a) Legalább hány ilyen doboz kéne ahhoz, hogy 1000 liter tejet szállítsunk bennük?



b) Hány m^2 speciális papír kell 1000 doboz elkészítéséhez?

30.4. Egy mező közepén álló 15 m magas vadászlesből az őz fejét 12°-os depressziószög (vízszintessel bezárt szög) alatt látjuk. Milyen messze van tőlünk, ha magassága kb. 80 cm?

30.5. A Nap sugara kb. 109-szeres a Föld sugarának. Hányszorosa a Nap térfogata, illetve felszíne a Föld térfogatának, illetve felszínének?

30.6. Az $ABCD$ húrtrapéz alapjai 8 cm és 5 cm. Magassága a hosszabbik alap 45%-a.

a) Mekkorák a hozzá hasonló trapéz adatai (oldalak, szögek), ha a hasonlóság aránya $\lambda = 5$?

b) Mekkora az eredeti trapéz köré írható kör sugara?

30.7. Milyen magas a pisai ferde torony, ha a függőlegestől 5,5° szögben hajlik el, és a dőlési irányban eltávolodva 150 m-t, a torony csúcsát 20,4°-os emelkedési szög alatt látjuk?

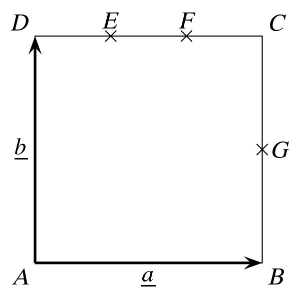
30.8. Két különböző faluból egyidejűleg „UFO-t" láttak. Az egyikből 50°-os, a másikból 18°-os emelkedési szögben látták. A két falu távolsága 65 km. Milyen távol lehetett az egyik, illetve a másik falutól az észlelt tárgy?

31. feladatlap

Vektorok, koordinátageometria

FELADATOK

31.1. Az $ABCD$ négyzetben E és F harmadolópont, G felezőpont. Határozd meg $\underline{a}$ és $\underline{b}$ segítségével a következő vektorokat!



$\overrightarrow{AE} =$ $\overrightarrow{AF} =$

$\overrightarrow{AG} =$ $\overrightarrow{GE} =$

$\overrightarrow{BF} =$ $\overrightarrow{DG} =$

31.2. Egy derékszögű háromszög átfogójának végpontjai $(-4; 5)$ és $(2; -1)$. Hol lehet a 3. csúcs? Hány megoldás van?

31.3. Egy négyzet átlójának végpontjai: $A(2; -5)$ és $C(6; 1)$.

a) Mekkora a négyzet területe?

b) Írd fel a másik átló egyenesének egyenletét!

c) Mekkora a négyzet köré írható kör sugara?

31.4. Az $x^2 + y^2 + 10x - 6y + 30 = 0$ egyenletű körrel koncentrikus kör sugara 6 egység.
a) Mi a körök közös középpontja?

b) Hol metszi a nagyobb kör a y tengelyt?

c) Mekkora a két kör által meghatározott körgyűrű területe?

31.5. Az AB szakasz két végpontjának koordinátái $A(-7; 2)$ és $B(3; -6)$.
a) Írd fel az A-hoz közelebbi harmadolópont koordinátáit!

b) Írd fel a szakaszfelező merőleges egyenletét!

c) Számítsd ki a szakasz hosszát!

31.6. A $2x + 5y - 9 = 0$ egyenletű egyenesnek

a) add meg egy normálvektorát!

b) add meg egy irányvektorát!

c) add meg a vele párhuzamos, origón átmenő egyenes egyenletét!

31.7. Adott az $A(2; 3)$ pont, az $e: 5x - 7y + 11 = 0$ egyenletű egyenes és a $k: x^2 + y^2 + 10x - 6y + 30 = 0$ egyenletű kör. Határozd meg az alakzatok kölcsönös helyzetét! (Például a pont rajta van-e az egyenesen, az egyenes metszi-e a kört, stb.)

1. feladatlap

1.1. *a)* $a_1 = 1$; $a_2 = 1+2 = 3$; $a_3 = 3+4 = 7$; $a_4 = 7+8 = 15$; $a_5 = 15+16 = 31$; $a_6 = 31+32 = 63$; $a_7 = 63 + 64 = 127$.

b) $a_1 = 1$; $a_2 = 1 + 3 = 4$; $a_3 = 4 + 5 = 9$; $a_4 = 9 + 11 = 20$; $a_5 = 20 + 21 = 41$; $a_6 = 41 + 43 = 84$; $a_7 = 84 + 85 = 169$.

c) $a_1 = 2$; $a_2 = -2$; $a_3 = 2$; $a_4 = -2$; $a_5 = 2$; $a_6 = -2$; $a_7 = 2$.

d) $a_1 = 2-0{,}1 = 1{,}9$; $a_2 = 4-0{,}1 = 3{,}9$; $a_3 = 6-0{,}1 = 5{,}9$; $a_4 = 8-0{,}1 = 7{,}9$; $a_5 = 10-0{,}1 = 9{,}9$; $a_6 = 12 - 0{,}1 = 11{,}9$; $a_7 = 14 - 0{,}1 = 13{,}9$.

e) $a_1 = 5$; $a_2 = 10$; $a_3 = 15$; $a_4 = 20$; $a_5 = 25$; $a_6 = 30$; $a_7 = 35$.

1.2. *a)* $a_1 = -18$; $a_2 = -16$; $a_3 = -12$; $a_4 = -4$; $a_5 = 12$; $a_6 = 44$; $a_7 = 108$.

b) $b_1 = -9$; $b_2 = -6$; $b_3 = -1$; $b_4 = 6$; $b_5 = 15$; $b_6 = 26$; $b_7 = 39$.

c) $c_1 = \frac{5}{2}$; $c_2 = \frac{7}{3}$; $c_3 = \frac{9}{4}$; $c_4 = \frac{11}{5}$; $c_5 = \frac{13}{6}$; $c_6 = \frac{15}{7}$; $c_7 = \frac{17}{8}$.

d) $a_1 = -1$; $a_2 = 2$; $a_3 = -3$; $a_4 = 4$; $a_5 = -5$; $a_6 = 6$; $a_7 = -7$.

e) $a_1 = 1$; $a_2 = -2$; $a_3 = 4$; $a_4 = -8$; $a_5 = 16$; $a_6 = -32$; $a_7 = 64$.

1.3. *a)* $a_n = 3n$; *b)* $b_n = n^2$; *c)* $c_n = n!$; *d)* $d_n = 3 + 2(n - 1) = 2n + 1$; *e)* $e_n = (-1)^{n-1}(3n - 2)$.

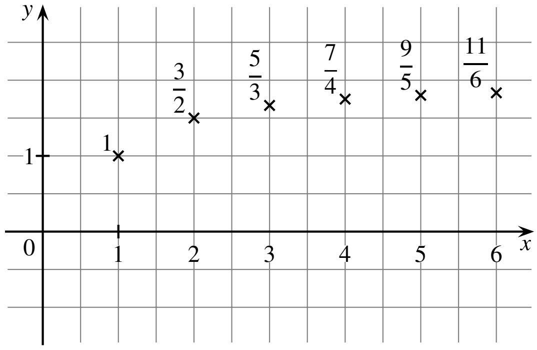
1.4. *a)* $a_3 = 1\frac{1}{3}$; $a_5 = 1\frac{1}{5}$; $a_n = 1 + \frac{1}{n}$; *b)* $b_3 = 3\frac{1}{2}$; $b_5 = 5\frac{1}{2}$; $b_n = n + \frac{1}{2}$; *c)* $c_3 = \frac{1}{3}$; $c_5 = \frac{1}{5}$; $c_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$; *d)* $d_3 = \frac{2}{3}$; $d_5 = \frac{4}{5}$; $d_n = \frac{n-1}{n}$.

1.5.

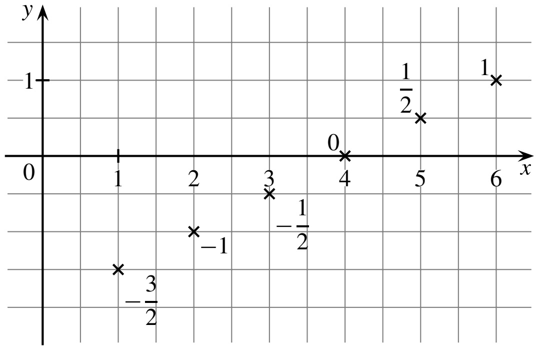
	1. tag	2. tag	3. tag	4. tag	5. tag	6. tag	7. tag	8. tag
a)	1	3	4	7	11	18	29	**47**
b)	0	1	2	5	12	29	70	**169**
c)	1	−1	0	−1	−1	−2	−3	**−5**

1.6.

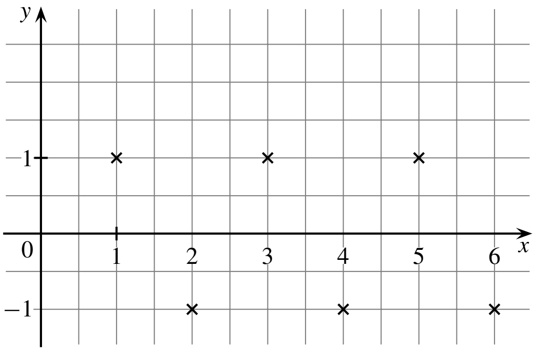
a)



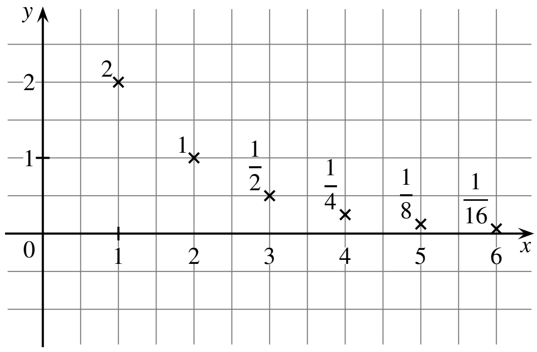
b)



c)

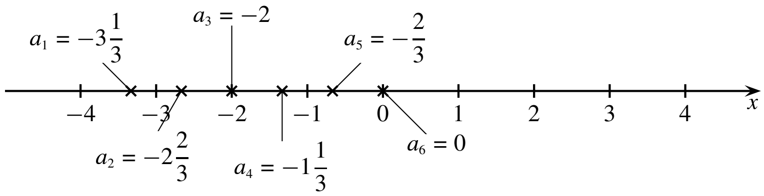


d)

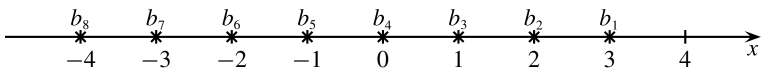


1.7. A sorozat tagjainak számegyenesen való ábrázolásakor az egyik legfontosabb szempont, hogy a tagok sorszáma és értéke jól megállapítható legyen! Például a jól leolvasható érték esetén nem írjuk ki a jelölés mellé.

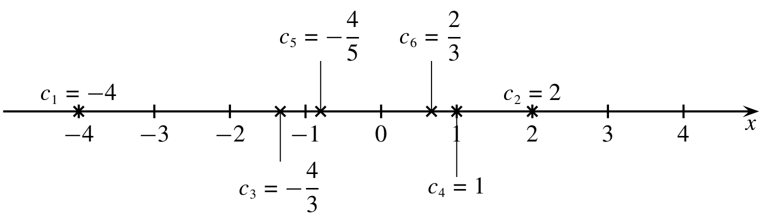
a)



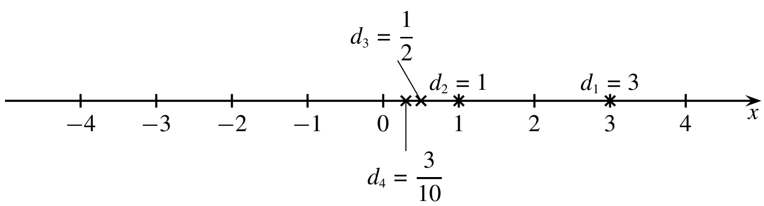
b)



c)



d)



1.8. *a)* $a_n = 2 - \frac{n}{2}$; *b)* $b_n = n - 2$; *c)* $c_n = (-1)^n \cdot 1{,}5$; *d)* $d_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

1.9. Tegyük egyenlővé a sorozat általános tagját 64-gyel, és az így kapott egyenletet oldjuk meg n-re. Amennyiben n pozitív egész szám, úgy a válasz igen, és n adja meg a tag sorszámát.

a) $n^2 = 64$. $n_1 = -8$, nem jó megoldás. $n_2 = 8$, a sorozat 8. tagja 64.

b) $1 + 3n = 64$; $63 = 3n$; $n = 21$. A sorozat 21. tagja 64.

c) $2 + 4(n - 2) = 64$; $4(n - 2) = 62$; $n - 2 = 15{,}5$; $n = 17{,}5$. Nincs a feltételnek megfelelő tag.

d) $\frac{1}{8} \cdot 2^{n-1} = 64$; $2^{n-1} = 512$; $2^{n-1} = 2^9$; mivel az exponenciális függvény szigorúan monoton függvény, $n - 1 = 9$; $n = 10$. A sorozat 10. tagja 64.

1.10. Számítsuk ki az első sorozat 8. tagjának értékét, majd tegyük egyenlővé a második sorozat általános tagját ezen értékkel! Ha pozitív egész számot kapunk akkor igen, ellenkező esetben nem a válasz.

a) $a_8 = \frac{8+2}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$. $b_n = \frac{1}{4}n^2 - \frac{19}{8}n = \frac{5}{4}$; $2n^2 - 19n = 10$; $2n^2 - 19n - 10 = 0$; $n_1 = -0{,}5$, nem megoldás; $n_2 = 10$ megoldás. Igen.

b) $a_8 = 4n - 7 = 4 \cdot 8 - 7 = 25$; $b_n = n^2 - 39 = 25$; $n^2 = 64$. $n_1 = -8$, nem megoldás. $n_2 = 8$, megoldás. Igen.

2. feladatlap

2.1. *a)* $a_n = -5 + (n-1) \cdot 2{,}2$; $a_6 = -5 + (6-1) \cdot 2{,}2 = 6$; $a_{20} = -5 + (20-1) \cdot 2{,}2 = 36{,}8$.

b) $b_n = 6 - (n-1) \cdot 0{,}7$; $b_7 = 6 + (7-1) \cdot (-0{,}7) = 1{,}8$; $b_{16} = 6 + (16-1) \cdot (-0{,}7) = -4{,}5$.

c) $c_n = 4$; $c_8 = 4$; $c_{100} = 4$.

d) $d_n = (n-1) \cdot (-0{,}5)$; $d_6 = (6-1) \cdot (-0{,}5) = -2{,}5$; $d_{51} = (51-1) \cdot (-0{,}5) = -25$.

2.2. A számtani sorozat általános alakja az n sorszám elsőfokú vagy nullafokú függvénye. Ha ilyen a képlet, akkor csak át kell alakítani úgy, hogy az első tag és a differencia leolvasható legyen. Sokszor csak átalakítás után derül ki, hogy számtani sorozatról van-e szó. Amennyiben be szeretnénk látni, hogy az adott sorozat nem számtani, elegendő belátni, hogy az egymást követő elemek különbsége nem állandó.

a) $a_1 = -1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 9$. $a_2 - a_1 = 3$, $a_3 - a_2 = 7$. Nem számtani sorozat.

b) Számtani sorozat: $b_n = 4 + (n-1)4$; $b_1 = 4$, $d = 4$.

c) Számtani sorozat: $c_n = 10 - 3(n-1)$; $c_1 = 10$, $d = -3$.

d) $d_n = \frac{(n-1)(n+1)}{n+1} = n - 1 = 0 + 1 \cdot (n-1)$, $n \neq -1$. Számtani sorozat. $d_1 = 0$, $d = 1$.

e) $e_n = \frac{(n-1)(n+1)}{n-1} = n + 1$, $n \neq 1$. Az első tagra nem értelmezett, így nem számtani sorozat.

f) $f_1 = 4 - \frac{1}{3}$, $f_2 = 4$, $f_3 = 4 + \frac{1}{5}$. $f_2 - f_1 = \frac{1}{3}$, $f_3 - f_2 = -\frac{1}{5}$. Nem számtani sorozat.

g) $g_n = 5$. Számtani sorozat. $g_1 = 5$, $d = 0$.

h) $\frac{3n+1}{5} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}(n-1)$. Számtani sorozat. $h_1 = \frac{4}{5}$, $d = \frac{3}{5}$.

i) $i_1 = -1$, $i_2 = 2$, $i_3 = -3$. $i_2 - i_1 = 3$, $i_3 - i_2 = -5$. Nem számtani sorozat.

2.3. A sorozat általános tagjába helyettesítsük be az ismert tag értékét és sorszámát! Amennyiben két tag adott, akkor kétismeretlenes elsőfokú egyenletrendszert kapunk, amely megoldásával megkapjuk az első tagot, és a differenciát.

a) $14 = a_1 + (5-1)d$; $58 = a_1 + (9-1)d$. $a_1 = -30$, $d = 11$. $a_n = -30 + (n-1) \cdot 11$; $a_{20} = 179$.

b) $\frac{34}{3} = b_1 + (8-1)d$; $\frac{86}{3} = b_1 + (21-1)d$. $b_1 = 2$, $d = \frac{4}{3}$. $b_n = 2 + (n-1) \cdot \frac{4}{3}$; $b_{20} = \frac{82}{3}$.

c) $87 = c_1 + (5-1)d$; $7 = c_1 + (21-1)d$. $c_1 = 107$, $d = -5$. $c_n = 107 - 5(n-1)$; $c_{20} = 12$.

d) $-0{,}3 = d_1 + (2-1)d$; $-19{,}8 = d_1 + (15-1)d$. $d_1 = 1{,}2$, $d = -1{,}5$. $a_n = 1{,}2 - 1{,}5(n-1)$; $a_{20} = -27{,}3$.

2.4. $43 = a_3 + a_5 = a_1 + 2d + a_1 + 4d = 2a_1 + 6d$; $37 = a_4 + a_6 = a_1 + 3d + a_1 + 5d = 2a_1 + 8d$. Az egyenletrendszer megoldása: $a_1 = 30{,}5$, $d = -3$. Az $a_n = 30{,}5 - 3(n-1)$ általános tagból $a_{100} = 30{,}5 - 3 \cdot 99 = -2665$.

2.5. $30 = a_1+a_2+a_3 = a_1+a_1+d+a_1+2d = 3a_1+3d$; $540 = a_{10}+a_{20} = a_1+9d+a_1+19d = 2a_1+28d$. Az egyenletrendszer megoldása: $a_1 = -10$, $d = 20$. Az $a_n = -10 + 20(n-1)$ általános tagból $a_{30} = -10 + 20 \cdot 29 = 570$.

2.6. A házszámok jó esetben számtani sorozatként követik egymást, ahol a differencia 2. A sorozat 1. tagja 57, az n. tagja pedig 163. A sorozat általános tagjába való behelyettesítés után n kifejezhető: $163 = 57 + 2(n-1)$; $n = 54$ a keresett ház.

2.7. A 6-tal osztható számok olyan számtani sorozatként követik egymást, amelynek differenciája 6. A feltételt kielégítő legkisebb szám 1002, ez a sorozat első eleme, a legnagyobb szám 1998, amely a sorozat n. tagja. $1998 = 1002 + 6(n-1)$; $n = 167$. Tehát 167 a válasz.

2.8. A 13-mal osztható számok számtani sorozatot alkotnak, a differencia 13. A feltételnek megfelelő szelvények sorszáma közül a legkisebb 507, a legnagyobb 741. $741 = 507+13(n-1)$; $n = 19$. Károly $19 \cdot 20 = 380$ zsetont fizetett.

2.9. *a)* $a_6 = \dfrac{a_5 + a_7}{2} = \dfrac{-5-1}{2} = -3$; *b)* $b_2 = \dfrac{b_1 + b_3}{2} = \dfrac{6+16}{2} = 11$;
c) $c_{15} = \dfrac{c_{10} + c_{20}}{2} = \dfrac{-7+27}{2} = 10$; *d)* $d_5 = \dfrac{d_3 + d_7}{2} = \dfrac{0+1}{2} = 0{,}5$.

3. feladatlap

3.1. A 100. tag: $a_{100} = 100 + 99 \cdot 5 = 595$. Az első 100 tag összege: $S_{100} = \dfrac{a_1 + a_{100}}{2} \cdot 100 = \dfrac{100+595}{2} \cdot 100 = 34\,750$. A 200. tag: $a_{200} = 100 + 199 \cdot 5 = 1095$. Az első 200 tag összege: $S_{200} = \dfrac{a_1 + a_{200}}{2} \cdot 200 = \dfrac{100+1095}{2} \cdot 200 = 119\,500$. A két összeg különbsége adja meg a következő 100 tag összegét: $S_{200-101} = S_{200} - S_{100} = 119\,500 - 34\,750 = 84\,750$.

3.2. Az ötödik és a nyolcadik tag: $a_5 = 30 = a_1 + 4d$; $a_8 = 54 = a_1 + 7d$. Az egyenletrendszer megoldásából: $a_1 = -2$, $d = 8$. $a_n = -2 + (n-1) \cdot 8$; $a_{20} = 150$. Az első húsz tag összege: $S_{20} = \dfrac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = \dfrac{-2+150}{2} \cdot 20 = 1480$.

3.3. A sorozat általános tagja: $a_n = 4 - 2(n-1)$. $-50 = 4 - 2(n-1)$ egyenletből $n = 28$.
b) $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \dfrac{4+4-2(n-1)}{2} \cdot n = \dfrac{8-2(n-1)}{2} \cdot n = 5n - n^2 = -2646$. $n^2 - 5n - 2646 = 0$. A pozitív megoldás $n = 54$.

3.4. A számtani sorozat általános tagja: $a_n = 16 + 3(n-1) = 31$. $n = 6$ sor van a parkolóban. $S_6 = \dfrac{16+31}{2} \cdot 6 = 141$ gépkocsi fér el a parkolóban.

3.5. *a)* Az építőelemek száma számtani sorozatot alkot, ahol az első tag 1, a nyolcadik tag 8 és a differencia 1. $S_8 = \dfrac{1+8}{2} \cdot 8 = 36$ db építőkocka.
b) Az építőelemek száma számtani sorozatot alkot, ahol az első tag 1, a sorok száma 8, a differencia 2. A 8. tag: $a_8 = 1 + 2 \cdot 7 = 15$. $S_8 = \dfrac{1+15}{2} \cdot 8 = 64$ db építőkocka.

3.6. A számok számtani sorozatot alkotnak, első elem 93, a tagok száma $172 - 93 + 1 = 80$. $S_{80} = \dfrac{93+172}{2} \cdot 80 = 5300$.

3.7. A legkisebb háromjegyű páratlan szám a 101, a legnagyobb 999, a differencia 2. $999 = 101 + 2 \cdot (n - 1)$, $n = 450$. $S_{450} = \dfrac{101 + 999}{2} \cdot 450 = 247\,500$ a számok összege.

3.8. A legkisebb feltételnek megfelelő szám az 1001, a legnagyobb 1995, a differencia 7. $1995 = 1001 + 7 \cdot (n - 1)$, $n = 143$. $S_{450} = \dfrac{1001 + 1995}{2} \cdot 143 = 214\,214$ a számok összege.

3.9. *a)* Az első tag 7 emberrel fog kezet, a második már csak 6-tal és így tovább. A kézfogások száma csökkenő számtani sorozatot alkot, az első elem 7, az utolsó 1 és a differencia -1. $S_7 = \dfrac{7+1}{2} \cdot 7 = 28$ a kézfogások száma. 13 fős tagság esetén $\dfrac{13 \cdot 12}{2} = 78$ lenne a kézfogások száma, ez éppen 50-nel több, mint 8 fős tagság esetén.

b) Legyen m az első ember kézfogásainak száma! Ekkor $S_m = \dfrac{m+1}{2} \cdot m = 136$. Innen $m^2 + m - 272 = 0$. A pozitív megoldás $m = 16$. Az egyesületi tagok száma 17.

3.10. A számtani sorozat minden második tagját tekintve is számtani sorozatot kapunk, amelynek a differenciája a kiindulási sorozat differenciájának kétszerese. Fehér korongok száma: 1; 7; 13; 19; 25. Az összeg: $S_{\text{fehér } 5} = \dfrac{1 + 25}{2} \cdot 5 = 65$. Piros korongok száma: 4; 10; 16; 22; 28. Az összeg: $S_{\text{piros } 5} = \dfrac{4 + 28}{2} \cdot 5 = 80$.

4. feladatlap

4.1. *a)* $a_n = -5 \cdot 2^{n-1}$; $a_6 = -5 \cdot 2^5 = -160$; $a_{10} = -5 \cdot 2^9 = -2560$.
b) $b_n = 16 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$; $b_3 = 16 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 = 4$; $b_6 = 16 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)^5 = -0{,}5$.
c) $c_n = 4 \cdot (-10)^{n-1}$; $c_8 = -4 \cdot 10^7$; $c_{49} = 4 \cdot 10^{48}$.
d) $d_n = -0{,}1^{n-1}$; $d_6 = -0{,}1^5 = -10^{-5}$; $d_{21} = -0{,}1^{20} = -10^{-20}$.

4.2. Egy sorozatról beláthatjuk, hogy nem mértani sorozat, ha találunk három egymást követő elemet, amelyre nem teljesül a mértani sorozat $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$ feltétele.
a) A sorozat első három eleme: -3; 6; 39. A feltétel alapján, $36 \neq -3 \cdot 39$, a sorozat nem mértani sorozat.
b) A sorozat első három eleme: -1; -2; -3. A feltétel alapján, $(-2)^2 \neq (-1) \cdot (-3)$, a sorozat nem mértani sorozat.
c) A sorozat első három eleme: 1; 4; 27. A feltétel alapján, $4^2 \neq 1 \cdot 27$, a sorozat nem mértani sorozat.
d) A sorozat $d_n = 3 \cdot 3^{n-1}$ mértani sorozat alakra hozható, innen $a_1 = 3$, $q = 3$. *e)* A sorozat $e_n = 10 \cdot 5^{n-1}$ mértani sorozat alakra hozható, innen $a_1 = 10$, $q = 5$.
f) A sorozat első három eleme: 2; $\dfrac{9}{4}$; $\dfrac{64}{27}$. A feltétel alapján, $\left(\dfrac{9}{4}\right)^2 \neq 2 \cdot \dfrac{64}{27}$, a sorozat nem mértani sorozat.
g) A sorozat $g_n = 5 \cdot 1^{n-1}$ mértani sorozat alakra hozható, innen $a_1 = 5$, $q = 1$.
h) A sorozat $h_n = 1 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$ mértani sorozat alakra hozható, innen $a_1 = 1$, $q = \dfrac{2}{3}$.
i) A sorozat $i_n = (-1) \cdot (-1)^{n-1}$ mértani sorozat alakra hozható, innen $a_1 = -1$, $q = -1$.

4.3. A sorozat általános tagjába helyettesítsük be az ismert elemet és az ismert sorszámot! A két egyenletből a sorozat első tagja és a hányadosa kiszámolható.

a) $192 = a_1 \cdot q^6$, $48 = a_1 \cdot q^4$. A két egyenlet hányadosa: $q^2 = 4$; $q_1 = -2$, $q_2 = 2$. A sorozat első tagja: $a_1 = \dfrac{48}{(\pm 2)^4} = 3$. Két sorozat is van: $a_{n,1} = 3 \cdot 2^{n-1}$; $a_{n,2} = 3 \cdot (-2)^{n-1}$. A kérdezett tag: $a_{6,1} = 96$; $a_{6,1} = -96$.

b) $-\dfrac{5}{243} = b_1 \cdot q^4$, $-\dfrac{5}{27} = b_1 \cdot q^2$. A két egyenlet hányadosa: $q^2 = \dfrac{1}{9}$; $q_1 = -\dfrac{1}{3}$, $q_2 = \dfrac{1}{3}$. A sorozat első tagja: $b_1 = \dfrac{-\dfrac{5}{27}}{\left(\pm\dfrac{1}{3}\right)^2} = -\dfrac{5}{3}$. Két sorozat is van: $b_{n,1} = -\dfrac{5}{3} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$; $b_{n,2} = -\dfrac{5}{3} \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$. A kérdezett tag: $b_{7,1} = -\dfrac{5}{2187}$; $b_{7,2} = -\dfrac{5}{2187}$.

c) $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = c_1 \cdot q^5$, $\sqrt{3} = c_1 \cdot q^4$. A két egyenlet hányadosa: $q = \dfrac{1}{3}$. A sorozat első tagja: $c_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{\left(\dfrac{1}{3}\right)^4} = 81\sqrt{3}$. A sorozat $c_n = 81\sqrt{3} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$. A kérdezett tag: $c_8 = 81\sqrt{3} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^7 = \dfrac{\sqrt{3}}{27}$.

d) $486 = d_1 \cdot q^5$, $6 = d_1 \cdot q$. A két egyenlet hányadosa: $q^4 = 81$; $q_1 = -3$, $q_2 = 3$. A sorozat első tagja: $d_{1,1} = \dfrac{6}{-3} = -2$, $d_{1,2} = \dfrac{6}{3} = 2$. Két sorozat is van: $d_{n,1} = -2 \cdot (-3)^{n-1}$; $d_{n,2} = 2 \cdot 3^{n-1}$. A kérdezett tag: $d_{5,1} = -162$, $d_{5,2} = 162$.

4.4. $90 = a_3 + a_5$, $90 = a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^4$, $90 = a_1 \cdot q^2 \cdot (1+q^2)$; $270 = a_4 + a_6$, $270 = a_1 \cdot q^3 + a_1 \cdot q^5$, $270 = a_1 \cdot q^3 \cdot (1+q^2)$. A két egyenlete hányadosa: $\dfrac{270}{90} = \dfrac{a_1 \cdot q^3 \cdot (1+q^2)}{a_1 \cdot q^2 \cdot (1+q^2)}$, $q = 3$. Az első tag: $a_1 = \dfrac{90}{3^2 \cdot (1+3^2)} = 1$. A második elem: $a_2 = 1 \cdot 3^{2-1} = 3$.

4.5. $\dfrac{21}{4} = a_1 + a_2 + a_3$, $\dfrac{21}{4} = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2$, $\dfrac{21}{4} = a_1(1 + q + q^2)$. $\dfrac{21}{8} = a_1 - a_4$, $\dfrac{21}{8} = a_1 - a_1 \cdot q^3$, $\dfrac{21}{8} = a_1(1 - q^3)$, $\dfrac{21}{8} = a_1(1 - q^3) = a_1(1-q)(1+q+q^2)$. A sorozat hányadosát a két egyenlet hányadosaként kaphatjuk meg: $\dfrac{1}{2} = \dfrac{a_1(1-q)(1+q+q^2)}{a_1(1+q+q^2)}$, $\dfrac{1}{2} = 1 - q$, $q = \dfrac{1}{2}$. Az $a_1 = \dfrac{21}{4(1+q+q^2)}$, $a_1 = \dfrac{21}{4\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\right)}$, $a_1 = 3$. Az ötödik tag: $a_5 = 3 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{3}{16}$.

4.6. *a)* A sorozat hatodik tagját megkaphatjuk, ha az ötödik tagot megszorozzuk a hányadossal: $a_6 = a_5 \cdot q = 20{,}25 \cdot 1{,}5 = 30{,}375$.

b) A sorozat első tagja: $a_1 = \dfrac{a_5}{q^4} = \dfrac{20{,}25}{1{,}5^4} = 4$.

4.7. A sorozat 6. tagja teljesíti először az 50-nél nagyobb feltételt: $a_6 = 3 \cdot 2^5 = 96$. A sorozat 8. tagja teljesíti utoljára az 500-nél kisebb feltételt: $a_8 = 3 \cdot 2^7 = 384$. Tehát a sorozat három tagja esik a megadott tartományba.

4.8. Az amőba osztódása mértani sorozatot követ, ahol n a szaporodási periódusokat mutatja: $a_n = 5 \cdot 2^n$.

a) A kérdés, hogy hányadik tagja a sorozatnak a 2560? $2560 = 5 \cdot 2^n$, $512 = 2^n$, $2^9 = 2^n$. Mivel az exponenciális függvény szigorúan monoton, $n = 9$. Kilenc osztódás szükséges, amely 18 óra múlva következik be.

b) $100\,000 = 5 \cdot 2^n$, $20\,000 = 2^n$. Vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát: $n = \dfrac{\lg 20\,000}{\lg 2} =$ $= 14{,}29$. Tehát valamivel több, mint 28 óra, és kevesebb, mint 30 óra.

4.9. Használjuk a mértani sorozatra érvényes $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$ összefüggést!

a) $a_6 = \pm\sqrt{a_5 \cdot a_7} = \pm\sqrt{(-18) \cdot (-2)} = \pm 6$; $a_6 = -6$ vagy $a_6 = 6$.

b) $b_2 = \pm\sqrt{b_1 \cdot b_3} = \pm\sqrt{1 \cdot 49} = \pm 7$; $b_2 = -7$ vagy $b_2 = 7$.

c) $c_{15} = \pm\sqrt{c_{10} \cdot c_{20}} = \pm\sqrt{7 \cdot 28} = \pm 14$; $c_{15} = -14$ vagy $c_{14} = 14$.

d) $d_5 = \pm\sqrt{d_3 \cdot d_7} = \pm\sqrt{(-7) \cdot 28}$; nincs ilyen mértani sorozat!

5. feladatlap

5.1. *a)* $S_5 = a_1 \cdot \dfrac{q^5 - 1}{q - 1} = 100\dfrac{5^5 - 1}{5 - 1} = 78\,100$; *b)* $S_5 = a_1\dfrac{q^5 - 1}{q - 1} = 100 \cdot \dfrac{(-5)^5 - 1}{-5 - 1} = 52\,100$.

5.2. $S_5 = a_1\dfrac{q^5 - 1}{q - 1}$; $\dfrac{355}{64} = a_1 \cdot \dfrac{\left(\frac{3}{4}\right)^5 - 1}{\frac{3}{4} - 1}$; $\dfrac{355}{64} = a_1 \cdot \dfrac{781}{256}$; $a_1 = \dfrac{20}{11}$.

5.3. *a)* A sorozat első tagja: $a_4 = a_1 \cdot q^3$; $\dfrac{250}{3} = a_1 \cdot \left(\dfrac{5}{2}\right)^3$; $\dfrac{250}{3} = a_1 \cdot \dfrac{125}{8}$; $a_1 = \dfrac{16}{3}$.

b) Az első n tag összege: $S_n = a_1\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$; $864{,}5 = \dfrac{16}{3} \cdot \dfrac{\left(\frac{5}{2}\right)^n - 1}{\frac{5}{2} - 1}$;

$\dfrac{1729}{2} = \dfrac{16}{3} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \left[\left(\dfrac{5}{2}\right)^n - 1\right]$; $\dfrac{15\,561}{64} = \left(\dfrac{5}{2}\right)^n - 1$; $\dfrac{15\,625}{64} = \left(\dfrac{5}{2}\right)^n$; $\left(\dfrac{5}{2}\right)^6 = \left(\dfrac{5}{2}\right)^n$; az exponenciális függvény szigorúan monoton; $n = 6$. A sorozat első hat tagjának összege 864,5.

5.4. Az n. hajtogatás után a papír vastagsága: $a_n = 0{,}1 \cdot 2^n$.

a) $a_5 = 0{,}1 \cdot 2^5 = 0{,}1 \cdot 32 = 3{,}2$ mm.

b) 10 cm = 100 mm. $100 = 0{,}1 \cdot 2^n$, $1000 = 2^n$. Vegyük minkét oldal logaritmusát!

$\lg 1000 = n \cdot \lg 2$. $n = \dfrac{3}{\lg 2} = 9{,}966$. A 10. hajtogatás után lesz 10 cm-nél vastagabb.

5.5. Határozzuk meg a sorozat eső tagját, és a hányadost! $16 = a_1 + a_2$, $16 = a_1 + a_1 \cdot q$; $16 =$ $= a_1(1 + q)$. $432 = a_4 + a_5$, $432 = a_1q^3 + a_1 \cdot q^4$; $432 = a_1q^3(1 + q)$. A két egyenlet hányadosa: $\dfrac{432}{16} = \dfrac{a_1q^3(1+q)}{a_1(1+q)}$, $27 = q^3$, $q = 3$; $16 = a_1(1 + q)$, $a_1 = 4$. $S_5 = a_1\dfrac{q^5 - 1}{q - 1} = 4 \cdot \dfrac{3^5 - 1}{3 - 1} = 484$ a keresett összeg.

5.6. Az eladott ruhák száma olyan mértani sorozatot alkot, amelynek első eleme 32, a hányados 1,5, és az első hat tagjának összegére vagyunk kíváncsiak. $S_6 = a_1\dfrac{q^6 - 1}{q - 1} = 32 \cdot \dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^6 - 1}{\frac{3}{2} - 1} =$

$$= 32 \cdot \frac{\frac{3^6 - 2^6}{2^6}}{\frac{1}{2}} = 3^6 - 2^6 = 665 \text{ darab ruhát adtak el.}$$

5.7. *a)* Ha a készlet harmada fogy el, akkor a készlet kétharmada marad meg. Ekkor a mértani sorozat $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = a_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, $a_9 = 256 = a_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8$. $a_1 = 6561$ darab áru volt kezdetben.

b) Az elfogyott mennyiséget megkapjuk, ha a teljes készletből kivonjuk a maradékot: $6561 - 256 = 6305$ árut adtak el.

5.8. A mértani sorozat első eleme 93, a hányados 3. A képregények száma $S_5 = 93 \cdot \frac{3^5 - 1}{3 - 1} =$ $= 11\,253$. A új mértani sorozat első eleme 11, a hányados 2. $S_n = 11 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 11\,253$. $2^n - 1 =$ $= 1023$, $n = 10$ oszlop születik.

6. feladatlap

6.1. *a)* A számtani sorozat első tagja 16, ötödik tagja 625. A sorozat differenciája az $a_5 = a_1 +$ $+(5-1)d$, $625 = 16+(5-1)d$, $d = 152{,}25$. $a_2 = 16+152{,}25 = 168{,}25$; $a_3 = 16+2\cdot 152{,}25 = 320{,}5$; $a_4 = 16 + 3 \cdot 152{,}25 = 472{,}75$.

b) A mértani sorozat első tagja 16, ötödik tagja 625. A sorozat hányadosa az $a_5 = a_1 \cdot q^{5-1}$, $625 =$ $= 16 \cdot q^4$, $q = \pm\frac{5}{2}$. Az egyik sorozat: $a_2 = 16 \cdot \frac{5}{2} = 40$; $a_3 = 16 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 100$; $a_4 = 16 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3 = 250$. A másik sorozat: $a_2 = 16 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = -40$; $a_3 = 16 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = 100$; $a_4 = 16 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)^3 = -250$.

6.2. A számtani sorozat 2. tagja: $a_1 + d = 9$, innen $a_1 = 9 - d$. Az 1. tag a_1; a 6. tag $a_6 = a_1 + 5d$; a 31. tag $a_{31} = a_1 + 30d$. Az 1. tag $9 - d$; a 6. tag $a_6 = 9 + 4d$; a 31. tag $a_{31} = 9 + 29d$. A mértani sorozat: $(9 - d)(9 + 29d) = (9 + 4d)^2$, $81 - 9d + 261d - 29d^2 = 81 + 72d + 16d^2$, $0 = 45d^2 - 180d$, $0 = d^2 - 4d = d(d - 4)$.

$d_1 = 0$ nem növekvő sorozat. $d_2 = 4$, $a_1 = 9 - d = 9 - 4 = 5$. A 10. tag $a_{10} = 5 + 4(10 - 1) = 41$.

6.3. A mértani sorozat felhasznált tagjai a_1; $a_3 = a_1 \cdot 4$ és $a_4 = a_1 \cdot 8$. A számtani sorozat első három tagja: $b_1 = a_1 - 1$; $b_2 = a_3 - 3 = 4a_1 - 3$; $b_3 = a_4 - 8 = 8a_1 - 8$. A három egymást követő tag közötti összefüggés: $a_1 - 1 + 8a_1 - 8 = 2(4a_1 - 3)$. A sorozat első eleme $a_1 = 3$.

6.4. A számtani sorozat első három tagjának összege: $a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 3a_1 +$ $+ 3d = 39$. $a_1 + d = 13$. Innen $a_1 = 13 - d$. A számtani sorozat három tagja: a_1; $a_3 = a_1 + 2d$; $a_4 = a_1 + 3d$. Behelyettesítés után: $a_1 = 13 - d$; $a_3 = 13 + d$; $a_4 = 13 + 2d$. Végezzük el az elemekkel a megfelelő műveleteket! $b_1 = 13 - d - 5 = 8 - d$; $b_3 = 13 + d - 6 = 7 + d$; $b_4 = 13 + 2d +$ $+ 25 = 38 + 2d$. Írjuk fel a mértani sorozatra vonatkozó összefüggést! $(8 - d)(38 + 2d) = (7 + d)^2$. $304 + 16d - 38d - 2d^2 = 49 + 14d + d^2$. Átrendezés után $0 = d^2 + 12d - 85$. Két sorozat létezik. Az első sorozat differenciája $d_1 = 5$, a második sorozat differenciája $d_2 = -17$,

6.5. Jelöljük a háromjegyű számot a következőképpen $\overline{abc}$. A mértani sorozat: a, b, c; a számtani sorozat $a, b, c - 4$. A három egyenlet: 1. $a \cdot c = b^2$, mert mértani sorozat; 2. $a + c - 4 = 2b$, mert mértani sorozat; $a + b + c = 13$. A két utolsó egyenletet vonjuk ki egymásból: $-4 - b =$ $= 2b - 13$, $b = 3$. Helyettesítsük be az egyenletekbe: $a + c = 10$ és $a \cdot c = 9$. A $c = 9 - a$ behelyettesítés után $a(10 - a) = 9$. $0 = a^2 - 10a + 9 = (a - 1)(a - 9)$. A megoldások $a_1 = 1$, $c_1 = 9$; $a_2 = 9$, $c_2 = 1$. A feltételnek megfelelő számok: 139 és 931. A 931 utolsó számjegyéből nem lehet kivonni 4-et. A keresett szám 139.

6.6. A kódszám jelölése $\overline{abcd}$. Írjuk fel az egyenleteket! I. A számtani sorozatra: $a + c = 2b$; II. a mértani sorozatra $bd = c^2$; III. $b+c = a$; IV. $c+d = \frac{a}{2}$. Az I. és III. egyenletből $b+2c = 2b$, $b = 2c$. Visszahelyettesítve a III. egyenletbe $a = 3c$. A IV. egyenletből $d = \frac{c}{2}$, a c csak páros szám lehet. $c = 2$ esetén a szám 6421. $c = 4$ esetén már nem négyjegyű a szám.

7. feladatlap

7.1. *a)* A tőke $t = 360\,000$ Ft, $n = 1$ év a periódus, a kamatos kamattal növelt tőke 388 880 Ft. $T = t\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$, $388\,880 = 360\,000 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^1$. Innen $p = 8{,}02\%$ az éves kamatláb.

b) $360\,000 \cdot \left(1+\frac{8{,}02}{100}\right)^5 = 529\,448$ Ft lesz 5 év múlva a pénzünk.

c) $T = t\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$, $720\,000 = 360\,000 \cdot \left(1+\frac{8{,}02}{100}\right)^n$, $2 = 1{,}0802^n$. Vegyük mindkét oldal logaritmusát: $n = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}0802} \approx 8{,}98 \approx 9$ év múlva duplázódik meg a pénzünk.

7.2. A probléma megoldáshoz használható a kamatos kamat számításának képlete, ahol a kamatos kamattal növelt tőkének a 900 000 fő felel meg, a kamatlábnak a 3%, az eltelt évek száma 15.
$T = t\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$, $900\,000 = t \cdot \left(1+\frac{3}{100}\right)^{15}$, $t = 577\,675 \approx 580\,000$ fő élt 15 évvel korábban.

7.3. A szaporulat növekedése, és az eladás csökkenése a kamattényezőben egyesíti hatását: $3200 \cdot \left(1+\frac{p_1}{100}\right) \cdot \left(1+\frac{p_2}{100}\right) = 3200 \cdot \left(1+\frac{6}{100}\right)^{11} \cdot \left(1+\frac{-4}{100}\right)^3 = 5374$ szarvasmarha lesz 11 év múlva a telepen.

7.4. $500\,000 \cdot 1{,}125^6 = 1\,013\,643$ Ft-ot kell visszatéríteni 72 hónap alatt, ez kb. 14 078 Ft-os törlesztőrészletet jelent.

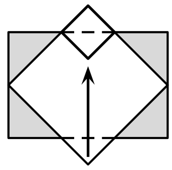
7.5. $T = t\left(1+\frac{9}{100}\right)^1 = t\left(1+\frac{h}{100}\right)^{12}$, $1{,}09 = \left(1+\frac{h}{100}\right)^{12}$, $1{,}00721 = 1+\frac{h}{100}$, $h = 0{,}721\%$ a havi kamat.

7.6. A két fizetési mód összehasonlítására az éves jövedelem kiszámolása után van mód.
A esetben az első félévben $6 \cdot 130\,000 = 780\,000$ Ft a jövedelem, a következő hat hónap első fizetése $130\,000 + 7000 = 137\,000$, az utolsó $130\,000 + 6 \cdot 7000 = 172\,000$ Ft, a jövedelem $\frac{137\,000 + 172\,000}{2} \cdot 6 = 927\,000$. Az éves jövedelem $780\,000 + 927\,000 = 1\,707\,000$.

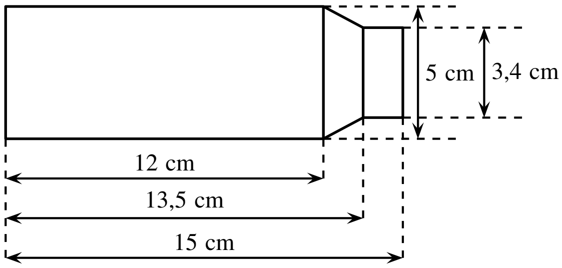
B esetben a havi fizetése $130\,000 \cdot \left(1+\frac{2}{100}\right)^{n-1}$ mértani sorozat szerint alakul. Az összeg $S_n = a_1\frac{q^n - 1}{q-1} = 100 \cdot \frac{5^5 - 1}{5-1} = 78\,100$, $S_{12} = 130\,000 \cdot \frac{1{,}02^{12} - 1}{1{,}02 - 1} = 1\,743\,572$ Ft.

a) A második fizetést érdemes választania.

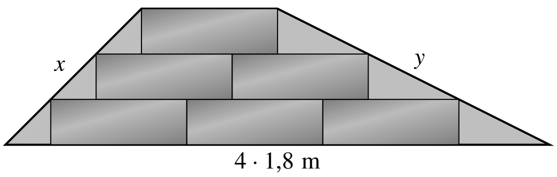
b) Az október havi fizetése *A* esetben $130\,000 + 4 \cdot 7000 = 158\,000$ Ft,
B esetben $130\,000 \cdot 1{,}02^9 = 155\,362$ Ft.



8.1. Az asztal területe: $60 \cdot 40 = 2400\ \text{cm}^2$. A terítő a oldalú négyzet alakú, így a $\sqrt{2}a$ hosszúságú átló 60 cm. $a = \frac{60}{\sqrt{2}} = \frac{60\sqrt{2}}{2} = 30\sqrt{2}$ cm. A négyzet területe $a^2 = (30\sqrt{2})^2 = 1800\ \text{cm}^2$. A terítő lelógó két kis háromszöge négyzetté tehető össze, amelynek átlója $60 - 40 = 20$ cm. A kis négyzet oldala $10\sqrt{2}$, területe $200\ \text{cm}^2$, az asztalon lévő terítő területe pedig $1800 - 200 = 1600\ \text{cm}^2$. A lefedett terület $\frac{1600}{2400} = 66{,}7\%$.



8.2. A tubus területe három alakzatból tevődik össze: 1. A nagy téglalap területe $12 \cdot 5 = 60\ \text{cm}^2$; 2. a trapéz magassága $13{,}5 - 12 = 1{,}5$ cm, területe $\frac{a+c}{2} \cdot m = \frac{5 + 3{,}4}{2} \cdot 1{,}5 = 6{,}3\ \text{cm}^2$; 3. a kis téglalap területe $3{,}4 \cdot (15 - 13{,}5) = 3{,}4 \cdot 1{,}5 = 5{,}1\ \text{cm}^2$. A tubus egyik oldalának területe $60 + 6{,}3 + 5{,}1 = 71{,}4\ \text{cm}^2$, mindkét oldal összterülete $2 \cdot 71{,}4 = 142{,}8\ \text{cm}^2$.

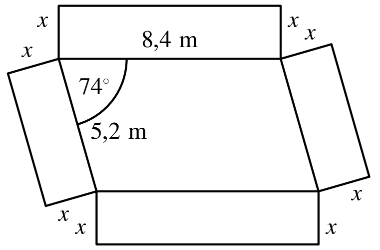


8.3. *a)* A medence alapterülete egy trapéz. A trapéz magassága három gumimatrac szélességével egyenlő, így $3 \cdot 0{,}6 = 1{,}8$ méter. A trapéz hosszabbik alapja $1{,}8 \cdot 4 = 7{,}2$ méter. A terület $\frac{1{,}8 + 7{,}2}{2} \cdot 1{,}8 = 8{,}1\ \text{m}^2$.

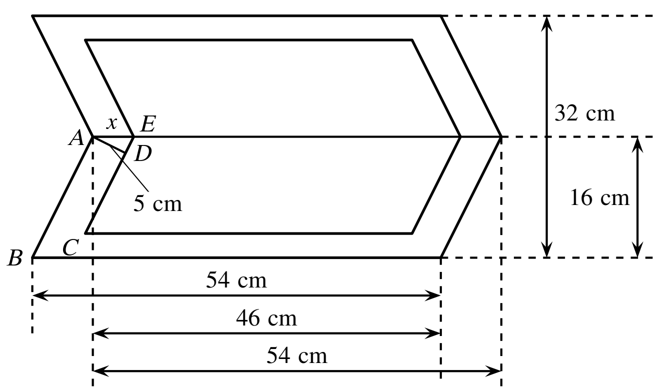
b) A medence kerületének kiszámolásához szükséges a trapéz két szárának kiszámolása.

$x = \sqrt{1{,}8^2 + 1{,}8^2} = 1{,}8 \cdot \sqrt{2}$ méter, $y = \sqrt{2^2 \cdot 1{,}8^2 + 1{,}8^2} = 1{,}8 \cdot \sqrt{5}$ méter.

A kerület $4 \cdot 1{,}8 + \sqrt{5} \cdot 1{,}8 + 1{,}8 + \sqrt{2} \cdot 1{,}8 = 15{,}57$ m.



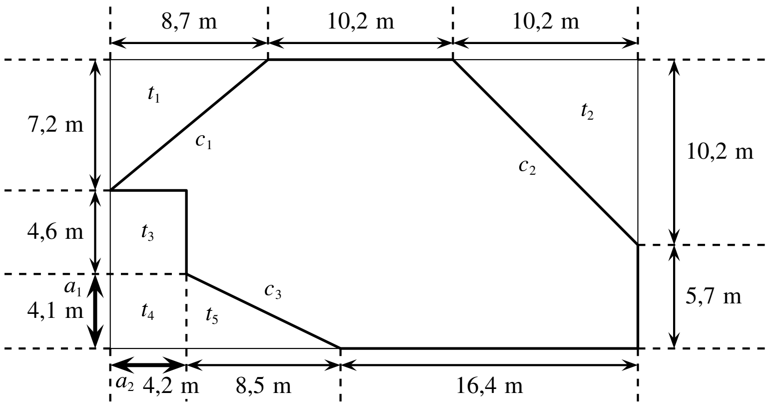
8.4. A paralelogramma területe $8{,}4 \cdot 5{,}2 \cdot \sin 74^\circ = 41{,}99\ \text{cm}^2$, a paralelogramma kerülete $8{,}4 + 5{,}2 + 8{,}4 + 5{,}2 = 27{,}2$ cm. A paralelogramma oldalai melletti téglalapok összterülete $1{,}2 \cdot 41{,}99 = 50{,}39\ \text{cm}^2$. A téglalapok x oldalát az összterületből kaphatjuk meg: $50{,}388 = 27{,}2 \cdot x$, $x = 1{,}8525$ cm. Az alakzat kerülete $27{,}2 + 8 \cdot 1{,}8525 = 42{,}02$ cm. Az alakzat területe: $41{,}99 + 50{,}39 = 92{,}38\ \text{cm}^2$.



8.5. A tábla két egybevágó paralelogrammából tehető össze. Ezen paralelogrammák területe $54 \cdot 16 = 864\ \text{cm}^2$. A féltábla belsejében zölden maradt paralelogramma magassága 5 cm-rel csökkent, 11 cm lett, viszont az alapjának hossza nem kétszer 5 cm-rel csökkent, hanem $2 \cdot x$-szel. Az $ABC\triangle$ hasonló az $ADE\triangle$-gel, mert mind a két háromszög derékszögű, és a megfelelő száraik merőlegesek egymásra, ezek a merőleges szárú szögek egyenlők egymással. A háromszögek egy-egy szöge egyenlő. Az AB oldal $\sqrt{8^2 + 16^2} = 17{,}89$ cm hosszúságú.

A megfelelő oldalak aránya $\frac{x}{5} = \frac{17{,}89}{16}$. Innen $x = 5{,}59$ cm. A zöld paralelogramma területe $11 \cdot (54 - 2x) = 11 \cdot 42{,}88 = 471{,}68\ \text{cm}^2$. A fehérre festett terület $2 \cdot (864 - 471{,}02) = 2 \cdot 392{,}98 = 785{,}96 \approx 786\ \text{cm}^2$.

8.6.



a) Az ábrán vastag nyilakkal jelölt a_1 és a_2 távolságok: $a_1 = (10{,}2 + 5{,}7) - (7{,}2 + 4{,}6) = 4{,}1$ m, $a_2 = (8{,}7 + 10{,}2 + 10{,}2) - (8{,}5 + 16{,}4) = 4{,}2$ m. Először a téglalapról levágott részek összterületét érdemes kiszámolni, és aztán kivonni a téglalap területéből. A téglalap területe $(8{,}7 + 10{,}2 + 10{,}2)(10{,}2 + 5{,}7) = 29{,}1 \cdot 15{,}9 = 462{,}69\ \text{m}^2$. A levágott területek: $t_1 = \frac{8{,}7 \cdot 7{,}2}{2} = 31{,}32\ \text{m}^2$, $t_2 = \frac{10{,}2 \cdot 10{,}2}{2} = 52{,}02\ \text{m}^2$, $t_3 = 4{,}6 \cdot 4{,}2 = 19{,}32\ \text{m}^2$, $t_4 = 4{,}1 \cdot 4{,}2 = 17{,}22\ \text{m}^2$, $t_5 = \frac{8{,}5 \cdot 4{,}1}{2} = 17{,}425\ \text{m}^2$. A levágott részek összterülete $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 31{,}32 + 52{,}02 + 19{,}32 + 17{,}22 + 17{,}425 = 137{,}305\ \text{m}^2$. Az alakzat területe $462{,}69 - 137{,}305 = 325{,}385\ \text{m}^2$.

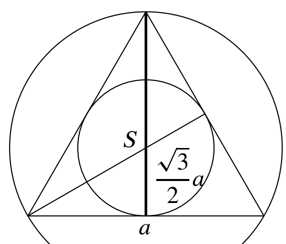
b) Az alakzat kerülete a határoló szakaszok összege, amelyek közül a derékszögű háromszögek átfogóit kell kiszámolni:

$c_1 = \sqrt{8{,}7^2 + 7{,}2^2} = 11{,}29$ m, $c_2 = \sqrt{10{,}2^2 + 10{,}2^2} = 14{,}42$ m, $c_3 = \sqrt{4{,}1^2 + 8{,}5^2} = 9{,}44$ m.

Az alakzat kerülete: $11{,}29 + 10{,}2 + 14{,}42 + 5{,}7 + 16{,}4 + 9{,}44 + 4{,}6 + 4{,}2 = 76{,}25$ m.

9. feladatlap

9.1. *a)* A háromszög területe $T = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 25\sqrt{3} = 43{,}3\ \text{cm}^2$. A félkerület $s = \frac{3a}{2} = 15$ cm. A háromszögbe írható kör sugara $r = \frac{T}{s} = \frac{43{,}3}{15} = 2{,}89$ cm; a köré írható kör sugara $R = \frac{a^3}{4T} = \frac{1000}{4 \cdot 43{,}3} = 5{,}77$ cm. A körgyűrű területe a köré írható és a beleírható kör területének a különbsége: $\pi R^2 - \pi r^2 = 78{,}35\ \text{cm}^2$.



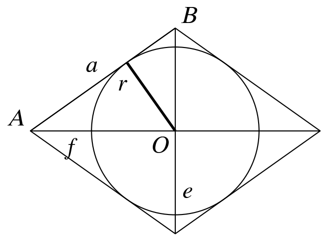
b) A feladat általános megoldása. 1. megoldás: A háromszög területe $T = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, félkerülete

$s = \dfrac{3a}{2}$. A beírható kör sugara $r = \dfrac{T}{s} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{3}{2}a} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a$. A köré írható kör sugara $R = \dfrac{a^3}{4T} =$

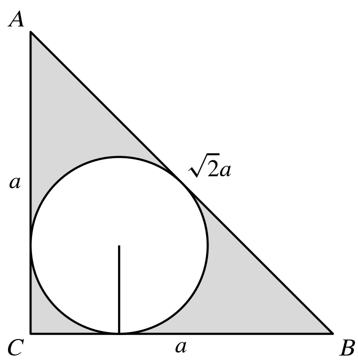
$= \dfrac{a^3}{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$. A köré és beleírható kör területének különbsége $T_R - T_r = \pi R^2 - \pi r^2 =$

$= \pi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 - \pi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2 = \dfrac{\pi}{4}a^2.$

2. megoldás: A szabályos háromszög oldalfelező merőlegese és szögfelezője egybe esik a $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ hosszúságú magasságával, amely egyben a háromszög súlyvonala is. Így a beírható és a köré írható kör középpontja egyaránt a háromszög súlypontja. A beírható kör sugara a súlyvonal oldal és súlypont közé eső szakasza $r = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}a = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a$. A köré írható kör sugara a súlyvonal csúcs és súlypont közé eső szakasza $R = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}a = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$. A köré és bele írható kör területének különbsége $T_R - T_r = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 - \pi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2 = \dfrac{\pi}{4}a^2$.



9.2. A rombusz területe $T_{\text{rombusz}} = \dfrac{e \cdot f}{2} = \dfrac{9{,}6 \cdot 6{,}8}{2} = 32{,}64\ \text{cm}^2$. A rombusz oldala $a = \sqrt{\left(\dfrac{e}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{f}{2}\right)^2} = \sqrt{3{,}4^2 + 4{,}8^2} = 5{,}88$ cm. A beleírható kör sugara a félátlók által kijelölt derékszögű OAB háromszög átfogóhoz tartozó magassága, amelyet megkapjuk, ha a derékszögű háromszög területét kétféle módon írjuk fel: $\dfrac{\frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2}}{2} = \dfrac{r \cdot a}{2}$, $\dfrac{3{,}4 \cdot 4{,}8}{2} = \dfrac{5{,}88 \cdot m}{2}$, $m = r =$ $= 2{,}78$ cm. A rombuszba írható kör területe $T_{\text{kör}} = r^2 \cdot \pi = 24{,}2\ \text{cm}^2$. A két terület különbsége $T_{\text{rombusz}} - T_{\text{kör}} = 32{,}64 - 24{,}2 = 8{,}44\ \text{cm}^2$.



9.3. A háromszög területe $T_{\text{háromszög}} = \dfrac{a \cdot a}{2} = \dfrac{a^2}{2}$.

A háromszög átfogója $\sqrt{2}a$.

A háromszög félkerülete: $s = \dfrac{2a + \sqrt{2}a}{2} = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{2}a$.

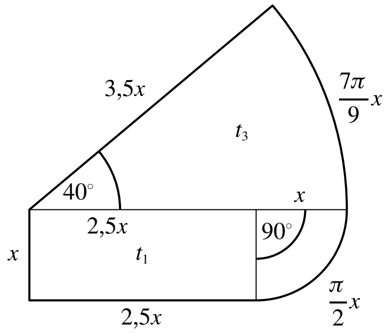
A beírható kör sugara $r = \dfrac{T_{\text{háromszög}}}{s} = \dfrac{\frac{a^2}{2}}{\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)a}{2}} = \dfrac{a}{2+\sqrt{2}}$.

A nevező gyöktelenítése után $r = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{2}a$. A beírható kör területe $T_{\text{kör}} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = \pi\dfrac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{4}a^2 = \pi\dfrac{6 - 2\sqrt{2}}{4}a^2 = \pi\dfrac{3-\sqrt{2}}{2}a^2 \approx 0{,}27a^2$.

A két terület különbsége $T_{\text{háromszög}} - T_{\text{kör}} = \dfrac{a^2}{2} - \pi\dfrac{3-\sqrt{2}}{2}a^2 = \dfrac{1 - \pi\left(3 - \sqrt{2}\right)}{2}a^2 \approx 0{,}23a^2$.

9.4. *a)* Az alapterület három alakzat, egy téglalap és két körcikk területének összegére bontható. A téglalap területe $t_1 = 2{,}5x \cdot x = 2{,}5x^2$. A t_2 körcikk területe az x sugarú kör területének negyede $t_2 = \frac{\pi}{4}x^2$, a körcikk íve $i_2 = \frac{\pi}{2}x$. A t_3 körcikk sugara $3{,}5x$, az ívének hossza $i_3 = \frac{\alpha^\circ \cdot \pi}{180}r = \frac{40^\circ}{180^\circ}\pi \cdot \frac{7}{2}x =$

$= \frac{7\pi}{9}x$, a területe $t_3 = \frac{i \cdot r}{2} = \frac{i_3 \cdot r}{2} = \frac{\frac{7\pi}{9}x \cdot \frac{7}{2}x}{2} = \frac{49\pi}{36}x^2$.

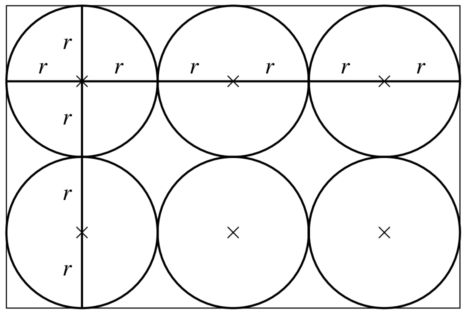


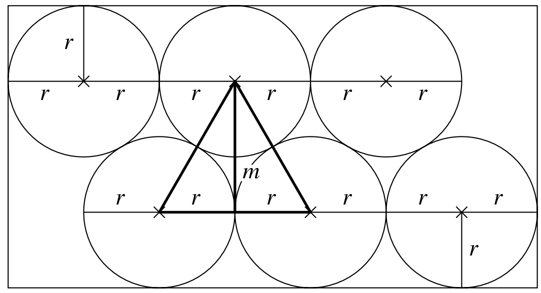
A három terület összege $t_1 + t_2 + t_3 = \frac{5}{2}x^2 + \frac{\pi}{4}x^2 + \frac{49\pi}{36}x^2 = \frac{90 + 58\pi}{36}x^2 = \frac{45 + 29\pi}{18}x^2$.

b) Az épület határolóvonalainak összege

$x + 2{,}5x + \frac{\pi}{2}x + \frac{7\pi}{9}x + 3{,}5x = 7x + \frac{23\pi}{18}x = \frac{126 + 23\pi}{18}x \approx 11{,}01x$.

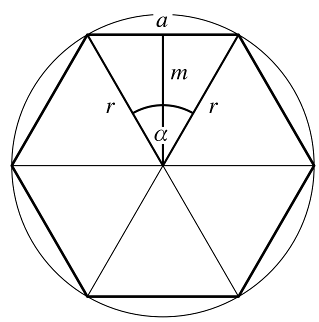
9.5. *a)* A konzerv sugara r. Az első csomagolás alapterülete olyan téglalap, amelynek oldalai $4r$ és $6r$. A terület így $T_1 = 4r \cdot 6r = 24r^2$. A második csomagolásmód téglalapjának egyik





oldala $7r$, a másik oldala $r + m + r = 2r + m$, ahol m a $2r$ oldalhosszú egyenlő oldalú háromszög magassága. $m = \frac{\sqrt{3}}{2}2r = \sqrt{3}r$, így a téglalap másik oldala $2r + \sqrt{3}r = \left(2 + \sqrt{3}\right)r$. A második csomagolásmód területe $T_2 = 7r \cdot \left(2 + \sqrt{3}\right)r = 7\left(2 + \sqrt{3}\right)r^2$. A két csomagolásmód területének különbsége $T_2 - T_1 = 7\left(2 + \sqrt{3}\right)r^2 - 24r^2 = \left(7\sqrt{3} - 10\right)r^2$. A különbséget osszuk el az első csomagolás területével $\frac{T_2 - T_1}{T_1} = \frac{\left(7\sqrt{3} - 10\right)r^2}{24r^2} = \frac{7\sqrt{3} - 10}{24} = 0{,}0885$. Tehát a növekedés 8,85%-os.

9.6. Az n-oldalú szabályos sokszög n darab egybevágó háromszögre bontható. A háromszögek egyenlő szárúak, hiszen száraik a kör r sugara, az alapja a sokszög a oldala. A szárszög nagysága $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$, a háromszög alapja $a = 2 \cdot r \sin\frac{\alpha}{2} = 2 \cdot r \sin\frac{360^\circ}{2n}$, a háromszög magassága $m = r\cos\frac{\alpha}{2} = r \cdot \cos\frac{360^\circ}{2n}$.



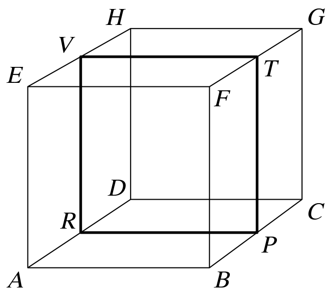
A sokszög kerülete $k = n \cdot 2 \cdot r \sin\frac{360^\circ}{2n}$, a területe $t = n \cdot \frac{a \cdot m}{2} = n \cdot \frac{2 \cdot r \sin\frac{360^\circ}{2n} \cdot r \cdot \cos\frac{360^\circ}{2n}}{2} =$
$= n \cdot r^2 \cdot \sin\frac{360^\circ}{2n} \cdot \cos\frac{360^\circ}{2n}$.

n	$k = n \cdot 2 \cdot r \sin \dfrac{360^\circ}{2n}$	$t = n \cdot r^2 \cdot \sin \dfrac{360^\circ}{2n} \cdot \cos \dfrac{360^\circ}{2n}$
5	58,78 cm	237,76 cm^2
6	60 cm	259,81 cm^2
7	60,74 cm	273,65 cm^2

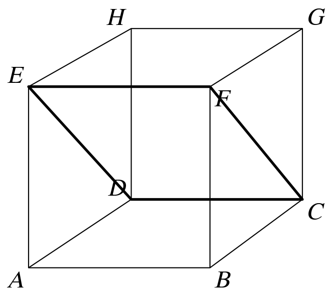
b) A kerületértékek növekednek, az oldalszám növelésével a kör kerületéhez ($2r\pi = 62{,}83$ cm) közelítenek. A területértékek is növekednek, a kör területéhez ($r^2\pi = 314{,}16$ cm^2) közelítenek.

10. feladatlap

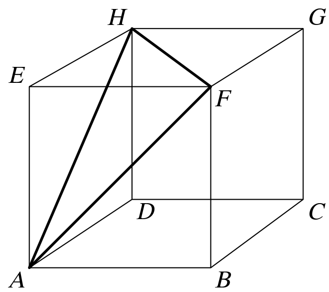
10.1. *a)* Négyzet;



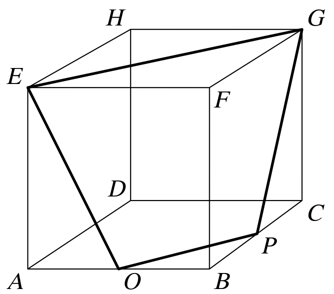
b) téglalap;



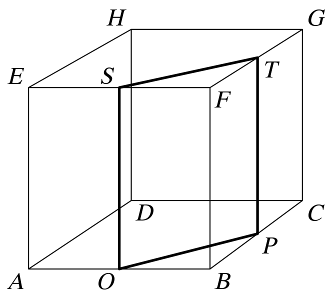
c) szabályos háromszög;



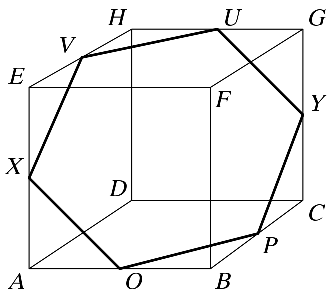
d) trapéz;



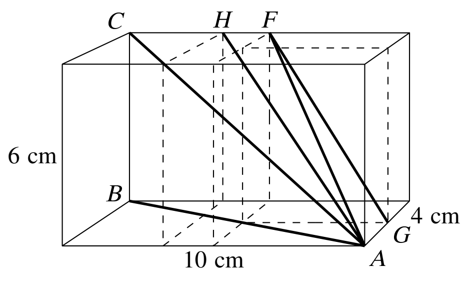
e) téglalap;



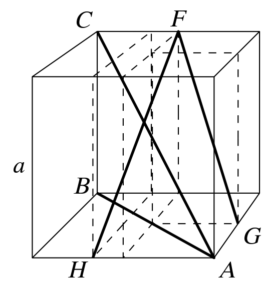
f) szabályos hatszög.



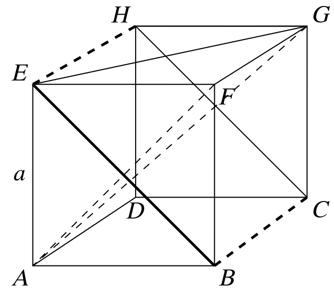
10.2. Az AB szakasz lapátló $AB = \sqrt{4^2 + 10^2} = \sqrt{116} =$ $= 10{,}77$ cm. A többi szakasz felfogható a megfelelő oldalú téglatestek testátlójaként. $AC = \sqrt{4^2 + 6^2 + 10^2} =$ $= \sqrt{152} = 13{,}33$ cm. $AF = \sqrt{4^2 + 6^2 + 5^2} = \sqrt{77} =$ $= 8{,}77$ cm. $AH = \sqrt{4^2 + 6^2 + \left(\dfrac{20}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{868}{9}} = 9{,}82$ cm. $FG = \sqrt{2^2 + 6^2 + 5^2} = \sqrt{65} = 8{,}06$ cm.



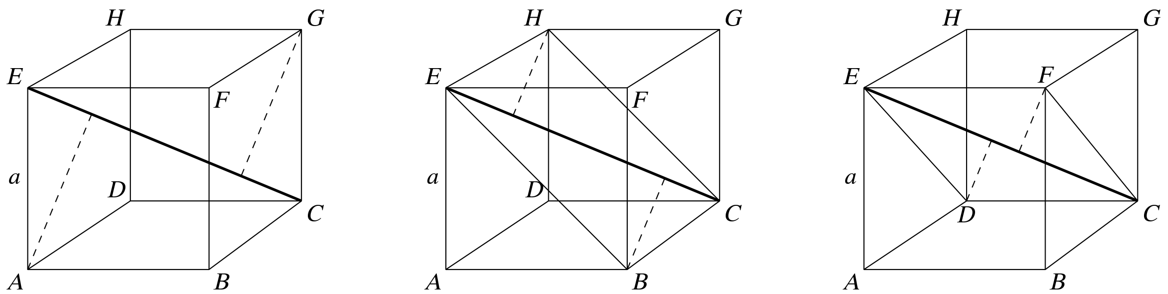
10.3. $AB = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$; $AC = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3}a$; $AF =$ $= \sqrt{\left(\sqrt{2}a\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{2a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{3}{2}a$; $FH = \sqrt{2a^2 + \left(\dfrac{a}{6}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{73}}{6}a$; $FG = \dfrac{\sqrt{6}}{2}a$.



10.4. Az $ABFE$ négyszög négyzet, amelynek átlója a BE egyenes, az AF szakasz is átlója. A négyzet átlói merőlegesen metszik egymást, ezért az A pont és F pont távolsága $d(A; EB) = d(F; EB) = \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm. A CB és a HC oldal merőleges az $ABEF$ oldalra, így annak minden egyenesére, ezért az EB egyenesre is. $d(C; EB) = d(H; EB) = a = 5$ cm. A BGE és DBE egyenlő oldalú háromszög magassága a keresett két távolság. A háromszög oldala a kocka lapátlója $\sqrt{2}a$ hosszúságú. $d(G; EB) = d(D; EB) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2}a = \frac{5\sqrt{6}}{2}$ cm.



10.5. A három ábra alapján látható hogy mind a hat csúcs azonos távolságra van a kocka CE testátlójától, E távolság megegyezik a CEG derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magasságával. A derékszögű háromszög egyik oldala megegyezik a kocka a élével, a másik oldala lapátlójával, a harmadik oldala pedig a kocka $\sqrt{3}a$ testátlójával. E távolságot megkaphatjuk a derékszögű háromszög területének kétféle kiszámolásával $T = \frac{a \cdot \sqrt{2}a}{2} = \frac{\sqrt{3}a \cdot m}{2}$, $m = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a = \frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{5\sqrt{6}}{3}$ cm.

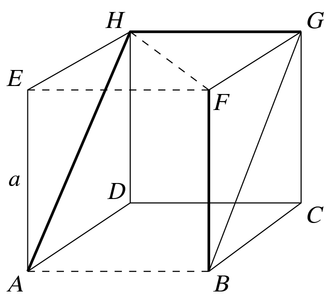


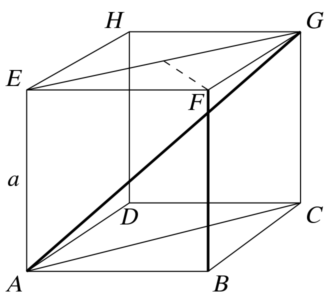
10.6. *a)* Az EF él párhuzamos a HG egyenessel, így HG párhuzamos az EFB síkkal. A sík és az egyenes távolsága az FG él. $d(BF; GH) = a = 10$ cm.

b) A DH él párhuzamos a BF éllel. A távolságuk pont az FH lapátló. $d(BF; DH) = \sqrt{2} \cdot a = 10\sqrt{2}$ cm.

c) Az AH szakasz párhuzamos a BG szakasszal, így a BFG síkkal is. A sík és egyenes távolsága AB él. $d(BF; AH) = a = 10$ cm.

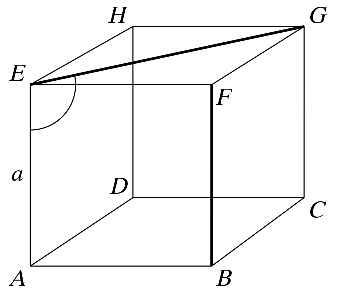
d) A BF szakasszal párhuzamos az AG szakaszt tartalmazó $ACGE$ sík. A sík és BF távolsága fél lapátló. $d(BF; AG) = \frac{\sqrt{2}}{2}a = 5\sqrt{2}$ cm.

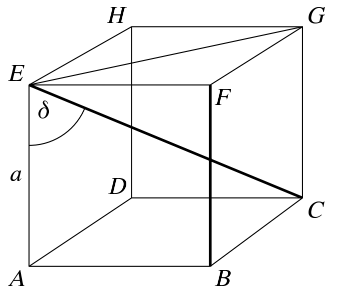


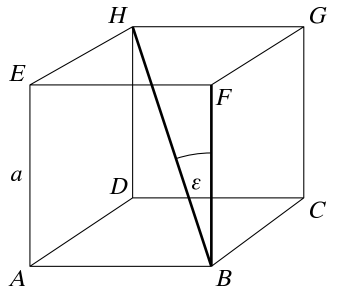


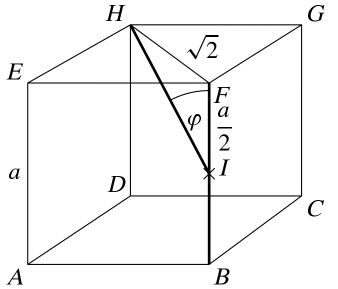
11. feladatlap

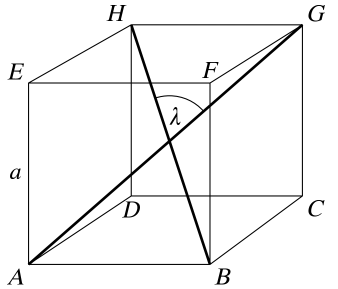
11.1.











a) A BF éllel párhuzamos az AE él. Az $AEG\sphericalangle = 90°$. A keresett szög 90°.

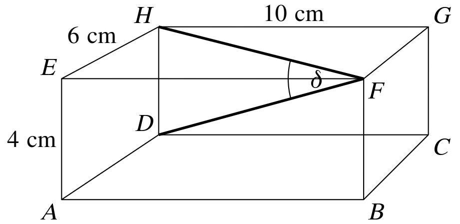
b) A BF éllel párhuzamos az AE él. A $\delta = AEC\sphericalangle$ az EAC derékszögű háromszög hegyesszöge. $\cos\delta = \dfrac{a}{\sqrt{3}a} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. A keresett szög 54,7°.

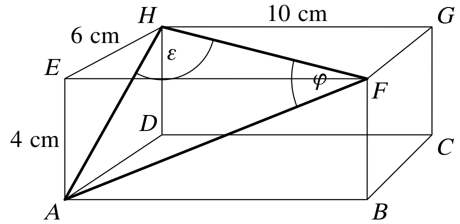
c) A BF él metszi a BH testátlót. Az $\varepsilon = FBH\sphericalangle$ az FBH derékszögű háromszög hegyesszöge. $\cos\varepsilon = \dfrac{a}{\sqrt{3}a} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. A keresett szög 54,7°.

d) A BF él metszi a HI szakaszt. Az $\varphi = HIF\sphericalangle$ a HIF derékszögű háromszög hegyesszöge. $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\sqrt{2}a}{\frac{a}{2}} = 2\sqrt{2}$. A keresett szög 70,5°.

e) A HB testátló O-ban metszi a AG testátlót. Az $\lambda = HOG\sphericalangle$ a HOG egyenlő szárú háromszög csúcsszöge. Koszinusztétellel: $a^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)\cos\lambda$, $a^2 = \dfrac{3}{4}a^2 + \dfrac{3}{4}a^2 - 2\cdot\dfrac{3}{4}a^2\cos\lambda$, $a^2 = \dfrac{3}{2}a^2 - \dfrac{3}{2}a^2\cos\lambda$, $-\dfrac{1}{2} = -\dfrac{3}{2}\cos\lambda$, $\cos\lambda = \dfrac{1}{3}$. A keresett szög 70,5°.

11.2.





a) A HF és a DF egyenes hajlásszöge?

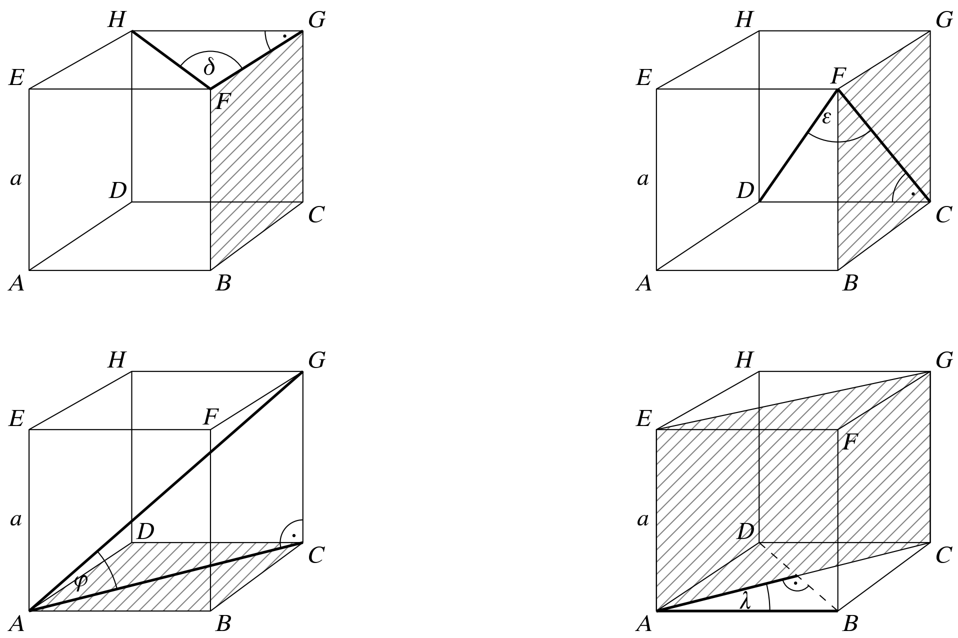
A HF lapátló hossza $HF = \sqrt{HG^2 + EH^2} = \sqrt{10^2 + 6^2} = \sqrt{136}$ cm. A DF testátló hossza $DF = \sqrt{HG^2 + EH^2 + HD^2} = \sqrt{10^2 + 6^2 + 4^2} = \sqrt{152}$. Az FHD derékszögű háromszögben $\cos\delta = \dfrac{\sqrt{136}}{\sqrt{152}}$, $\delta = 18{,}9°$.

b) Az AHF háromszögre alkalmazzuk a koszinusztételt! $HF = \sqrt{HG^2 + EH^2} = \sqrt{10^2 + 6^2} = \sqrt{136}$. $HA = \sqrt{HE^2 + HD^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$. $AF = \sqrt{AE^2 + EF^2} = \sqrt{4^2 + 10^2} = \sqrt{116}$. A koszinusztétel: $AF^2 = HA^2 + HF^2 - 2 \cdot HA \cdot HF \cdot \cos\varepsilon$. $116 = 52 + 136 - 2 \cdot \sqrt{52} \cdot \sqrt{136} \cdot \cos\varepsilon$, $-72 = -2 \cdot \sqrt{52 \cdot 136} \cdot \cos\varepsilon$, $\varepsilon = 64{,}7°$.

c) Az AF lapátló és az FG él derékszöget zár be egymással.

d) Az AFH háromszögre alkalmazzuk a koszinusztételt! A *b)* feladat adataival írjuk fel a koszinusztételt! $HA^2 = AF^2 + HF^2 - 2 \cdot AF \cdot HF \cdot \cos\varphi$. $52 = 116 + 136 - 2 \cdot \sqrt{116} \cdot \sqrt{136} \cdot \cos\varphi$, $-200 = -2 \cdot \sqrt{116 \cdot 136} \cdot \cos\varphi$, $\varphi = 37{,}2°$.

11.3.



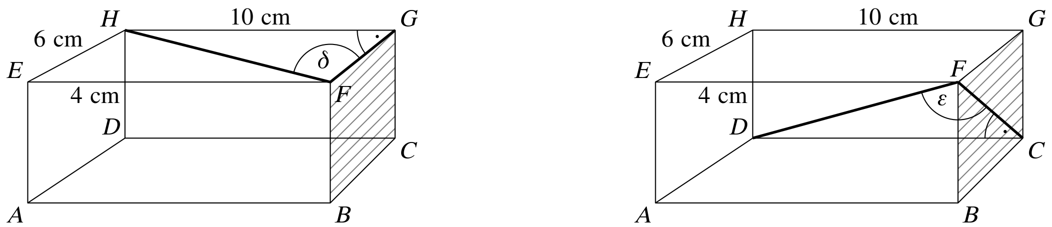
a) A HG él merőleges az adott síkra, így $HFG\sphericalangle = 45°$ a kérdéses hajlásszög.

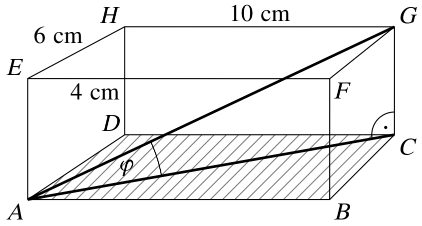
b) A DC él merőleges BCG síkra. A keresett hajlásszög $DFC\sphericalangle$. A DFC derékszögű háromszögre alkalmazzuk a tangens szögfüggvényt! A $DC = a$, mert él, $CF = \sqrt{2}a$, mert a kocka lapátlója. $\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varepsilon = 35{,}3°$.

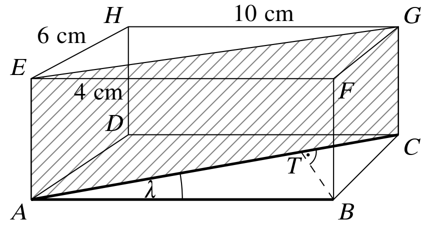
c) A GC él merőleges ABC síkra. A keresett hajlásszög a $GAC\sphericalangle$. A GAC derékszögű háromszögre alkalmazzuk a tangens szögfüggvényt! A $GC = a$, mert él, $AC = \sqrt{2}a$, mert a kocka lapátlója. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi = 35{,}3°$.

d) Az AC lapátló 45°-os szöget szöget zár be az AB éllel. A keresett hajlásszög 45°.

11.4.







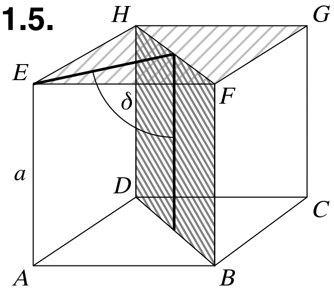
a) A HF szakasz H pontjának a síkra eső merőleges vetülete a G pont. A keresett szög a HFG derékszögű háromszög δ szöge. $\operatorname{tg}\delta = \frac{10}{6}$, $\delta = 59°$.

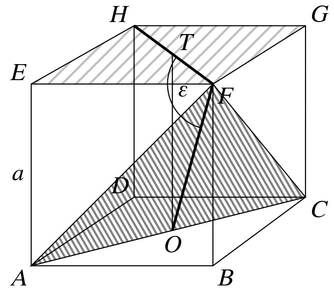
b) A DF szakasz D pontjának a síkra eső merőleges vetülete a C pont. A keresett szög a DFC derékszögű háromszög ε szöge. Az $FC = \sqrt{FG^2 + GC^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$ cm. $\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{10}{\sqrt{52}}$, $\varepsilon = 54{,}2°$.

c) Az AG szakasz G pontjának a síkra eső merőleges vetülete a C pont. A keresett szög a GAC derékszögű háromszög φ szöge. Az $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{10^2 + 6^2} = \sqrt{136}$ cm. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{4}{\sqrt{136}}$, $\varphi = 18{,}9°$.

d) Az AB szakasz B pontjának a síkra eső merőleges vetülete a T pont. A keresett szög megegyezik a BAC derékszögű háromszög λ szögével. $\operatorname{tg}\lambda = \frac{6}{10}$, $\lambda = 31°$.

11.5.

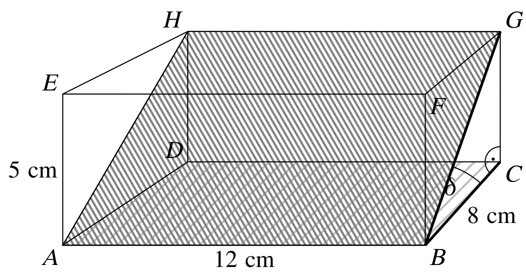


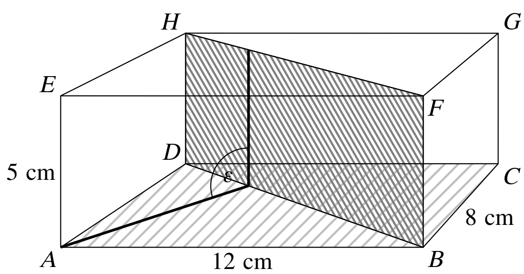


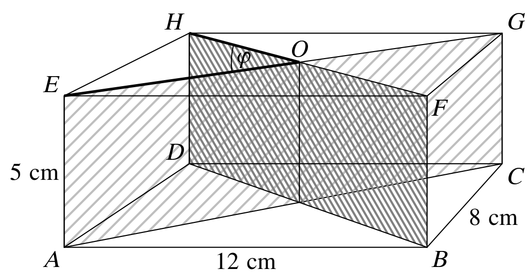
a) A síkok metszésvonalára bocsátott síkbéli merőlegesek hajlásszöge 90°.

b) A $BDHF$ sík szimmetria síkja a kockának, így a keresett szög az OF és a HF szakasz által bezárt szög, amely az OFT derékszögű háromszög ε szöge, hol a T pont az O pont merőleges vetülete az FH-ra! Az $FT = \frac{FH}{2} = \frac{\sqrt{FG^2 + GH^2}}{2} = \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$. $\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{20}{10\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, $\varepsilon = 54{,}7°$.

11.6. *a)* A síkok közös metszésvonalára bocsátott síkbéli merőlegesek a GB és CB szakaszok. A keresett szög a GBC derékszögű háromszög δ szöge. $\operatorname{tg}\delta = \frac{4}{6}$, $\delta = 33{,}7°$.







b) A két sík merőleges egymásra.

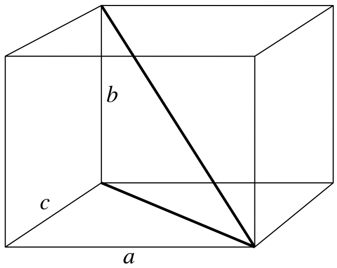
c) A két sík metszésvonalára merőleges síkbéli szakaszoknak, az OH és az OE szakasz hajlásszöge (φ) a keresett szög. $OH = OE = \dfrac{\sqrt{EH^2 + HG^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6^2 + 10^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{136}}{2} = \sqrt{34}$. Az EOH háromszögre írjuk fel a koszinusztételt! $EH^2 = OE^2 + OH^2 - 2 \cdot OE \cdot OH \cdot \cos\varphi$.
$36 = 34 + 34 - 2 \cdot 34 \cdot \cos\varphi$, $-32 = -68 \cdot \cos\varphi$, $\cos\varphi = \dfrac{8}{17}$, $\varphi = 61{,}9°$.

12. feladatlap

12.1. Legyen $a = 5{,}5$, $b = 4{,}2$ és $c = 3{,}8$! *a)* $V = abc = 5{,}5 \cdot 4{,}2 \cdot 3{,}8 = 87{,}78\ \text{m}^3$ a szoba térfogata.

b) $A = 2(ab + ac + bc) = 2(5{,}5 \cdot 4{,}2 + 4{,}2 \cdot 3{,}8 + 5{,}5 \cdot 3{,}8) = 119{,}92\ \text{m}^2$ a szoba belső felülete.

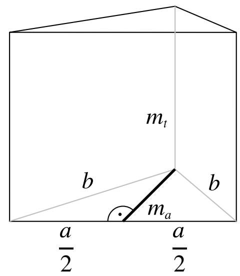
c) A tapéta felülete a szoba oldalfelületeinek és a nyílászárók felületének a különbsége: $2(4{,}2 \cdot 3{,}8 + 5{,}5 \cdot 3{,}8) - 8 = 65{,}72\ \text{m}^2$.



12.2. Az a élű kocka testátlója $\sqrt{3}a$, tehát $\sqrt{3}a = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $a = 2$ cm. A kocka felszíne $A = 6a^2 = 6 \cdot 2^2 = 24\ \text{cm}^2$, a kocka térfogata $V = a^3 = 2^3 = 8\ \text{cm}^3$.

12.3. A négyzetes oszlop négyzet alapú hasáb. Az alap négyzetének lapátlója $\sqrt{2}a = 12$, innen $a = \dfrac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$ cm. A testátló $\sqrt{\left(\sqrt{2}a\right)^2 + b^2} = 13$, $12^2 + b^2 = 13^2$, $b^2 = 13^2 - 12^2 = 25$. $b = 5$ cm.
Az alapterület $T_a = a^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2 = 36 \cdot 2 = 72\ \text{cm}^2$. A térfogat $V = T_a \cdot b = 72 \cdot 5 = 360\ \text{cm}^3$.
A felszín $A = 2T_a + 4ab = 144 + 4 \cdot 6\sqrt{2} \cdot 5 = 144 + 120\sqrt{2} = 313{,}71\ \text{cm}^2$.

12.4. Az egyenlő szárú háromszög magassága $m_a = \sqrt{b^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{8^2 - 3^2} = \sqrt{55}$ cm. Az alaplap területe $T_a = \dfrac{a \cdot m_a}{2} = \dfrac{6\sqrt{55}}{2} = 3\sqrt{55}\ \text{cm}^2$. A térfogat $V = T_a \cdot m_t = 3\sqrt{55} \cdot 5 = 15\sqrt{55} = 111{,}24\ \text{cm}^3$.
A felszín $A = 2T_a + P = 2 \cdot T_a + (a + 2b)m = 6\sqrt{55} + 22 \cdot 5 = 154{,}5\ \text{cm}^2$.



12.5. Legyen $a = 5$ cm, $b = 15$ cm. A téglatest alapja $T_a = ab = 5 \cdot 15 = 75\ \text{cm}^2$. A térfogat $V = T_a \cdot c$, $600 = 75 \cdot c$, $c = 8$ cm. A téglatest felszíne $A = 2T_a + (a + b + a + b)c = 2 \cdot 75 + (5 + 15 + 5 + 15)8 = 470\ \text{cm}^2$.

12.6. Az a élű kocka felszíne $6 \cdot a^2$. 20% növekedés után $(1 + 0{,}2)6a^2$ lett a felszín. Legyen b az új élhossz, ekkor $1{,}2 \cdot 6a^2 = 6b^2$, $1{,}2a^2 = b^2$, $b = \sqrt{1{,}2}a$. Az új és a régi térfogat aránya
$\dfrac{V_{\text{új}}}{V_{\text{régi}}} = \dfrac{b^3}{a^3} = \dfrac{\left(\sqrt{1{,}2}\right)^3 a^3}{a^3} = \left(\sqrt{1{,}2}\right)^3 = 1{,}31$. Tehát 31%-kal nőtt a térfogat.

12.7. Legyen x az arányossági tényező! Ekkor a téglatest oldalai $a = 2x$, $b = 3x$, $c = 4x$.
A régi téglatest térfogata $V_{\text{régi}} = abc = 2x \cdot 3x \cdot 4x = 24x^3$.
A régi téglatest felszíne $A_{\text{régi}} = 2(ab + ac + bc) = 2(2x \cdot 3x + 2x \cdot 4x + 3x \cdot 4x) = 52x^2$.
Az új téglalap oldalai: $d = a \cdot 1{,}5 = 2x \cdot 1{,}5 = 3x$, $e = b \cdot 2 = 3x \cdot 2 = 6x$, $f = c = 4x$.
Az új téglatest térfogata $V_{\text{új}} = def = 3x \cdot 6x \cdot 4x = 72x^3$.

Az új téglatest felszíne $A_{új} = 2(de + df + ef) = 2(3x \cdot 6x + 3x \cdot 4x + 6x \cdot 4x) = 108x^2$.

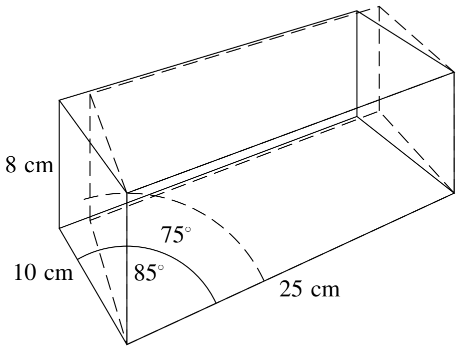
A felszín növekedésének mértéke $\frac{A_{új}}{A_{régi}} = \frac{108x^2}{52x^2} = 2{,}077$, innen a növekedés mértéke 1,077 vagyis 107,7%. A térfogat növekedésének mértéke $\frac{V_{új}}{V_{régi}} = \frac{72x^3}{24x^3} = 3$, innen a növekedés mértéke 2, vagyis 200%.

13. feladatlap

13.1. A medence térfogatával megegyező $V = 20 \cdot 5 \cdot 1{,}6 = 160$ m^3 földet mozgattak meg. A téglatest alakú medencének a felső lapját nem kell kicsempézni, így a kicsempézendő felszín $A = ab + (a + b + a + b)c = 20 \cdot 5 + 50 \cdot 1{,}6 = 180$ m^2 felületet kell kicsempézni.

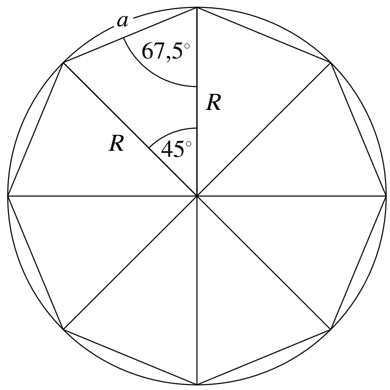
13.2. A tolltartó alaplapjának területe $T_a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 8^2 = 16\sqrt{3}$ cm^2. A tolltartó felszíne $A = 2T_a + (a + a + a)m = 2 \cdot 16\sqrt{3} + 24 \cdot 20 = 535{,}4$ cm^2.
A tolltartó térfogata $V = T_a \cdot m = 16 \cdot \sqrt{3} \cdot 20 = 554{,}3$ cm^3.

13.3. Az doboz alaplapjának eredeti területe $T_{eredeti} = a \cdot b \cdot \sin\gamma = 25 \cdot 10 \cdot \sin 85° = 249$ cm^2. A doboz eredeti térfogata $V_{eredeti} = T_{eredeti} \cdot m = 249 \cdot 8 = 1992$ cm^3. Az új alapterület $T_{új} = a \cdot b \cdot \sin\gamma_{új} = 25 \cdot 10 \cdot \sin 75° = 241{,}5$ cm^2. A doboz új magassága $V_{eredeti} = T_{új} \cdot m_{új}$, $m_{új} = \frac{V_{eredeti}}{T_{új}} = \frac{1992}{241{,}5} = 8{,}25$ cm.



13.4. A hasáb alaplapja szabályos hatoldalú sokszög, ezért hat egybevágó szabályos háromszögre bontható fel. Egy háromszög területe $T_{háromszög} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}10^2 = 25\sqrt{3}$ cm^2. Az alaplap területe $T_a = 6 \cdot T_{háromszög} = 6 \cdot 25\sqrt{3} = 150\sqrt{3}$ cm^2. A hasáb térfogata $V = T_a \cdot m = 150\sqrt{3} \cdot 20 = 3000\sqrt{3} = 5196{,}2$ cm^2. A hasáb felszíne $A = 2T_a + 6a \cdot m = 2 \cdot 150\sqrt{3} + 60 \cdot 20 = 1719{,}6$ cm^2.

13.5. Az alaplap 8 egybevágó egyenlő szárú háromszögre bontható fel. A szárak megegyeznek a köré írható kör sugarával, csúcsszög pedig $\frac{360°}{8} = 45°$. Használjuk a koszinusztételt!



$a^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cdot \cos 45°$,

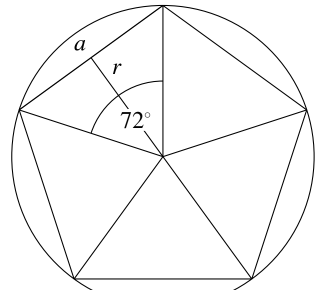
$a^2 = 2R^2 - 2R^2\frac{\sqrt{2}}{2}$, $a^2 = \left(2 - \sqrt{2}\right)R^2$, $a = 1{,}91$ cm.

A háromszög területe

$$T_{háromszög} = \frac{a \cdot R \cdot \sin\frac{180° - 45°}{2}}{2} = \frac{1{,}91 \cdot 2{,}5 \cdot \sin 67{,}5°}{2} = 2{,}21 \text{ cm}^2.$$

$T_a = 8 \cdot T_{háromszög} = 8 \cdot 2{,}21 = 17{,}68$ cm^2. A hasáb térfogata $V = T_a \cdot m_t = 17{,}68 \cdot 8{,}2 = 145$ cm^3. A hasáb felszíne $A = 2 \cdot T_a + 8a \cdot m_t = 2 \cdot 17{,}68 + 8 \cdot 1{,}91 \cdot 8{,}2 = 160{,}7$ cm^2.

13.6. A hasáb szabályos ötszögű alapja öt egyenlő szárú, egybevágó háromszögre bontható fel. Egy háromszög alaphoz tartozó magassága pont a bele írható kör sugara, a csúcsszöge 72°. Az alapél fele $\frac{a}{2} = r \cdot \operatorname{tg} 36° = 5 \cdot 0{,}727 = 3{,}64$, $a = 7{,}27$ cm. A háromszög területe $T_{\text{háromszög}} = \frac{a \cdot r}{2} = \frac{7{,}27 \cdot 5}{2} = 18{,}18$ cm². $T_a = 5 \cdot T_{\text{háromszög}} = 5 \cdot 18{,}18 = 90{,}88$ cm². A hasáb térfogata $V = T_a \cdot m_t = 90{,}88 \cdot 25 = 2272$ cm³. A hasáb felszíne $A = 2 \cdot T_a + 5 \cdot a \cdot m_t = 2 \cdot 90{,}88 + 5 \cdot 7{,}27 \cdot 25 = 1091$ cm².



14. feladatlap

14.1. Helyettesítsük be az adatokat a henger megfelelő összefüggéseibe! A henger térfogata $V = \pi r^2 m = \pi \cdot 10^2 \cdot 5 = 1571$ cm³. A henger felszíne $A = 2\pi r(r+m) = 2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot (10+5) = 300\pi = 942{,}5$ cm².

14.2. A körhenger alapkörének sugara az átmérőjének a fele: $r = \frac{d}{2} = \frac{6}{2} = 3$ cm. A henger térfogata $V = 2{,}3$ dl $= 0{,}23$ l $= 0{,}23$ dm³ $= 230$ cm³. A henger magasságát a térfogatösszefüggésből határozhatjuk meg: $V = \pi r^2 m$, $230 = \pi \cdot 3^2 \cdot m$, $m = \frac{230}{9 \cdot \pi} = 8{,}13$ cm. A henger felszíne $A = 2\pi r(r+m) = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot (3 + 8{,}13) = 66{,}78\pi = 209{,}8$ cm².

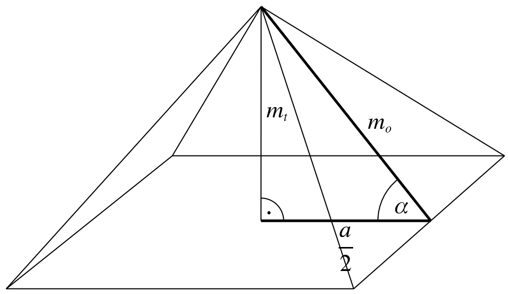
14.3. A henger felszínének összefüggéséből $A = 2\pi r(r+m)$, $314{,}2 = 2\pi r(r+5)$. A $\pi = 3{,}142$ kerekített értékével el lehet osztani mind a két oldalt: $100 = 2r^2 + 10r$, $0 = r^2 + 5r - 50$. Megoldások: $r_1 = -10$ cm, nem lehet hosszúság értéke, $r_2 = 5$ cm az alapkör sugara. Az átmérő $d = 2 \cdot r = 10$ cm.

14.4. Felhasználva a két mérőszám egyenlőségét: $\pi r^2 m = 2\pi r(r+m)$, $rm = 2(r+m)$, $5m = 10 + 2m$, $m = \frac{10}{3} = 3{,}33$ cm.

14.5. A henger sugara a négyzet oldalának fele $r = \frac{a}{2} = 4$ cm, a magassága a négyzet oldala $m = a = 8$ cm. A henger térfogata $V = \pi r^2 m = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 a = \frac{\pi}{4} a^3 = 402{,}1$ cm³. A henger felszíne $A = 2\pi r(r+m) = 2 \cdot \pi \cdot \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{a}{2} + a\right) = \frac{3\pi}{2} a^2 = 301{,}6$ cm².

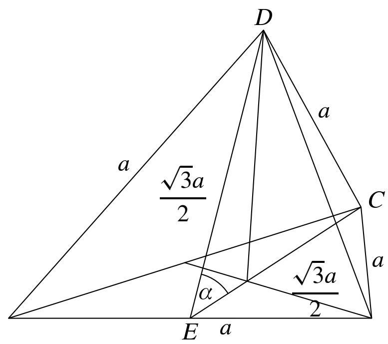
14.6. Az átmérőkből felezéssel készítünk sugarat: A külső henger sugara $R = \frac{1}{2}$ m. A belső henger sugara $r = \frac{0{,}86}{2} = 0{,}43$ m. A betoncső külső henger térfogatából kivonjuk a belső henger térfogatát. $V_{\text{külső}} = \pi R^2 m = \pi \cdot 0{,}5^2 \cdot 6 = 4{,}71$ m³. $V_{\text{belső}} = \pi r^2 m = \pi \cdot 0{,}43^2 \cdot 6 = 3{,}49$ m³. A térfogatok különbsége adja meg a beépített beton térfogatát $V_{\text{külső}} - V_{\text{belső}} = 4{,}71 - 3{,}49 = 1{,}22$ m³.

14.7. A körcikk területe $T_{\text{körcikk}} = \frac{\widehat{\alpha} \cdot r^2}{2} = \frac{\frac{\pi}{10} \cdot 4^2}{2} = \frac{4\pi}{5} = 2{,}51$ cm². A keresett térfogat $V = T_{\text{körcikk}} \cdot m = 2{,}51 \cdot 1{,}5 = 3{,}765$ cm³. A sajt felszíne $A = 2T_{\text{körcikk}} + \left(4 + 4 + 4 \cdot \frac{\pi}{10}\right) \cdot 1{,}5 = 2 \cdot 2{,}51 + 13{,}88 = 18{,}9$ cm².



15.1. *a)* A piramis alaplapjának területe $T_a = a^2 = 229^2 = 52\,441\ \mathrm{m}^2$. A piramis térfogata $V = \frac{T_a \cdot m}{3} = \frac{52\,441 \cdot 145}{3} = 2\,534\,648\ \mathrm{m}^3$. A palást négy egybevágó egyenlő szárú háromszögből áll, amelynek alapja a négyzet oldala, magassága pedig $m_o = \sqrt{m_t^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{145^2 + 114{,}5^2} = 184{,}76$ m. Az oldallap háromszög területe $T_o = \frac{a \cdot m_o}{2} = \frac{229 \cdot 184{,}76}{2} = 21\,155\ \mathrm{m}^2$. A palást területe $P = 4 \cdot T_0 = 84\,620\ \mathrm{m}^2$.

b) Az alaplap és oldallap hajlásszöge $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{m_t}{\frac{a}{2}} = \frac{145}{114{,}5}$, $\alpha = 51{,}7°$.

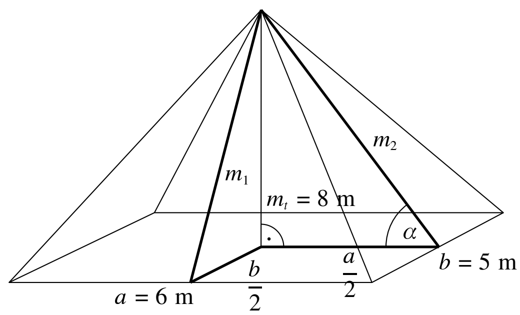


15.2. *a)* A szabályos tetraéder felszíne $A = \sqrt{3}a^2 = 100\sqrt{3} = 173{,}2\ \mathrm{cm}^2$. A szabályos tetraéder térfogata $V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 = \frac{\sqrt{2}}{12}1000 = 117{,}9\ \mathrm{cm}^3$.

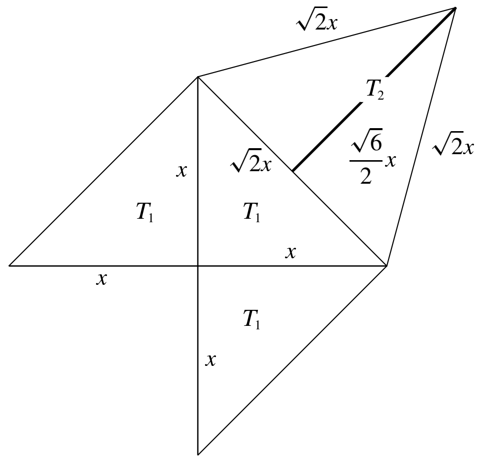
b) A hajlásszög meghatározásához írjuk fel a koszinusztételt a DEC háromszögre. $CD^2 = DE^2 + EC^2 - 2 \cdot DE \cdot EC \cdot \cos\alpha$,

$$10^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}10\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}10\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}10\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}10\right) \cdot \cos\alpha,$$

$100 = 150 - 150 \cdot \cos\alpha$, $-50 = -150 \cdot \cos\alpha$, $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\alpha = 70{,}53°$.



15.3. A tető palástja két-két egybevágó háromszögből áll. A háromszögek magassága $m_1 = \sqrt{8^2 + 2{,}5^2} = 8{,}38$ m. $m_2 = \sqrt{8^2 + 3^2} = 8{,}54$ m. A háromszögek területe $T_1 = \frac{a \cdot m_1}{2} = \frac{6 \cdot 8{,}38}{2} = 25{,}14\ \mathrm{m}^2$, $T_2 = \frac{b \cdot m_2}{2} = \frac{5 \cdot 8{,}54}{2} = 21{,}35\ \mathrm{m}^2$. A tető palástjának összterülete: $P = 2 \cdot T_1 + 2 \cdot T_2 = 92{,}98\ \mathrm{m}^2 = 9298\ \mathrm{dm}^2$. $9298 : 16 = 581{,}125$, tehát 582 darab cserép kell a tetőre.



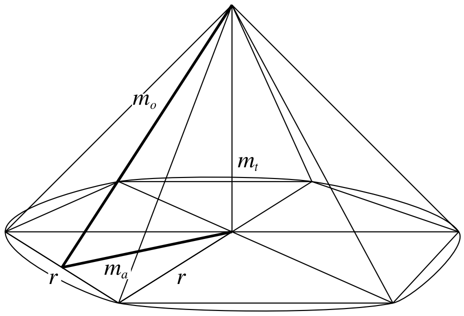
15.4. *a)* A tetraéder alapterülete $T_a = \frac{x^2}{2}$. A tetraéder térfogata $V = \frac{T_a m}{3} = \frac{\frac{x^2}{2}x}{3} = \frac{x^3}{6}$. ($x$ oldalú kocka térfogatának hatoda.). A tetraéder oldalélét kiszámolhatjuk $2{,}3\ \mathrm{dl} = 230\ \mathrm{cm}^3$.

$230 = \frac{x^3}{6}$, $x^3 = 1380$, $x = 11{,}13$ cm.

b) A tetraéder három egybevágó, egyenlő szárú (x) derékszögű háromszögből és egy egyenlő oldalú ($\sqrt{2}x$) háromszögből áll.

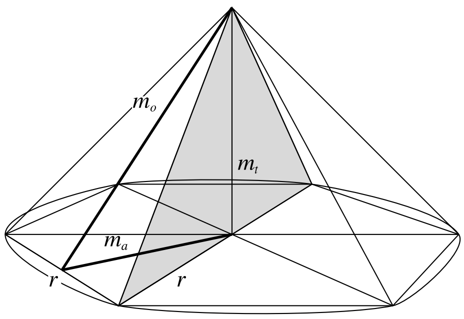
c) A tetraéder felszíne $A = 3 \cdot T_1 + T_2 = 3 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{2}x\right)^2}{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}x^2 = 293{,}1\ \text{cm}^2$.

15.5. A hatszög köré írható kör sugara $R = \frac{D}{2} = 5$ cm. A szabályos hatszög oldala egyenlő a köré írható kör sugarával, így $a = R = 5$ cm. Az alaplap 6 darab egybevágó egyenlő oldalú háromszögből áll. Egy háromszög területe $T_{\text{háromszög}} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 10{,}83\ \text{cm}^2$. A hatszög területe $T_a = 6 \cdot T_{\text{háromszög}} = 65\ \text{cm}^2$. A gúla térfogata $V = \frac{T_a \cdot m_t}{3} = \frac{65 \cdot 30}{3} = 650\ \text{cm}^3$. A gúla palástja hat egybevágó, egyenlő szárú háromszögből áll. Ezen háromszögek alaphoz tartozó magassága $m_o = \sqrt{m_t^2 + m_a^2} = \sqrt{30^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 5\right)^2} = \sqrt{918{,}75} = 30{,}31$ cm. Egy oldallap területe $T_o = \frac{a \cdot m_o}{2} = \frac{5 \cdot 30{,}31}{2} = 75{,}78\ \text{cm}^2$. A gúla felszíne $A = T_a + 6 \cdot T_o = 65 + 6 \cdot 75{,}78 = 519{,}68\ \text{cm}^2$.



15.6. Az így kapott sátor oldaléle 3 m, alapéle 2 m. Az alap köré írható kör sugara szintén 2 m. Tekintsük a sátor ábrán látható síkmetszetét! A metszeten olyan egyenlő szárú háromszög amelynek szára 3 méter, alapja pedig az alaplap körül írható kör átmérője 4 méter.

a) A háromszög magassága, ami egyben a sátor magassága is $m_t = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5} = 2{,}24$ méter.



b) A sátor alapterülete $T_a = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}2^2 = 6\sqrt{3} = 10{,}4\ \text{m}^2$. A sátor térfogata $V = \frac{T_a \cdot m_t}{3} = \frac{10{,}4 \cdot 2{,}24}{3} = 7{,}77\ \text{m}^3$. *c)* A hat darab sátorlapot kell vízhatlanítani. Egy lap magassága $m_o = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8} = 2{,}83$ méter. Egy lap területe $T_o = \frac{a \cdot m_o}{2} = \frac{2 \cdot 2{,}83}{2} = 2{,}83\ \text{m}^2$. A viasszal bevonandó felület hatszor egy lap területe $P = 6 \cdot T_o = 16{,}97\ \text{m}^2$.

16. feladatlap

16.1. A kúp alkotója $a = \sqrt{r^2 + m^2} = \sqrt{0{,}5^2 + 1{,}2^2} = 1{,}3$ m. A kúp felszíne $A = \pi r(r + a) = \pi \cdot 0{,}5 \cdot (0{,}5 + 1{,}3) = 2{,}83\ \text{m}^2$. A kúp térfogata $V = \frac{\pi r^2 m}{3} = \frac{\pi \cdot 0{,}5^2 \cdot 1{,}2}{3} = 0{,}314\ \text{m}^3$.

16.2. Az 1 liter = 1 dm^3 = 1000 cm^3. A térfogat összefüggésébe helyettesítsük be a térfogat és magasság értékét, és kifejezhetjük az alapkör sugarát! $V = \frac{\pi r^2 m}{3}$, $1000 = \frac{\pi r^2 \cdot 10}{3}$, $r = 9{,}77$ cm.

A kúp alkotója $a = \sqrt{r^2 + m^2} = \sqrt{9{,}77^2 + 10^2} = 13{,}98$ cm. A kúp felszíne $A = \pi r(r + a) =$ $= \pi \cdot 9{,}77 \cdot (9{,}77 + 13{,}98) = 728{,}97\ \text{cm}^2$.

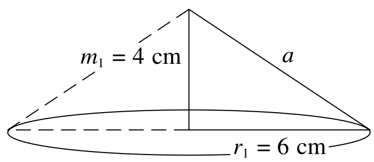
16.3. Használjuk a kúp felszínére vonatkozó összefüggést! $A = \pi r(r + a)$, $150 = \pi r(r + 6)$, $47{,}75 = r(r+6)$, $0 = r^2 + 6r - 47{,}75$, megoldások közül $r_1 = -10{,}53$ nem megoldás, $r_2 = 4{,}53$ cm az alapkör sugara. $m_t = \sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{6^2 - 4{,}53^2} = 3{,}93$ cm. A kúp térfogata $V = \dfrac{\pi r^2 m_t}{3} =$ $= \dfrac{\pi \cdot 4{,}53^2 \cdot 3{,}93}{3} = 84{,}45\ \text{cm}^3$.

16.4. A fedőkör sugara az átmérő fele $r = \dfrac{d}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$ cm. A pohár magassága $m = \sqrt{a^2 - r^2} =$ $= \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7} = 2{,}65$ cm. A térfogat $V = \dfrac{\pi r^2 m_t}{3} = \dfrac{\pi \cdot 3^2 \cdot 2{,}65}{3} = 24{,}93\ \text{cm}^3$.

16.5. A félkör ívének hossza lesz az alapkör kerülete $\pi \cdot 30 = 2\pi \cdot r$, $r = 15$ cm az alapkör sugara. Az alkotó megegyezik a félkör sugarával, így a magasság $m = \sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{30^2 - 15^2} =$ $= 15\sqrt{3} = 25{,}98$ cm. Az alapkör területe $r^2\pi = 15^2 \cdot \pi = 706{,}86\ \text{cm}^2$.

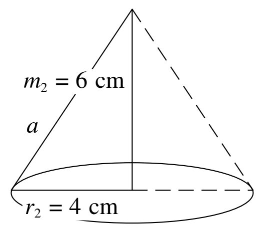
16.6. A feltétel alapján $m = \dfrac{r}{2}$. Az alkotó $a = \sqrt{m^2 + r^2} = \sqrt{\left(\dfrac{r}{2}\right)^2 + r^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}r$. A kúp felszíne $A = \pi r(r + a) = \pi r\left(r + \dfrac{\sqrt{5}}{2}r\right) = \pi r^2\left(1 + \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$. A kúp térfogata $V = \dfrac{\pi r^2 m}{3} = \dfrac{\pi r^2 \frac{r}{2}}{3} = \dfrac{\pi r^3}{6}$.

16.7. Az első kúp alapkörének sugara $r_1 = 6$ cm, magassága $m_1 = 4$ cm, alkotója $a = \sqrt{r_1^2 + m_1^2} = 7{,}21$ cm. Az első kúp térfogata $V_1 = \dfrac{\pi r_1^2 m_1}{3} = \dfrac{\pi \cdot 6^2 \cdot 4}{3} = 150{,}8\ \text{cm}^3$. A palást területe



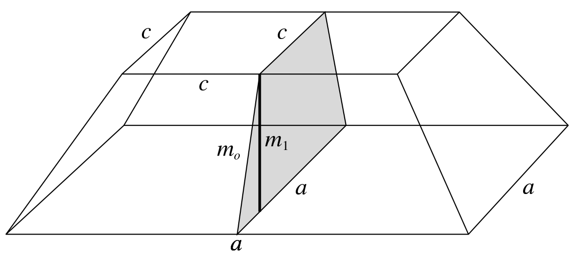
$P_1 = \dfrac{a \cdot i}{2} = \dfrac{a \cdot 2\pi r}{2} = a_1 \pi r_1 = 7{,}21 \cdot \pi \cdot 6 = 135{,}9\ \text{cm}^2$. A második kúp alapkörének sugara $r_2 = 4$ cm, magassága $m_2 = 6$ cm, alkotója $a = \sqrt{r_2^2 + m_2^2} = 7{,}21$ cm.

A második kúp térfogata $V_2 = \dfrac{\pi r_2^2 m_2}{3} = \dfrac{\pi \cdot 4^2 \cdot 6}{3} = 100{,}5\ \text{cm}^3$.
A palást területe $P_2 = a_2 \pi r_2 = 7{,}21 \cdot \pi \cdot 4 = 90{,}6\ \text{cm}^2$. A két térfogat különbsége $V_1 - V_2 = 150{,}8 - 100{,}5 = 50{,}3\ \text{cm}^3$. A két palást területének különbsége $P_1 - P_2 = 135{,}9 - 90{,}6 = 45{,}3\ \text{cm}^2$.



17. feladatlap

17.1. A csonkagúla alaplapjának területe $T_a =$ $= a^2 = 100\ \text{cm}^2$. A fedőlapjának a területe $T_f =$ $= c^2 = 36\ \text{cm}^2$. A csonkagúla magassága megegyezik a fedőlap és alaplap távolságával, így 3 cm. Az oldallap trapéz, amelynek magassága $m_o = \sqrt{\left(\dfrac{a - c}{2}\right)^2 + m_t^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} =$ $= 3{,}61$ cm. Az oldallap területe $T_o = \dfrac{a + c}{2} m_o = 28{,}9\ \text{cm}^2$.



A csonkagúla térfogata $V = \frac{m_t}{3}\left(T_a + \sqrt{T_a \cdot T_f} + T_f\right) = \frac{3}{3}\left(100 + \sqrt{100 \cdot 36} + 36\right) = 196\ \text{cm}^3$.
A csonkagúla felszíne $A = T_a + T_f + P = T_a + T_f + 4T_o = 100 + 36 + 4 \cdot 28{,}9 = 251{,}6\ \text{cm}^2$.

17.2. A csonkagúla alaplapjának területe $T_a = a^2 = 900\ \text{cm}^2$. A fedőlapjának a területe $T_f = c^2 = 225\ \text{cm}^2$.

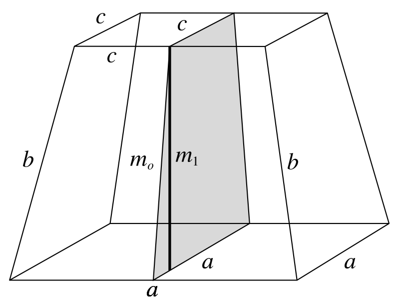
A csonkagúla térfogata $V = \frac{m_t}{3}\left(T_a+\sqrt{T_a \cdot T_f}+T_f\right) = \frac{20}{3}\left(900+\sqrt{900 \cdot 225}+225\right) = 10\,500\ \text{cm}^3 = 0{,}0105\ \text{m}^3$.

5 m^3 betonból $\frac{5}{0{,}0105} = 476{,}2 \approx 476$ db betontuskó önthető ki.

17.3. A sütemény alaplapjának területe $T_a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}36 = 9\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. A leharapott gúla alaplapjának területe a maradék csonkagúla fedőlapjának területe. A két kúp magasságának aránya 1 : 3, a területek aránya 1 : 9. A fedőlap területe $T_f = \frac{T_a}{9} = \sqrt{3}\ \text{cm}^2$. A csonkagúla magassága 6 cm. A csonkagúla térfogata $V = \frac{m_t}{3}\left(T_a+\sqrt{T_a \cdot T_f}+T_f\right) = \frac{6}{3}\left(9\sqrt{3}+\sqrt{9\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}+\sqrt{3}\right) = 26\sqrt{3} = 45\ \text{cm}^3$.

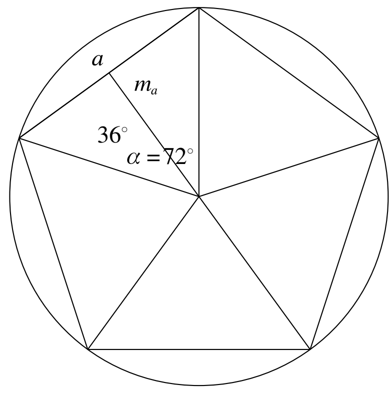
17.4. *a)* Az oldallap magassága $m_o = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = \sqrt{12^2 - \left(\frac{15-10}{2}\right)^2} = 11{,}74$ cm.

b) Az oldallap területe $T_o = \frac{a+c}{2}m_o = \frac{15+10}{2} \cdot 11{,}74 = 146{,}75\ \text{cm}^2$. Az alaplap területe $T_a = a^2 = 225\ \text{cm}^2$. A fedőlap területe $T_f = c^2 = 100\ \text{cm}^2$.
A csonkagúla felszíne $A = T_a + T_f + P = T_a + T_f + 4T_o = 225 + 100 + 4 \cdot 146{,}75 = 912\ \text{cm}^2$. *c)* Az csonkagúla magassága $m_t = \sqrt{m_o^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = \sqrt{11{,}74^2 - 2{,}5^2} = 11{,}47$ cm.



d) A csonkagúla térfogata $V = \frac{m_t}{3}\left(T_a+\sqrt{T_a \cdot T_f}+T_f\right) = \frac{11{,}47}{3}\left(225 + \sqrt{225 \cdot 100} + 100\right) = 1816{,}1\ \text{cm}^3$.

17.5. Az alaplapi szabályos ötszög öt egybevágó egyenlő szárú háromszögre bontható.



Egy háromszög magassága $m_a = \frac{\frac{a}{2}}{\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}} = \frac{3}{\text{tg}\,36^\circ} = 4{,}13$ cm. Egy háromszög területe $T_{\text{háromszög}} = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{6 \cdot 4{,}13}{2} = 12{,}39\ \text{cm}^2$.
Az alaplap területe $T_a = 5 \cdot T_{\text{háromszög}} = 61{,}95\ \text{cm}^2$. A fedőlap szabályos ötszög szintén öt egybevágó egyenlő szárú háromszögre bontható.

Egy háromszög magassága $m_c = \frac{\frac{c}{2}}{\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{\text{tg}\,36^\circ} = 2{,}75$ cm. Egy háromszög területe $T_{\text{háromszög2}} = \frac{c \cdot m_c}{2} = \frac{4 \cdot 2{,}75}{2} = 5{,}5\ \text{cm}^2$. A fedőlap területe $T_f = 5 \cdot T_{\text{háromszög2}} = 27{,}5\ \text{cm}^2$.

A váza térfogata $V = \frac{m_t}{3}\left(T_a + \sqrt{T_a \cdot T_f} + T_f\right) = \frac{20}{3}\left(61{,}95 + \sqrt{61{,}95 \cdot 27{,}5} + 27{,}5\right) = 871{,}5 \text{ cm}^3$.
A vázába 0,87 liter víz fér.

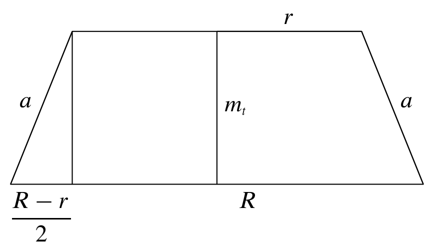
17.6. A legfelső csonkagúla alaplapjának területe $T_a = a^2 = 25 \text{ cm}^2$. A fedőlapjának a területe $T_f = c^2 = 16 \text{ cm}^2$. Az oldallap trapéz, amelynek magassága $m_o = \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + m_t^2} = \sqrt{0{,}5^2 + 2^2} = \sqrt{4{,}25} = 2{,}06$ cm. Az oldallap területe $T_o = \frac{a+c}{2}m_o = \frac{5+4}{2} \cdot 2{,}06 = 9{,}27 \text{ cm}^2$. A csonkagúla térfogata $V = \frac{m_t}{3}\left(T_a + \sqrt{T_a \cdot T_f} + T_f\right) = \frac{2{,}06}{3}\left(25 + \sqrt{25 \cdot 16} + 16\right) = 41{,}9 \text{ cm}^3$. A csonkagúla felszíne $A = T_a + T_f + P = T_a + T_f + 4T_o = 25 + 16 + 4 \cdot 9{,}27 = 78{,}1 \text{ cm}^2$.

a) Hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság köbe. Így az n. csonkagúla térfogata $V_n = V_1 \cdot \left[(1{,}35)^3\right]^{n-1} = 41{,}9 \cdot 2{,}46^{n-1}$ mértani sorozat n. tagjaként kapható meg. Az első 10 tag összege $S_{10} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 41{,}9 \cdot \frac{2{,}46^{10} - 1}{2{,}46 - 1} = 232\,894 \text{ cm}^3$.

b) Hasonló testek felszínének aránya a hasonlóság négyzete. Így az n. csonkagúla felszíne $A_n = A_1 \cdot \left[(1{,}35)^2\right]^{n-1} 78{,}1 \cdot 1{,}82^{n-1}$ mértani sorozat n. tagjaként kapható meg. Az első 10 tag összege $S_{10} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 78{,}1 \cdot \frac{1{,}82^{10} - 1}{1{,}82 - 1} 37\,884 \text{ cm}^2 \approx 17{,}7 \text{ m}^2$.

18. feladatlap

18.1. A csonkakúp alapkörének sugara $R = \frac{D}{2} = \frac{18{,}52}{2} = 9{,}26$ cm, fedőkörének sugara $r = \frac{d}{2} = \frac{12{,}78}{2} = 6{,}39$ cm.



A csonkakúp térfogata

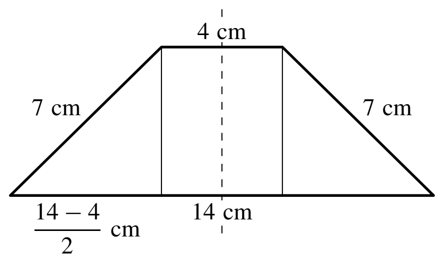
$$V = \frac{m\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2) = \frac{6{,}74 \cdot \pi}{3}(9{,}26^2 + 9{,}26 \cdot 6{,}39 + 6{,}39^2) = 1311{,}1 \text{ cm}^3.$$

A csonkakúp alkotója $a = \sqrt{\left(\frac{R-r}{2}\right)^2 + m_t^2} = \sqrt{\left(\frac{9{,}26 - 6{,}39}{2}\right)^2 + 6{,}74^2} = 6{,}89$ cm.

Felszíne $A = \pi\left[R^2 + r^2 + (R + r)a\right] = \pi\left[9{,}26^2 + 6{,}39^2 + (9{,}26 + 6{,}39) \cdot 6{,}89\right] = 736{,}4 \text{ cm}^2$.

18.2. A csonkakúp alakú tál térfogata $V = \frac{m\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2) = \frac{m\pi}{3}(10^2 + 10 \cdot 13 + 13^2) = \frac{m\pi}{3} \cdot 399 = 133m\pi$, ahol m a tál magassága. A henger alakú tál térfogata $V_{\text{henger}} = \pi r_h^2 m$, ahol r_h a henger alapkörének sugara, m a magassága. A két térfogat egyenlőségéből $133m\pi = \pi r_h^2 m$, $r_h^2 = 133$. A henger sugara $r_h = 11{,}53$ cm.

18.3. A kapott csonkakúp alapkörének sugara $R = \frac{14}{2} = 7$ cm, fedőkörének sugara $r = \frac{4}{2} = 2$ cm, alkotója $a = 7$ cm, magassága $m_t = \sqrt{7^2 - \left(\frac{14-4}{2}\right)^2} = \sqrt{24} = 4{,}9$ cm.



A csonkakúp térfogata $V = \frac{m\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2) = \frac{4{,}9 \cdot \pi}{3}(7^2 + 7 \cdot 2 + 2^2) = 343{,}8\ \text{cm}^3$, a csonkakúp felszíne $A = \pi\left[R^2 + r^2 + (R + r)a\right] = \pi\left[7^2 + 2^2 + (7 + 2) \cdot 7\right] = 364{,}4\ \text{cm}^2$.

18.4. Az alapkör sugara $r = \frac{10}{2} = 5$ cm. A kúp térfogata $V = \frac{\pi r^2 m_t}{3} = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 8}{3} = 209{,}44\ \text{cm}^3$. A levágott kúp térfogata az eredeti kúp 100%–82%=18%, $V_1 = V \cdot 0{,}18 = 37{,}7\ \text{cm}^3$. A magasság és az alapkör sugara közötti összefüggés a nagy háromszög és a kis háromszög hasonlóságából következik $\frac{m_1}{8} = \frac{r_1}{5}$, $r_1 = 0{,}625 m_1$. $V_1 = \frac{\pi \cdot r_1^2 \cdot m_1}{3} = \frac{\pi \cdot (0{,}625 m_1)^2 \cdot m_1}{3} = 37{,}7\ \text{cm}^3$, $m_1^3 = 92{,}2$, $m_1 = 4{,}52$ cm, tehát 4,52 cm magasságú kúpot kell levágni.

18.5. A térfogat összefüggéséből határozhatjuk meg a fedőkör sugarát. $V = \frac{m\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2) = \frac{44 \cdot \pi}{3}(6{,}5^2 + 6{,}5 \cdot r + r^2) = 5000$, $r^2 + 6{,}5r - 66{,}26 = 0$. A fedőkör sugara $r = 5{,}5$ cm.

18.6. A két sugár közötti összefüggés $R = r + 4$. A térfogat összefüggésébe helyettesítsük be a két sugarat! $V = \frac{m\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2) = \frac{5 \cdot \pi}{3}\left((r + 4)^2 + (r + 4) \cdot r + r^2\right) = 450$, $3r^2 + 12r - 69{,}94 = 0$. Az $r_1 = -7{,}22$ cm nem megoldás. A fedőkör sugara $r = 3{,}22$ cm, az alapkör sugara $R = 3{,}22 + 4 = 7{,}22$ cm.

19. feladatlap

19.1. A Föld térfogata $V = \frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{4\pi}{3}6371^3 = 1{,}083 \cdot 10^{12}\ \text{km}^3$. A Föld felszíne $A = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 6371^2 = 5{,}1 \cdot 10^8\ \text{km}^2$.

19.2. A túrógombóc alapanyagának térfogata a henger alakú tál térfogatával egyezik meg. A henger sugara $r = \frac{20}{2} = 10$ cm. A tál térfogata $V_{tál} = \pi r^2 m = \pi \cdot 10^2 \cdot 10 = 3141{,}6\ \text{cm}^3$. Egy gombóc térfogata $V_g = \frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{4\pi}{3}2^3 = 33{,}51\ \text{cm}^3$. $\frac{3141{,}6}{33{,}51} = 93{,}75 \approx 93$ db túrógombóc készíthető.

19.3. A gömb térfogata 10 liter = 10 dm^3. A térfogatból kifejezhető a gömb sugara $V = \frac{4\pi}{3}R^3$, $R^3 = \frac{3 \cdot V}{4\pi} = 2{,}387$, $R = 1{,}337$ dm. A gömb felszíne $A = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 1{,}337^2 = 22{,}46\ \text{dm}^2$.

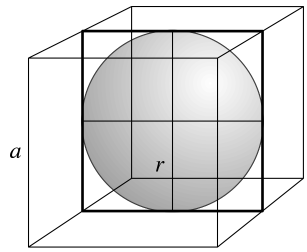
19.4. A félgömb felszíne a gömb felszínének feléből és egy R sugarú kör területéből áll, $A = \frac{4\pi R^2}{2} + \pi R^2 = 3\pi R^2$; $1 = 3\pi R^2$. A felszínből kifejezhető a gömb sugara, $R^2 = \frac{A}{3\pi} = 0{,}1061$, $R = 0{,}326$ m. A félgömb térfogata a gömb térfogatának a fele $V = \frac{4\pi R^3}{3}2 = \frac{2\pi \cdot 0{,}326^3}{3} = 0{,}0726\ \text{m}^3$. A félgömb térfogata 72,6 dm^3.

19.5. Az első vízcsepp térfogata $V_1 = \frac{4\pi r_1^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 2{,}3^3}{3} = 50{,}97\ \text{cm}^3$. A második vízcsepp térfogata $V_2 = \frac{4\pi r_2^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 3{,}1^3}{3} = 124{,}79\ \text{cm}^3$. Az egyesüléssel kapott csepp térfogata $V_3 =$

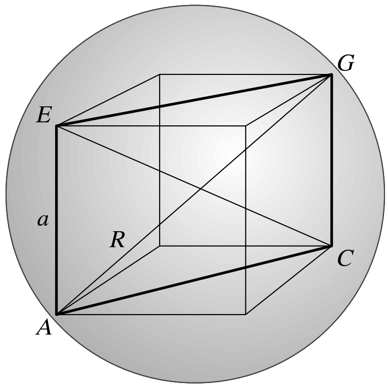
$= V_1 + V_2 = 175{,}76$ cm^3. Az új gömb sugara $r_3 = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V_3}{4\pi}} = 3{,}475$ cm. *b)* A felszínváltozás $A_1 + A_2 - A_3 = 4\pi r_1^2 + 4\pi r_2^2 - 4\pi r_3^2 = 4\pi(r_1^2 + r_2^2 - r_3^2) = 35{,}49$ cm^2.

19.6. *a)* A gömb külső sugara $R = \frac{D}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ m. A belső gömb átmérője $d = D - 2 \cdot 0{,}005 = 2{,}99$ m, így sugara $r = \frac{d}{2} = \frac{2{,}99}{2} = 1{,}495$ m. A tartály belső térfogata $V_b = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 1{,}495^3}{3} = 14$ m^3. A tartályban lévő víz mennyisége $\left(1 - \frac{5\%}{100\%}\right) \cdot V_b \cdot \varrho = 0{,}95 \cdot 14 \cdot 1000 = 13\,300$ kg. A víz tömege 13,3 tonna. *b)* A tartály külső térfogata $V_k = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 1{,}5^3}{3} = 14{,}137$ m^3. A tartály falának térfogata $V_k - V_b = 14{,}137 - 14 = 0{,}137$ m^3. A tartály falának tömege térfogatának és sűrűségének a szorzata, $0{,}137 \cdot 2800 = 383{,}6$ kg.

20. feladatlap



20.1. A kocka felszíne $A = 6a^2$, $181{,}5 = 6a^2$, $30{,}25 = a^2$, $a = 5{,}5$ cm a kocka éle. A kockába írható gömb a kockát a lapjainak középpontjában érinti, így a sugara a kocka élének fele $r = \frac{a}{2} = \frac{5{,}5}{2} = 2{,}75$ cm. A beírható gömb térfogata $V_b = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 2{,}75^3}{3} = 87{,}11$ cm^3. A beírható gömb felszíne $A_b = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 2{,}75^2 = 95{,}03$ cm^2. A köré írható gömböt a kocka a csúcsaiban érinti, így sugara a kocka testátlójának a fele $R = \frac{\sqrt{3}}{2}a = 4{,}76$ cm. A köré írható gömb térfogata $V_k = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 4{,}76^3}{3} = 451{,}76$ cm^3. A köré írható gömb felszíne $A_b = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 4{,}76^2 = 284{,}72$ cm^2.



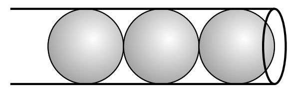
a) A két térfogat különbsége $V_k - V_b = 451{,}76 - 87{,}11 = 364{,}65$ cm^3.

b) A két felszín különbsége $A_k - A_b = 284{,}72 - 95{,}03 = 189{,}69$ cm^2.

20.2. Az érintőnégyszög szemközti oldalainak összege egyenlő. A két egyenlő szár összege $5 + 9 = 14$ cm, így egy szár 7 cm. A trapéz magassága $m = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = \sqrt{7^2 - 2^2} = \sqrt{45} = 6{,}71$ cm. A csonkakúp alapkörének sugara $R = \frac{a}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5$ cm, fedőkörének sugara $r = \frac{c}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$ cm, magassága 6,71 cm, alkotója 7 cm. A csonkakúp térfogata $V_{cs} = \frac{m\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2) = \frac{6{,}71 \cdot \pi}{3}(4{,}5^2 + 4{,}5 \cdot 2{,}5 + 2{,}5^2) = 265{,}26$ cm^3, a csonkakúp felszíne $A_{cs} = \pi[R^2 + r^2 + (R + r)a] = \pi[4{,}5^2 + 2{,}5^2 + (4{,}5 + 2{,}5) \cdot 7] = 237{,}19$ cm^2. A beírható gömb sugara a trapéz magasságának fele $\varrho = \frac{m}{2} = \frac{6{,}71}{2} = 3{,}355$ cm. $V_g = \frac{4\pi\varrho^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 3{,}355^3}{3} = 158{,}19$ cm^3. A felszíne: $A_g = 4\pi\varrho^2 = 4\pi \cdot 3{,}355^2 = 141{,}45$ cm^2.

a) A térfogatok különbsége $V_{cs} - V_g = 265{,}26 - 158{,}19 = 107{,}07$ cm^3.

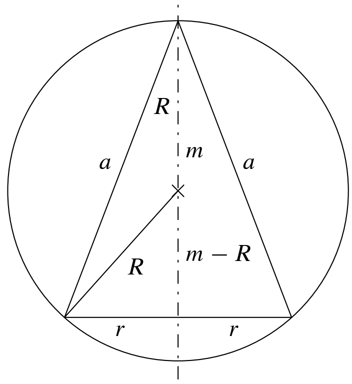
b) A keresett testfelszín a gömb és a csonkakúp felszínének összege. A felszínek összege $A_{cs} + A_g = 237{,}19 + 141{,}45 = 378{,}64$ cm^2.



20.3. A fahenger keresztmetszetéből megkaphatjuk az alapkörének sugarát $r = \sqrt{\dfrac{A}{\pi}} = \sqrt{\dfrac{12{,}56}{\pi}} = 2$ cm. Egy golyó térfogata $V_g = \dfrac{4\pi r^3}{3} = \dfrac{4\pi \cdot 2^3}{3} = 33{,}51$ cm^3. A golyó átmérője 4 cm, így a kifaragható golyók száma $\dfrac{100}{4} = 25$ db.

A fahenger térfogata $V_h = \pi r^2 m = \pi \cdot 2^2 \cdot 100 = 1256{,}64$ cm^3.

A fahulladék térfogata $V_h - 25 \cdot V_g = 418{,}89$ cm^3.

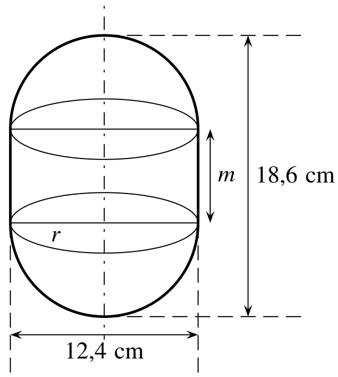


20.4. A körkúp magassága $m = \sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{28^2 - 10^2} = 26{,}15$ cm. A gömb sugara az $R^2 = r^2 + (m - R)^2$ összefüggésből számolható ki.

$R^2 = 10^2 + (26{,}15 - R)^2$, $52{,}3R = 783{,}8$, $R = 15$ cm.

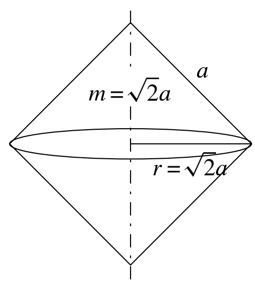
A gömb felszíne $A = 4\pi R^2 = 2827{,}4$ cm^2.

20.5. Egy acélgömb térfogata $V_g = \dfrac{4\pi}{3} r_g^3 = \dfrac{4\pi}{3} 0{,}5^3 = 0{,}524$ cm^3. A pohárban lévő víz térfogatváltozása $4 \cdot V_g = 2{,}096$ cm^3. A pohár alapkörének területe $T_a = \pi r^2 = 12{,}56$ cm^2. A vízszint magasságának változása $\dfrac{4 \cdot V_g}{T_a} = \dfrac{2{,}096}{12{,}56} = 0{,}167$ cm. A víz 4,167 cm magasan fog állni.



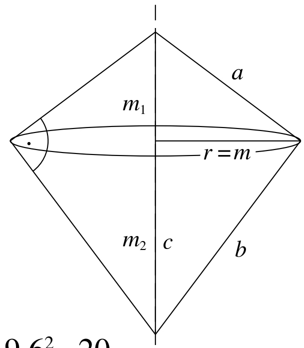
20.6. Az alakzat végein lévő körök sugara $r = \dfrac{12{,}4}{2} = 6{,}2$ cm. A középen lévő téglalap magassága $18{,}6 - 2 \cdot r = 18{,}6 - 2 \cdot 6{,}2 = 6{,}2$ cm. A test felszíne egy teljes gömb és a középen lévő henger palástjának összegéből tevődik össze: $A = 4\pi r^2 + 2\pi r m = 2\pi r(2r + m) = 724{,}6$ cm^2. A test térfogata egy teljes gömb térfogat és a középen lévő henger térfogatából tevődik össze $V = \dfrac{4\pi r^3}{3} + \pi r^2 m = \pi r^2\left(\dfrac{4}{3} r + m\right) = 1747$ cm^3.

21. feladatlap



21.1. *a)* A megpörgetés során két egybevágó forgáskúpot kapunk, amelyek alapkörének sugara és magassága egyaránt a négyzet átlójának a fele. $r = m = \dfrac{\sqrt{2} \cdot a}{2}$. A forgástest térfogata $V = 2 \cdot \dfrac{\pi r^2 m}{3} = 2 \cdot \dfrac{\pi \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} a\right)^2 \dfrac{\sqrt{2}}{2} a}{3} = \dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{6} = 379{,}15$ cm^3. A kúpok alkotója pont a négyzet oldala. A palást felszíne $A = 2(\pi r \cdot a) = \sqrt{2}\pi a^2 = 284{,}34$ cm^2.

b) A derékszögű háromszög átfogója $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$ cm. Az átfogóhoz tartozó magasságát megkapjuk ha kétféleképpen írjuk fel a háromszög a területét: $T_\triangle = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{m \cdot c}{2}$, $m = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{12 \cdot 16}{20} = 9{,}6$ cm. A forgatás során két kúpot kapunk, és mindegyiknek az alapkörének a sugara megegyezik a derékszögű háromszög alaphoz tartozó magasságával $r = m = 9{,}6$ cm. Az össztérfogat

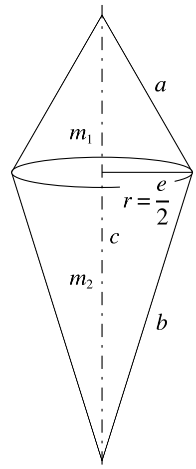


$$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi r^2 \cdot m_1}{3} + \frac{\pi r^2 \cdot m_2}{3} = \frac{\pi r^2 \cdot (m_1 + m_2)}{3} = \frac{\pi r^2 c}{3} = \frac{\pi 9{,}6^2 \cdot 20}{3} = 1930{,}2 \text{ cm}^3.$$

Az alakzat felszíne a kúpok palástjainak összege:

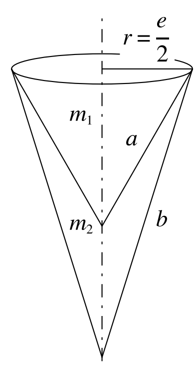
$$A = P_1 + P_2 = \pi \cdot r \cdot a + \pi \cdot r \cdot b = \pi \cdot r \cdot (a + b) = \pi \cdot 9{,}6 \cdot 28 = 844{,}5 \text{ cm}^2.$$

21.2. A forgáskúpok alapkörének sugara a nemszimmetriaátló fele $r = \frac{e}{2} = 3$ cm. A kúpok magassága meghatározható az alkotóból és az alapkör sugarából. $m_1 = \sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 5{,}2$ cm. $m_2 = \sqrt{b^2 - r^2} = \sqrt{10^2 - 3^2} = 9{,}54$ cm.

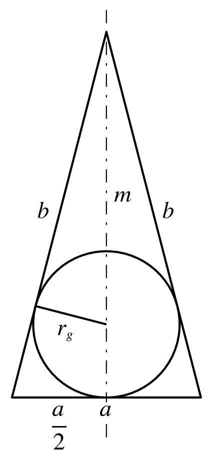


a) Konvex esetben az össztérfogat ($c = m_1 + m_2 = 14{,}74$); $V = V_1 + V_2 = \frac{\pi r^2 \cdot m_1}{3} + \frac{\pi r^2 \cdot m_2}{3} = \frac{\pi r^2 \cdot (m_1 + m_2)}{3} = \frac{\pi r^2 c}{3} = \frac{\pi 3^2 \cdot 14{,}74}{3} = 138{,}92$ cm^3. Az alakzat felszíne a kúpok palástjainak összege: $A = P_1 + P_2 = \frac{2\pi \cdot r \cdot a}{2} + \frac{2\pi \cdot r \cdot b}{2} = \pi \cdot r \cdot (a + b) = \pi \cdot 3 \cdot 16 = 150{,}8$ cm^2.

b) Konkáv esetben a két kúp térfogatának különbségét kell számítani $V = |V_1 - V_2| = \left|\frac{\pi r^2 \cdot m_1}{3} - \frac{\pi r^2 \cdot m_2}{3}\right| = \frac{\pi r^2 \cdot |m_1 - m_2|}{3} = \frac{\pi 3^2 \cdot 4{,}34}{3} = 40{,}9$ cm^3. A két felszín megegyezik $A = P_1 + P_2 = \frac{2\pi \cdot r \cdot a}{2} + \frac{2\pi \cdot r \cdot b}{2} = \pi \cdot r \cdot (a + b) = \pi \cdot 3 \cdot 16 = 150{,}8$ cm^2.

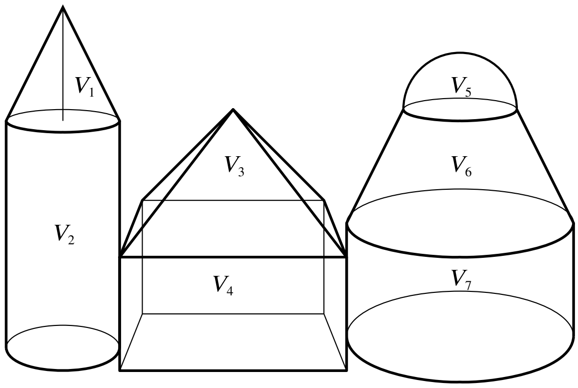


21.3. A háromszög félkerülete $s = \frac{b + b + a}{2} = \frac{10 + 10 + 5}{2} = 12{,}5$ cm. A háromszög magassága $m = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{10^2 - 2{,}5^2} = 9{,}68$ cm. A háromszög területe $t = \frac{ma}{2} = 24{,}2$ cm^2. A beírható kör és a gömb sugara $r_g = \frac{t}{s} = 1{,}94$ cm. A test felszíne egyenlő a kúp felszínének és a gömb felszínének összegével $A = A_k + A_g = \pi \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{a}{2} + b\right) + 4\pi r_g^2 = 98{,}17 + 47{,}29 = 145{,}46$ cm^2. A test térfogata egyenlő a kúp térfogatának és a gömb térfogatának különbségével

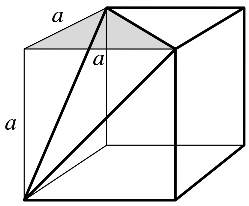


$$V = V_k - V_g = \frac{\pi r^2 m}{3} - \frac{4\pi r_g^3}{3} = 63{,}36 - 30{,}58 = 32{,}78 \text{ cm}^3.$$

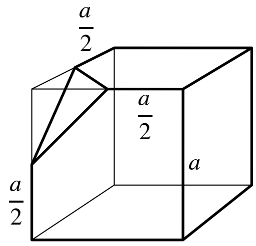
21.4. A különböző testek térfogatai: $V_1 = \dfrac{\pi r^2 m}{3} = \dfrac{\pi 0{,}5^2 \cdot 1}{3} = 0{,}262$; $V_2 = \pi r^2 m = \pi 0{,}5^2 \cdot 2 = 1{,}571$; $V_3 = \dfrac{a^2 m}{3} = \dfrac{2^2 \cdot 1}{3} = 1{,}333$; $V_4 = a^2 m = 2^2 \cdot 1 = 4$; $V_5 = \dfrac{4\pi r^3}{3 \cdot 2} = \dfrac{4\pi \cdot 0{,}5^3}{3 \cdot 2} = 0{,}262$; $V_6 = \dfrac{m\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2) = \dfrac{1 \cdot \pi}{3}(1^2 + 1 \cdot 0{,}5 + 0{,}5^2) = 1{,}833$; $V_7 = \pi r^2 m = \pi \cdot 1^2 \cdot 1 = 3{,}142$. A térfogatok összege $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7 = 12{,}403$.



21.5. *a)*



b)



a) A levágott test egy gúla, amelynek alapja a besatírozott terület: $T_a = \dfrac{a \cdot a}{2} = \dfrac{a^2}{2}$. A gúla magassága a kocka éle, a gúla térfogata tehát: $V_g = \dfrac{T_a \cdot m}{3} = \dfrac{\frac{a^2}{2}a}{3} = \dfrac{a^3}{6}$. A kocka térfogata $V_k = a^3$. A kérdéses térfogat $V_t = V_k - V_g = a^3 - \dfrac{a^3}{6} = \dfrac{5}{6}a^3 = 833{,}3\ \text{cm}^3$. *b)* A levágott test egy gúla, amelynek alapja a besatírozott terület: $T_a = \dfrac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{2} = \dfrac{a^2}{8}$. A gúla magassága a kocka élének a fele, a gúla térfogata tehát $V_g = \dfrac{T_a \cdot m}{3} = \dfrac{\frac{a^2}{8} \cdot \frac{a}{2}}{3} = \dfrac{a^3}{48}$. A kocka térfogata $V_k = a^3$. A kérdéses térfogat $V_t = V_k - V_g = a^3 - \dfrac{a^3}{48} = \dfrac{47}{48}a^3 = 979{,}17\ \text{cm}^3$.

21.6. A henger térfogata $V_h = \pi r^2 m = \pi \cdot 10^2 \cdot 6 = 1884{,}96\ \text{cm}^3$. A csonkakúp térfogata $V_{cs} = \dfrac{m\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2) = \dfrac{3 \cdot \pi}{3}(4^2 + 4 \cdot 6 + 6^2) = 238{,}76\ \text{cm}^3$. A test térfogata a térfogat különbsége $V_t = V_h - V_{cs} = 1646{,}2\ \text{cm}^3$.

22. feladatlap

22.1. *a)* Igaz állítás. *b)* Igaz állítás. *c)* Nem állítás. *d)* Nem állítás. *e)* Igaz állítás. *f)* Igaz állítás.

22.2. *a)* Hamis, hiszen a 2 páros prím. *b)* Igaz, a téglalap ilyen. *c)* Igaz állítás. *d)* Hamis. *e)* Igaz. *f)* Hamis, hiszen az 5 prímszám. *g)* Igaz, hiszen a 24-nek 8 osztója van, a 32-nek meg 6.

22.3. A megfordítás: Ha egy négyszögnek van derékszöge, akkor az húrnégyszög. Egyik állítás sem igaz, mivel egy négyszög akkor húrnégyszög, ha a szemközti szögei 180°-ra egészítik egymást, és ennek nem feltétele a derékszög léte.

22.4.

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$
i	*i*	*i*	*i*
i	*h*	*i*	*h*
h	*i*	*i*	*h*
h	*h*	*h*	*h*

22.5. *a)* $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$;

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$
i	*i*	*h*	*h*	*i*	***h***	***h***
i	*h*	*h*	*i*	*h*	***i***	***i***
h	*i*	*i*	*h*	*h*	***i***	***i***
h	*h*	*i*	*i*	*h*	***i***	***i***

A kétféle érték mind a két esetben megegyezik, így valóban azonosságot kaptunk.

b) $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
i	*i*	*h*	*h*	*i*	***h***	***h***
i	*h*	*h*	*i*	*i*	***h***	***h***
h	*i*	*i*	*h*	*i*	***h***	***h***
h	*h*	*i*	*i*	*h*	***i***	***i***

A kétféle érték mind a két esetben megegyezik, így valóban azonosságot (De Morgan-azonosságot) kaptunk.

22.6. *a)* Nem minden kutya ugat. Vagy van olyan kutya, amelyik nem ugat.

b) Nincs szőke hajú svéd. Vagy minden svéd nem szőke.

c) Bár esik az eső, nem megyünk moziba.

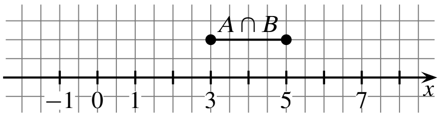
d) Reggelire nem tojást eszünk vagy nem teát iszunk.

e) Este nem megyünk színházba és nem megyünk koncertre sem.

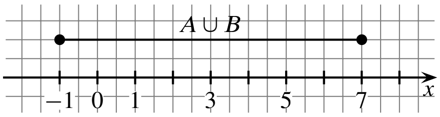
23. feladatlap

23.1.

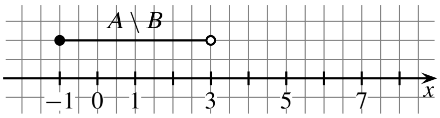
a) $[3; 5]$



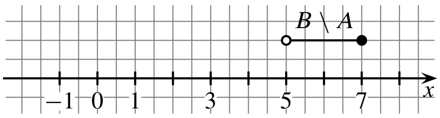
b) $[-1; 7]$



c) $[-1; 3[$



d) $]5; 7]$

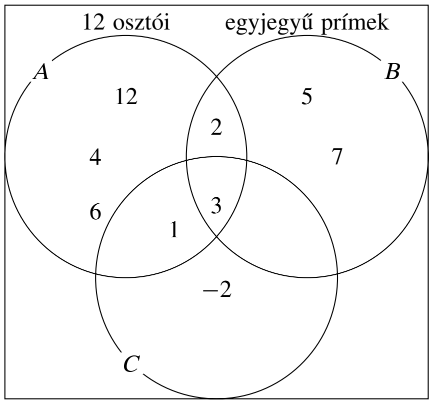


23.2. Olyan számokat keresünk, amelyek sem 5-tel, sem 2-vel nem oszthatók. $800 - \frac{800}{2} - \frac{800}{5} + \frac{800}{2 \cdot 5} = 320$. Tehát 320 ilyen szám van.

23.3. $\emptyset$; {piros}; {sárga}; {kék}; {piros, sárga}; {piros, kék}; {kék, sárga}; {piros, sárga, kék}.

23.4. A halmazok
$A := \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$; $B := \{2, 3, 5, 7\}$; $C := \{-2, 1, 3\}$.
b) $|A \cap B \cap C| = 1$; *c)* $(B \cup c) \cap A = \{1; 2; 3\}$.

a)



23.5. Megfordítás: Ha egy szám páratlan, akkor prímszám.

Tagadás: Lehet egy szám prímszám, mégis páros.

Az eredeti állítás hamis, hiszen a 2 páros prímszám. A megfordítás hamis állítás, mivel a 15 páratlan, de nem prímszám. A tagadás igaz, hiszen a 2 prím is és páros is.

23.6.

A	B	$\neg A \wedge B$	$\boxed{A \vee B}$	$A \vee \neg B$
i	*i*	***h***	*i*	***i***
i	*h*	***h***	*i*	***i***
h	***i***	***i***	*i*	***h***
h	***h***	*h*	*h*	***i***

23.7. *a)* A dobások módusza 2. *b)* A dobások mediánja 3.

c) A dobások átlaga: $\frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 4}{20} = \frac{65}{20} = 3{,}25$.

d) A dobások relatív gyakorisága egyenlő a gyakoriság és az összdobásszám hányadosa:

dobások értéke	1	2	3	4	5	6
dobások gyakorisága	$\frac{2}{20} = 0{,}1$	$\frac{7}{20} = 0{,}35$	$\frac{3}{20} = 0{,}15$	$\frac{4}{20} = 0{,}2$	$\frac{0}{20} = 0$	$\frac{4}{20} = 0{,}2$

e) Az 5-ös vagy a 6-os dobás a jó. $\frac{4}{20} = 0{,}2$ relatív gyakoriság, 20%.

23.8. A gyakoriságtáblázat:

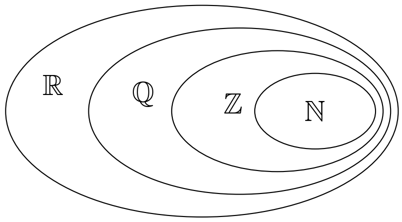
Testvérek száma	0	1	2	3	4
Diákok száma	4	7	10	9	2

a) $\frac{21}{32} = 0{,}65625$, 65,6%-nak van legfeljebb 2 testvére. *b)* $\frac{7}{32} = 0{,}21875$, 21,9%-nak van pontosan 1 testvére.

c) Az átlagos testvérszám $\dfrac{0 \cdot 4 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 9 + 4 \cdot 2}{32} = \dfrac{62}{32} = 1{,}9375$. A növekvő sorba rendezés során középen két 2 testvérrel rendelkező tanuló van, így azok átlaga is két testvér. A medián 2. A medián és átlag különbsége $2 - 1{,}9375 = 0{,}0625$. *d)* Három vagy több testvére 11 gyereknek van. A valószínűség $p = \dfrac{\binom{11}{2}}{\binom{32}{2}} = 0{,}11$, tehát 11% a valószínűsége.

24. feladatlap

24.1. A halmazok elhelyezkedése az ábrán látható.



24.2. *a)* 1,2. *b)* $-0{,}125$. *c)* $4{,}\dot{5}7142\dot{8}$. *d)* $\dfrac{14}{10} = \dfrac{7}{5}$.

e) A végtelen szakaszos tizedestört átalakításánál a számot elnevezzük x-nek: $x = 0{,}\dot{3}$. A kifejezés mindkét oldalát megszorozzuk a szakasz hosszának megfelelő tízhatvánnyal, jelen esetben egy hosszúságú szakasz révén 10-zel: $10x = 3{,}\dot{3}$. A két egyenletet kivonjuk egymásból: $10x - x = 0{,}\dot{3} \cdot 10 - 0{,}\dot{3}$, $9x = 3$, $x = \dfrac{1}{3}$. Végül felírjuk a számot tört alakban.: $-8{,}\dot{3} = -8\dfrac{1}{3}$.

f) $x = 0{,}\dot{1}\dot{7}$, $x100 - x = 0{,}\dot{1}\dot{7} \cdot 100 - 0{,}\dot{1}\dot{7}$, $99x = 17$, $x = \dfrac{17}{99}$.

g) $\dfrac{20\,006}{10\,000} = 2\dfrac{3}{5000}$. *h)* $-0{,}\dot{5}$. *i)* $\dfrac{1318}{10} = 131\dfrac{4}{5}$. *j)* 26,25.

24.3. *a)* Hamis, hiszen a 6 páros és osztható 3-mal. *b)* Igaz, hiszen az egyetlen páros prím, a 2, kisebb, mint 10. *c)* Igaz. *d)* Hamis, hiszen a 15 és a 16 nem prímszám és mégis relatív prímek. *e)* Igaz, mert csak a prímszám négyzeteként előállítható számoknak van 3 osztója.

24.4. $\sqrt[3]{27} = 3$; $\log_2 \dfrac{1}{16} = -4$; $5^{1-\log_5 2} = 5^{\log_5 \frac{5}{2}} = \dfrac{5}{2}$; hármas számrendszer $100_3 = 9$; $4^{-\frac{1}{2}} = (2^2)^{-\frac{1}{2}} = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$. A csökkenő sorrend: 100_3; $\sqrt[3]{27}$; $5^{1-\log_5 2}$; $4^{-\frac{1}{2}}$; $\log_2 \dfrac{1}{16}$.

24.5. *a)* Az öttel oszthatóság miatt y csak 0 és 5 lehet. A hárommal való oszthatóság miatt a számjegyek összege osztható 3-mal. Ha $y = 0$, akkor $x = 2; 5; 8$. Ha $y = 5$, akkor $x = 0; 3; 6; 9$.

b) A 8-cal való oszthatóság miatt az utolsó 3 számjegyből képzett számnak kell 8-cal oszthatónak lenni. y csak 0 és 8 lehet. A hárommal való oszthatóság miatt a számjegyek összege osztható 3-mal. Ha $y = 0$, akkor $x = 2; 5; 8$. Ha $y = 8$, akkor $x = 0; 3; 6; 9$.

c) A 2-vel való oszthatóság miatt y csak 0, 2, 4, 6, és 8 lehet. A 9-cel való oszthatóság miatt a számjegyek összege osztható kell legyen 9-cel. Ha $y = 0$, akkor $x = 8$. Ha $y = 2$, akkor $x = 6$. Ha $y = 4$, akkor $x = 4$. Ha $y = 6$, akkor $x = 2$. Ha $y = 8$, akkor $x = 0; 9$.

24.6. *a)* $\dfrac{(2^3 \cdot 3)^5 \cdot (2 \cdot 3^2)^3 \cdot (2^3 \cdot 3^2)^4}{(2^2 \cdot 3^2)^6 \cdot (2^4 \cdot 3)^5} = \dfrac{2^{15} \cdot 3^5 \cdot 2^3 \cdot 3^6 \cdot 2^{12} \cdot 3^8}{2^{12} \cdot 3^{12} \cdot 2^{20} \cdot 3^5} = 2^{-2} \cdot 3^2 = \dfrac{3^2}{2^2}$;

b) $\dfrac{(a^2b^3)^{-2} \cdot (a^7b^5)^3}{(a^3b)^4 \cdot (a^5b^2)^3} = \dfrac{a^{-4}b^{-6}a^{21}b^{15}}{a^{12}b^4a^{15}b^6} = a^{-10}b^{-1} = \dfrac{1}{a^{10} \cdot b}$.

24.7. *a)* $\dfrac{x(x+y)}{x(x-y)} \cdot \dfrac{xy}{xy(x+y)} = \dfrac{1}{x-y}$;

b) $\dfrac{5(x-y)^2}{x-y} : \dfrac{(x-y)\cdot(x+y)}{3(x+y)} = \dfrac{5(x-y)^2}{x-y} \cdot \dfrac{3(x+y)}{(x-y)\cdot(x+y)} = 15.$

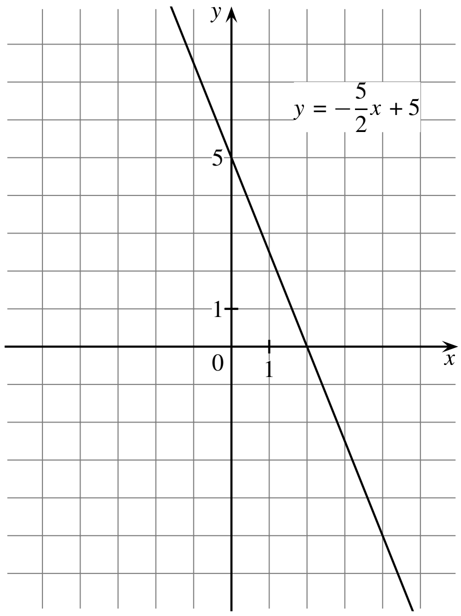
24.8. Legyen az intervallum-határolók közös nevezője például 30. Ekkor $\left[-\dfrac{15}{30}; -\dfrac{10}{30}\right]$, a két határoló között van a $-\dfrac{14}{30}; -\dfrac{13}{30}; -\dfrac{12}{30}; -\dfrac{11}{30}$.

25. feladatlap

25.1. Az $y = mx + b$ alakból $b = 5$, mivel ott metszi az y tengelyt. Helyettesítsük be a $(2; 0)$ pontot! $y = mx + 5$, $0 = 2m + 5$, $m = -\dfrac{5}{2}$. $y = -\dfrac{5}{2}x + 5$.

a) Az egyenes meredeksége $m = \operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{5}{2}$; $\alpha = -68{,}2^\circ$. Az egyenes az x tengely pozitív irányával $180^\circ - 68{,}2^\circ = 111{,}8^\circ$-ot zár be.

b) $x < 2$.

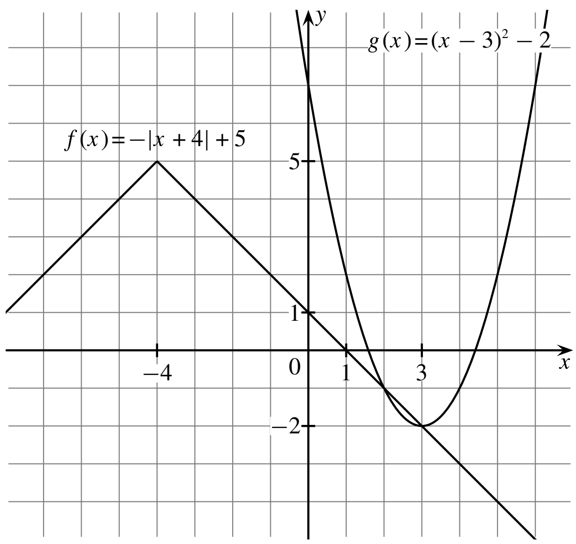


25.2. *a)* $f(-2) = 3$; $f(400) = -399$; $g(5) = 2$; $g\left(-\dfrac{3}{4}\right) = \left(-\dfrac{15}{4}\right)^2 - 2 = \dfrac{193}{16} = 12\dfrac{1}{16}$.

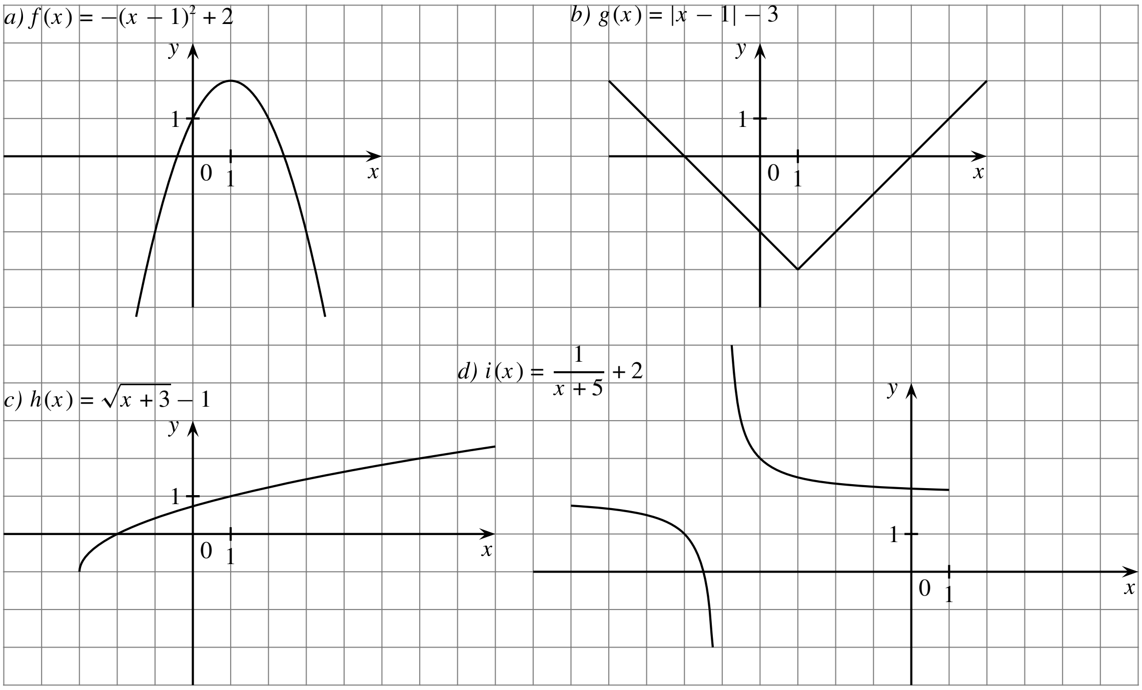
b) A két függvény $x_1 = 2$-ben és $x_2 = 3$-ban metszi egymást.

c) Az $f(x) = -|x+4| + 5$-nek maximuma van $x = -4$-ben és $y = 5$ a maximumérték. Az $g(x) = (x-3)^2 - 2$-nek minimuma van $x = 3$ helyen és $y = -2$ a minimumérték.

d) $]-\infty; 3]$.



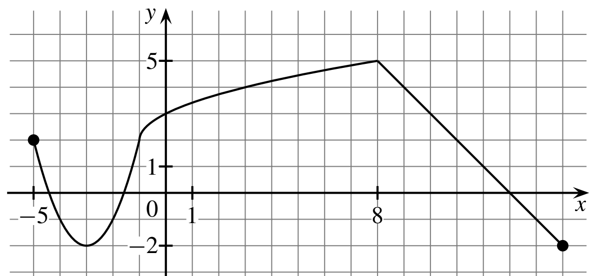
25.3.



25.4. *a)* Például $f(x)\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x-1)^2+2$. *b)* Például $f(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x+3)(x-6)$. *c)* Például $f(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -(x+2)^2+5$.

25.5.

a)



b) $y = 3$-ban metszi.

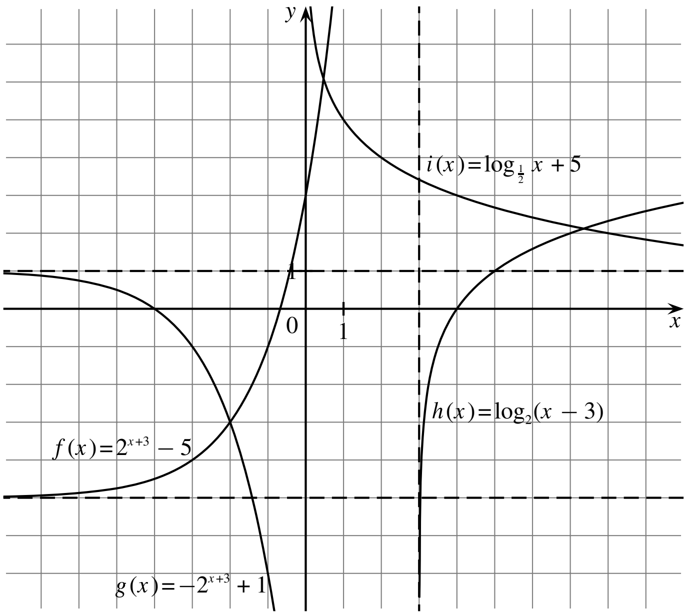
c) Abszolút minimumhely $x = -3$; 15, minimumérték $y = -2$. Abszolút maximumhely $x = 8$, maximumérték $y = 5$. Lokális maximumhely $x = -5$, maximumérték $y = 2$.

25.6. *a)* $f(x)$ és $h(x)$.

b) $\log_2(x-3) = 0$, $\log_2(x-3) = \log_2 1$, mivel szig. mon. fv. $x - 3 = 1$, $x = 4$ a zérushely.

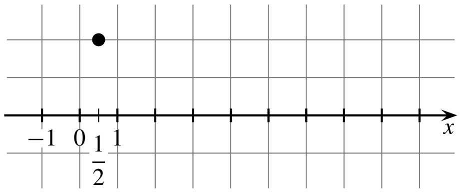
$\log_{\frac{1}{2}} x + 5 = 0$, $\log_{\frac{1}{2}} x = -5$, $\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$, mivel szig. mon. fv., $x = 32$ a zérushely.

c) $f(-4) = 2^{-4+3} - 5 = -4\frac{1}{2}$; $f(2) = 2^{2+3} - 5 = 27$; $g(-2) = -2^{-2+3}+1 = -1$; $g(4) = -2^{4+3} + 1 = -127$.

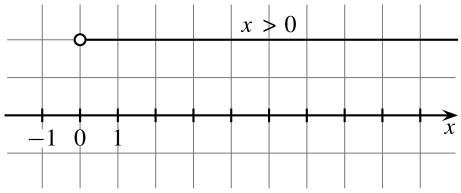


26. feladatlap

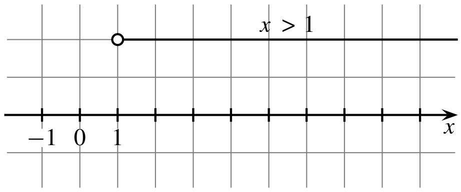
26.1. *a)*



b)



c)



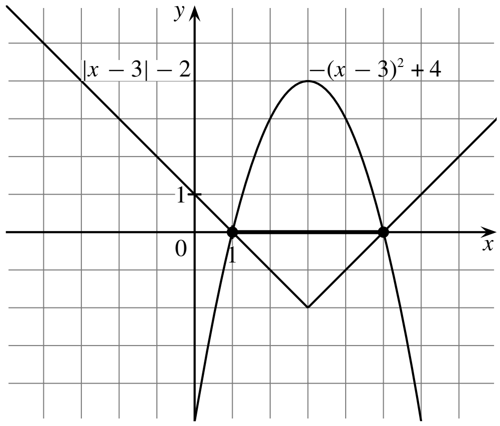
26.2. Mekkora a következő egyenletek megoldásainak szorzata?

a) $x^2 - 4 = 0$, $(x - 2)(x + 2) = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. *b)* $\dfrac{3}{x+1} = -1$, $3 = -(x + 1)$, $3 = -x - 1$, $x_3 = -4$.

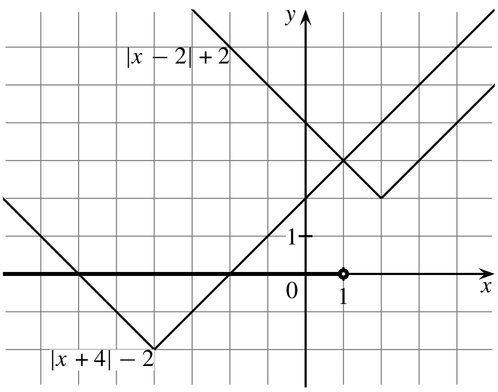
c) $\dfrac{4x-3}{5} + 1 = \dfrac{x}{2}$, $\dfrac{2(4x-3)}{10} + \dfrac{10}{10} = \dfrac{5x}{10}$, $2(4x - 3) + 10 = 5x$, $8x + 4 = 5x$, $x_4 = -\dfrac{4}{3}$. A négy gyök szorzata $(-2) \cdot 2 \cdot (-4) \cdot \left(-\dfrac{4}{3}\right) = -\dfrac{64}{3}$.

26.3. Ábrázoljuk az egyenlőtlenség két oldalán szereplő kifejezéseket mint függvényeket!

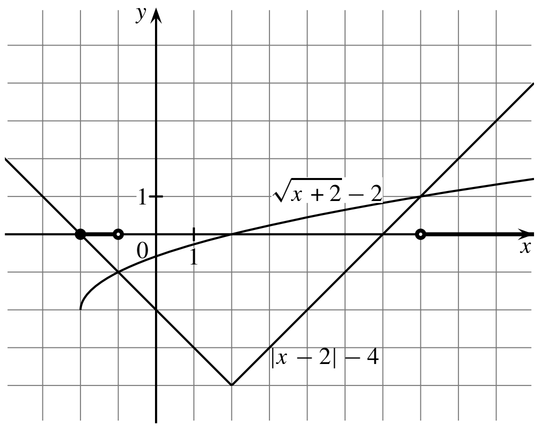
a) A jobb oldali másodfokú kifejezést teljes négyzetté alakítjuk: $-x^2 + 6x - 5 = -(x^2 - 6x) - 5 = -\left[(x - 3)^2 - 9\right] - 5 = -(x - 3)^2 + 4$. A keresett tartomány $[1; 5]$.



b) A keresett tartomány $]-\infty; 1]$.



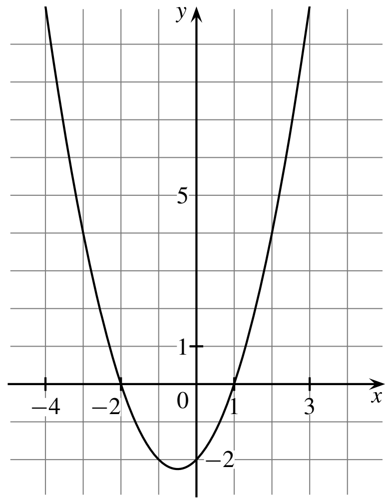
c) A keresett tartomány $[-2; -1[\cup]7; \infty[$.



26.4. *a)* A második egyenletből fejezzük ki x-et: $x = 14 - 2y$; helyettesítsük be az első egyenletbe $2(14 - 2y) - y = 3$! Az egyenlet rendezése után $y = 5$ és $x = 4$. Van egész megoldás.

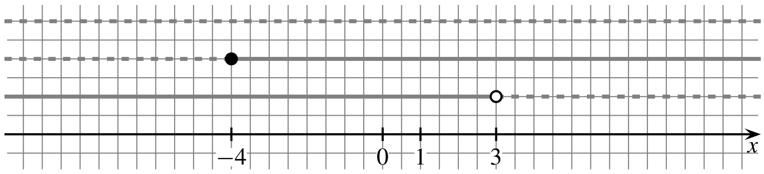
b) Fejezzük ki a második egyenletből x-t! $x = \dfrac{12}{y}$, majd helyettesítsük be az első egyenletbe $\dfrac{144}{y^2} + y^2 = 40$, $y^4 - 40y^2 + 144 = 0$. Az egyenlet megoldása után $y^2 = 4$ és $y^2 = 36$ egyenleteket kapjuk, melyek megoldásai: $y_1 = 2$ és $x_1 = 6$; $y_2 = -2$ és $x_2 = -6$; $y_3 = 6$ és $x_3 = 2$; $y_4 = -6$ és $x_4 = -2$. Van egész megoldás.

26.5. *a)* Az $x^2 + x - 2 = 0$ másodfokú egyenlet megoldásai $x_1 = -2$ és $x_1 = 1$. A megoldáshalmaz $]-\infty; -2] \cup]1; \infty[$.



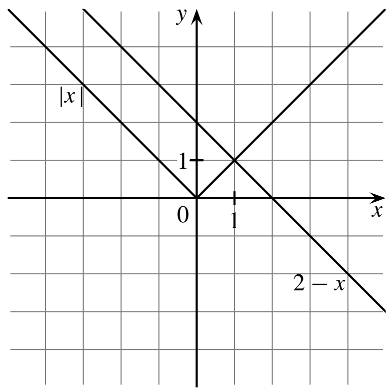
b) Az $x^2 + 6x + 10 = 0$ nincs megoldása, de a parabola ágai felfelé hajlanak, ezért a megoldása a teljes valós számhalmaz: $\mathbb{R}$.

c) Az egyenlőtlenség akkor negatív, ha a nevező pozitív: $0 < x - 5$, $x > 5$, $]5; \infty[$.



d) Az egyenlőtlenség például számegyenes segítségével oldható meg, innen leolvasva a megoldáshalmaz $]-\infty; -4] \cup]3; \infty[$.

e) Oldjuk meg grafikusan! $|x| \leq 2 - x$. A megoldáshalmaz $]-\infty; 1]$.



27. feladatlap

27.1. *a)* $\lg x = \lg(5 \cdot 17)$, mivel szig. mon., $x = 85$. *b)* $\log_{25} x = \log_{25} 25^{-\frac{1}{2}}$, mivel szig. mon., $x = \dfrac{1}{5}$. *c)* $3^x = 3^{-4}$, mivel szig. mon., $x = -4$. *d)* A egyenlet valós számon értelmezett megoldásai $x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ és $x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ egyenletek megoldásai. Innen $x_1 = -\dfrac{\pi}{12} + 2k\pi$, $x_2 = \dfrac{5\pi}{12} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. A tartományba eső megoldások $x_1 = \dfrac{23\pi}{12}$ és $x_2 = \dfrac{5\pi}{12}$. *e)* A koszinuszfüggvény negatív, ha $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

f) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-5} \geq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}$, mivel szig. mon. csökken, $x - 5 \leq -1$, $x \leq 4$. A megoldáshalmaz $]-\infty; 4]$.

g) $\log_9 x > \log_9 9^{-\frac{1}{2}}$, mivel szig. mon. növekszik, $x > \dfrac{1}{3}$. A megoldáshalmaz $\left[\dfrac{1}{3}; \infty\right[$.

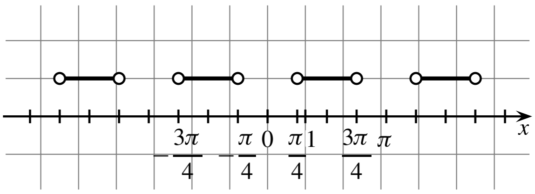
27.2. A $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosság alkalmazásával $4\cos x + 1 = 4(1 - \cos^2 x)$, $4\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0$. A megoldások közül a $-\frac{3}{2}$ nem jó, az $\frac{1}{2}$ alkalmas. A $\cos x = \frac{1}{2}$ egyenlet megoldásai $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

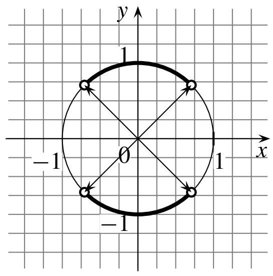
27.3.

a) Kikötés: $\sqrt{x+1} - 1 > 0$ és $x + 1 > 0$. A feltétel: $x > 0$. Az egyenlet átalakítása után $\log_2\left(\sqrt{x+1} - 1\right) = \log_2 8$, mivel szig. mon., $\sqrt{x+1} - 1 = 8$, $x = 80$ a megoldás, ami egész.

b) $(6^2)^x - 4 \cdot 6^x - 12 = 0$, $(6^x)^2 - 4 \cdot 6^x - 12 = 0$, a -2 nem megoldás; $6^x = 6$, mivel szig. mon., $x = 1$, ami egész.

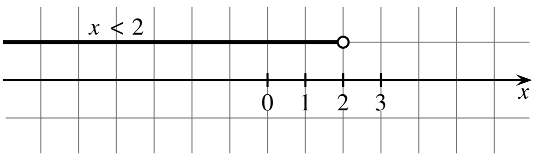
27.4. *a)* $\sin^2 x - \cos^2 x > 0$, $\sin^2 x > \cos^2 x$, $|\sin x| > |\cos x|$.

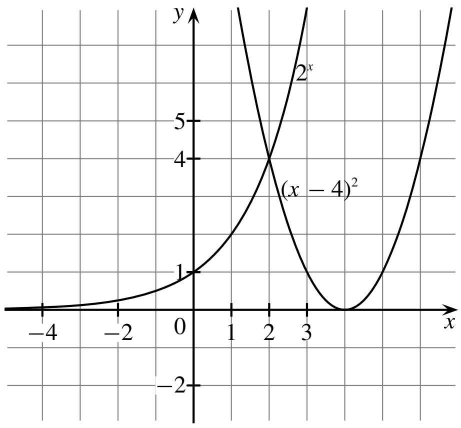




Megoldás $\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) $(x-4)^2 \geq 2^x$. A grafikonról leolvasható, hogy $]-\infty; 2]$.





28. feladatlap

28.1. Legyen x Diophantosz éltének ideje! Írjuk fel az egyenletet $\frac{x}{6} + \frac{\frac{x}{6}}{2} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$, $\frac{75x}{84} + 9 = x$, $x = 84$ évet élt Diophantosz.

28.2. A kétjegyű szám $10x + y$ alakú. A számjegyek összege $x + y = 8$, innen $y = 8 - x$. Írjuk fel az egyenletet! $10y + x - (10x + y) = 10 + x + y$, $8y = 10 + 10x$. $8(8 - x) = 10 + 10x$, $x = 3$, $y = 5$. 35 a keresett szám.

28.3. 2 liter 60%-os málnaszörpben a szörp mennyisége $2 \cdot 0{,}6 = 1{,}2$ liter. x liter vizet hozzáöntve $x + 2$ liter 20%-os szörpöt kapunk. $(2 + x) \cdot 0{,}2 = 1{,}2$, $x = 4$ liter vizet kell hozzáönteni.

28.4. t nap alatt az apa $\frac{t}{21}$ részét, az anya $\frac{t}{24}$, a gyerek $\frac{t}{40}$ eszi meg a búzaszemeknek. Az egyenlet $\frac{t}{21} + \frac{t}{24} + \frac{t}{40} = 1$, $40t + 35t + 21t = 840$, $t = 8{,}75$. Jó közelítéssel 9 napig étkezhetnek.

28.5. Legyen x a harmadik szám! $200x = (5x)^2$. $x_1 = 8$ vagy $x_2 = 0$, tehát 8 vagy 0 a harmadik szám.

28.6. Írjuk fel az összefüggéseket! $\frac{n(n-3)}{2} - 114 = 25n$, $n(n-3) - 228 = 50n$, $n^2 - 53n - 228 = 0$, a -4 nem megoldás, 57 oldalú a sokszög.

28.7. *a)* Elvileg 33 lehetséges fogszáma lehet egy tanulónak, attól függően, hogy hány foga van. A gyerekek száma $33 + 1 = 34$.

b) A hét minden napján szülessen 4 gyerek, a következő már a kérdéses helyzetet állítja elő: $4 \cdot 7 + 1 = 29$.

c) Minden hónapban legyen három névnapos, a következő tanuló valamelyik hónapban a negyedik lesz: $3 \cdot 12 + 1 = 37$.

28.8. Legyen x a versenyen indulók száma! Az első feladatot $0{,}6x$ tanuló oldotta meg, a második feladatot $0{,}65x$ tanuló oldotta meg, mind a két feladatot $0{,}6x + 0{,}65x - x = 0{,}25x$. Csak a második feladatot megoldók száma $0{,}65x - 0{,}25x = 0{,}4x = 80$, $x = 200$. Az iskola tanulóinak ötöde indult a versenyen. Az iskola tanulóinak száma $5 \cdot 200 = 1000$ fő.

29. feladatlap

29.1. *a)* Egy dobásnál 2 lehetőség van, fej vagy írás. Négy dobásnál $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$ a lehetőségek száma. Csak egyféleképpen lehet mind a négy dobás írás. A keresett valószínűség $p = \frac{1}{16} = 0{,}0625$, 6,25%. *b)* A három fej és egy írás négyféleképpen jöhet ki. A keresett valószínűség $p = \frac{4}{16} = 0{,}25$, 25%.

29.2. A 10 könyvet 10! módon tehetjük vissza. Mivel a két könyv egymás mellett van, így egy egységnek tekinthető, bár felcserélhető a két könyv, tehát $2! \cdot 9!$ módon tehetjük vissza. A keresett valószínűség $p = \frac{2! \cdot 9!}{10!} = 0{,}2$, 20%.

29.3. A 10 tanulóból 5-öt $\binom{10}{5} = 252$ módon választhatunk ki. Nem vegyes választás csak a fiúk közül választható ki $\binom{6}{5} = 6$. A kedvező esetek száma $252 - 6 = 246$.

29.4. *a)* 4 egységből álló jelkészlet $2^4 = 16$ jelből áll. *b)* Legfeljebb 3 egységből álló jelkészlet $2^3 + 2^2 + 2 = 14$ jelből áll.

29.5. Az ötszemélyes csónakba 12 gyerek közül választhatunk $\binom{12}{5}$ módon. A maradék 7 gyerek közül ül be a négyszemélyes csónakba $\binom{7}{4}$, és a maradék három gyerek beül a háromszemélyes csónakba. A lehetőségek száma $\binom{12}{5} \cdot \binom{7}{4} = 27\,720$.

29.6. A 10 dobása a valószínűbb, hiszen összesen 27-féleképpen lehet megtenni, szemben a 9 összegű dobás 25 lehetőségével.

9 előállítása		10 előállítása	
típus	darab	típus	darab
6, 2, 1	6	6, 3, 1	6
5, 2, 2	3	6, 2, 2	3
5, 3, 1,	6	5, 4, 1	6
4, 4, 1	3	5, 3, 2	6
4, 3, 2	6	4, 4, 2	3
3, 3, 3	1	4, 3, 3	3
Összesen:	**25**	Összesen:	**27**

29.7. A 400 alma közül nagy valószínűséggel 48 romlott és 352 nem romlott.

Az összes eset $\binom{400}{80}$.

a) Az egy alma sem romlott eseteinek száma $\binom{352}{80}$. A keresett valószínűség $p = \frac{\binom{352}{80}}{\binom{400}{80}}$.

b) 48-ból nem lehet 80-at kiválasztani, így ez egy lehetetlen esemény, valószínűsége 0.

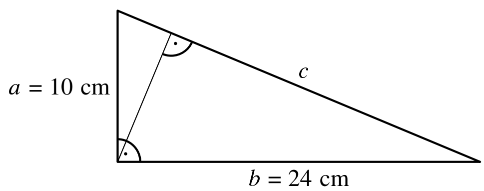
c) A 9 jó és 71 rossz kiválasztásának lehetőségei száma: $\binom{48}{9}\binom{352}{71}$. A keresett valószínűség

$$p = \frac{\binom{48}{9}\binom{352}{71}}{\binom{400}{80}}.$$

29.8. Az összes lehetőség a kiválasztásra $\binom{5}{3} = 10$. A háromszög egyenlőtlenségnek viszont három eset nem tesz eleget $\big((2,5,7),\ (2,5,8),\ (2,6,8)\big)$. Így a kedvező esetek száma $10 - 3 = 7$.

30. feladatlap

30.1. A háromszög átfogója

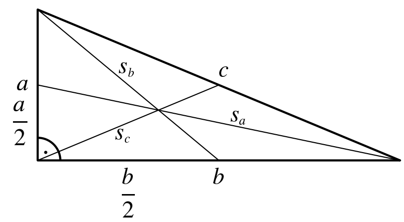


$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10^2 + 24^2} = 26$ cm.

a) A kerület $k = a + b + c = 10 + 24 + 26 = 60$ cm.

b) A terület $t = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{10 \cdot 24}{2} = 120\ \text{cm}^2$.

c) A köré írható kör sugara az átfogó fele $R = \frac{c}{2} = 13$ cm.



A bele írható kör sugara $r = \frac{t}{s} = \frac{t}{\frac{k}{2}} = \frac{2t}{k} = \frac{2 \cdot 120}{60} = 4$ cm.

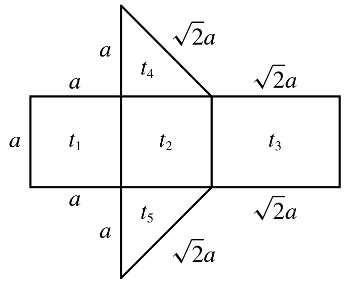
d) A magasságok: $m_a = b = 24$ cm; $m_b = a = 10$ cm. Az átfogóhoz tartozó magasság kiszámolható a terüketképletből $t = \frac{c \cdot m_c}{2}$, $m_c = \frac{2 \cdot t}{c} = \frac{2 \cdot 120}{26} = 9{,}23$ cm.

e) A súlyvonalak: Az *a* oldalhoz tatozó súlyvonal $s_a = \sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{24^2 + 5^2} = 24{,}52$ cm; $s_b = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{10^2 + 12^2} = 15{,}62$ cm; A köré írható kör sugarával esik egybe, $s_c = 13$ cm.

f) A hegyesszögeit valamelyik szögfüggvénnyel kaphatjuk meg: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{10}{24}$, $\alpha = 22{,}62°$. $\beta = 90° - \alpha = 67{,}38°$.

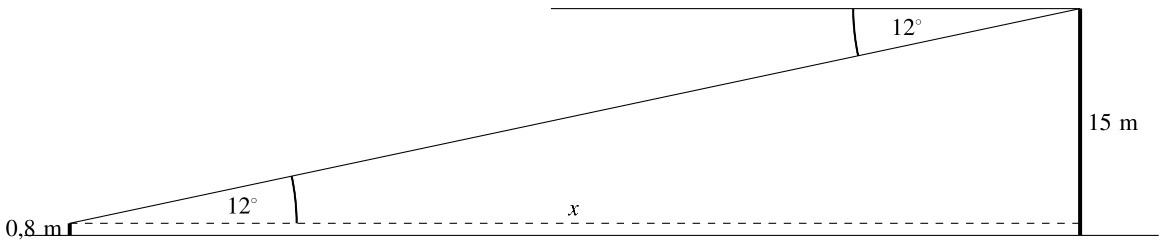
30.2. A szabályos háromszög területképlete $t = \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{4}$. Innen a háromszög oldala $a = \sqrt{\frac{4t}{\sqrt{3}}} =$ $= \sqrt{\frac{40}{\sqrt{3}}} = 4{,}8$ cm. A szabályos háromszög köré írható kör sugara a magasságának $\frac{2}{3}$-ad része: $R = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 4{,}8 = 2{,}77$ cm.

30.3. *a)* Az alakzat egy a élű kocka fele, így térfogata $V = \frac{a^3}{2} = \frac{12^3}{2} = 864$ cm^3. 1000 liter tej 1 000 000 cm^3. $\frac{1\,000\,000}{864} = 1157{,}4 \approx 1158$ db.



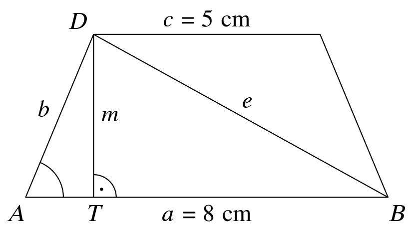
b) A felszín $A = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = a^2 + a^2 + \sqrt{2}a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = \left(3 + \sqrt{2}\right)a^2 = 635{,}65$ cm^2. Az 1000 db doboz területe összesen 635 650 cm^2, így minimum 63,565 m^2 felületű papír kell.

30.4. A távolság a derékszögű háromszög befogója,
$\operatorname{tg} 12° = \frac{15 - 0{,}8}{x} = \frac{14{,}2}{x}$, $x = \frac{14{,}2}{\operatorname{tg} 12°} = 66{,}81$ m.



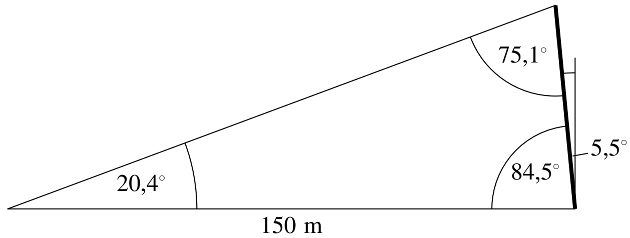
30.5. Mivel a Föld és a Nap egyaránt gömb alakú, így a 109 a hasonlóság aránya. A felszín esetében a hasonlóság aránya $109^2 = 11\,881$-szeres a felszín. A térfogat esetében a hasonlóság aránya $109^3 = 1\,295\,029$.

30.6. A trapéz magassága $m = 0{,}45 \cdot a = 0{,}45 \cdot 8 = 3{,}6$ cm. A b oldal kiszámolható az ATD derékszögű háromszögből $b = \sqrt{m^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = \sqrt{3{,}6^2 + 1{,}5^2} = 3{,}9$ cm. Az e átló kiszámolható $e = \sqrt{m^2 + (a - 1{,}5)^2} = \sqrt{3{,}6^2 + 6{,}5^2} = 7{,}43$ cm.
Az ABD háromszög területe $t = \frac{a \cdot m}{2} = \frac{8 \cdot 3{,}6}{2} = 14{,}4$ cm^2.



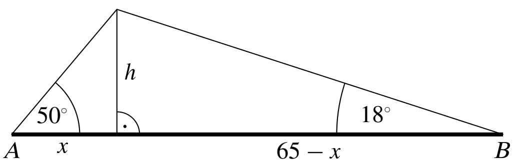
A trapéz köré írható kör megegyezik az ABD háromszög köré írható körrel, aminek sugara $R = \frac{a \cdot b \cdot e}{4 \cdot t} = \frac{8 \cdot 3{,}9 \cdot 7{,}43}{4 \cdot 14{,}4} = 4{,}02$ cm.

30.7. Legyen x a torony magassága! A torony vízszinteshez képesti dőlésszöge $90^\circ - 5{,}5^\circ = 84{,}5^\circ$. A torony alja, a hely ahol állunk és a torony teteje háromszög harmadik szöge $180^\circ - 84{,}5^\circ - 20{,}4^\circ = 75{,}1^\circ$.



Írjuk fel a szinusztételt $\frac{x}{150} = \frac{\sin 20{,}4^\circ}{\sin 75{,}1^\circ}$, $x = 54{,}1$ méter magas a torony.

30.8. Az A faluból az „UFO” magassága $h = x \cdot \operatorname{tg} 50^\circ$, a B faluból az „UFO” magassága $h = (65 - x) \cdot \operatorname{tg} 18^\circ$. A két egyenlőségből $x \cdot \operatorname{tg} 50^\circ = (65 - x) \cdot \operatorname{tg} 18^\circ$, $x \cdot 1{,}192 = (65 - x) \cdot 0{,}325$, $x = 13{,}94$ km.

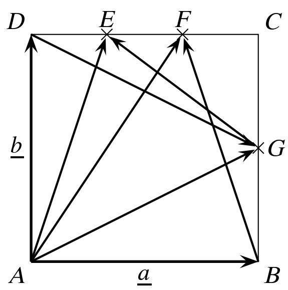


Az A falutól $a = \frac{x}{\cos 50^\circ} = 21{,}68$ km-re volt az „UFO”.

A B falutól $b = \frac{65 - x}{\cos 18^\circ} = 53{,}69$ km-re volt az „UFO”.

31. feladatlap

31.1. $\overrightarrow{AE} = \underline{b} + \frac{\underline{a}}{2}$; $\overrightarrow{AF} = \underline{b} + \frac{2\underline{a}}{3}$; $\overrightarrow{AG} = \underline{a} + \frac{\underline{b}}{2}$; $\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AG} =$
$= \underline{b} + \frac{\underline{a}}{2} - \left(\underline{a} + \frac{\underline{b}}{2}\right) = \frac{\underline{b}}{2} - \frac{2\underline{a}}{3}$; $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB} = \underline{b} + \frac{2\underline{a}}{3} - \underline{a} = \underline{b} - \frac{\underline{a}}{3}$;
$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AD} = \underline{a} + \frac{\underline{b}}{2} - \underline{b} = \underline{a} - \frac{\underline{b}}{2}$.



31.2. A harmadik csúcs Thalész tételének megfordítása értelmében azon a körön van, amelynek átmérője a derékszögű háromszög átfogója. A kör középpontja a szakasz felezőpontja $F = \underline{f} = \frac{\underline{a} + \underline{b}}{2} = (-1; 2)$, a sugara $|\overrightarrow{AF}| =$ $= |\underline{f} - \underline{a}| = \left|(3; -3)\right| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18}$. A lehetséges C csúcsok a $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 18$ egyenletű körön vannak. Végtelen sok megoldás van.

31.3. *a)* A négyzet átlójának hossza $\left|\overrightarrow{AC}\right| = |\underline{c} - \underline{a}| = |(4; 6)| = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$. A négyzet oldalának a hossza $x = \frac{\text{átló}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{26}$. *a)* A négyzet területe $t =$ $= x^2 = 26$. *b)* A másik átló átmegy az AC átló felezőpontján $F = \underline{f} = \frac{\underline{a} + \underline{c}}{2} = (4; -2)$, az egyenes normálvektora $\underline{n} = \overrightarrow{AC}(4; 6)$. A keresett egyenes $4x + 6y = 4 \cdot 4 + 6 \cdot (-2) = 4$, $2x + 3y = 2$. *c)* A négyzet köré írható kör sugara az átlójának fele $r = \frac{\text{átló}}{2} = \frac{2\sqrt{13}}{2} = \sqrt{13}$.

31.4. *a)* Alakítsuk teljes négyzetté a kör egyenletének ismeretleneket tartalmazó tagjait! $(x + 5)^2 - 25 + (y - 3)^2 - 9 + 30 = 0$, $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 4$. A kör középpontja $C(-5; 3)$.
b) A nagyobb kör egyenlete $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 36$. Az y tengelyen lévő pontok koordinátáira igaz, hogy $x = 0$. Helyettesítsük be az egyenletbe $5^2 + (y - 3)^2 = 36$, $(y - 3)^2 = 11$. Az egyenlet megoldásai $y_1 = 3 + \sqrt{11}$, $y_2 = 3 - \sqrt{11}$. A metszéspontok $E_1\left(0; 3 + \sqrt{11}\right)$, $E_2\left(0; 3 - \sqrt{11}\right)$.
c) A körgyűrű területe a két kör területének különbsége $t = \pi \cdot 6^2 - \pi \cdot 2^2 = \pi \cdot 32 = 100{,}53$.

31.5. *a)* Az osztópontra vonatkozó képlettel a keresett harmadolópont koordinátái
$\underline{h}_1 = \frac{2\underline{a} + \underline{b}}{3} = \frac{2 \cdot (-7; 2) + (3; -6)}{3} = \left(-\frac{11}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

b) A szaksz felezőpontjának koordinátái $F = \underline{f} = \frac{\underline{a} + \underline{b}}{2} = (-2; -2)$. A normálvektor az $\overrightarrow{AB}$ vektor $\underline{n} = \overrightarrow{AB}(10; -8)$. Az felezőmerőleges egyenlete $10x - 8y = 10 \cdot (-2) - 8 \cdot (-2) = -4$, $5x - 4y = -2$.

c) A szakasz hossza az $\overrightarrow{AB}$ vektor hossza $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{10^2 + (-8)^2} = 12{,}81$.

31.6. *a)* Az egyenes egy normálvektora $\underline{n}(2; 5)$. *b)* Egy irányvektora: $\underline{v}(5; -2)$. *c)* A párhuzamos origón átmenő egyenes egyenlete $2x + 5y = 0$.

31.7. Az A pont és e egyenes viszonya behelyettesítéssel állapítható meg: $5x - 7y + 11 = 5 \cdot 2 - 7 \cdot 3 + 11 = 0$. Az egyenesnek pontja A. Az A pont és k kör viszonya behelyettesítéssel állapítható meg: $2^2 + 3^2 + 10 \cdot 2 - 6 \cdot 3 + 30 = 45 \neq 0$. Az A pont nem pontja a körnek. Az e egyenes és k kör viszonya az egyenletrendszer megoldásával állapítható meg. Fejezzük ki az egyik ismeretlent az egyenes egyenletéből $x = \frac{7y - 11}{5}$. Helyettesítsük be a kör egyenletébe $\left(\frac{7y - 11}{5}\right)^2 + y^2 + 10 \cdot \frac{7y - 11}{5} - 6y + 30 = 0$. Az egyenlet átalakítva $74y^2 + 46y + 321 = 0$. A másodfokú egyenletnek nincs megoldása, az egyenes nem metszi a kört.